考研数学复习指导系列丛书

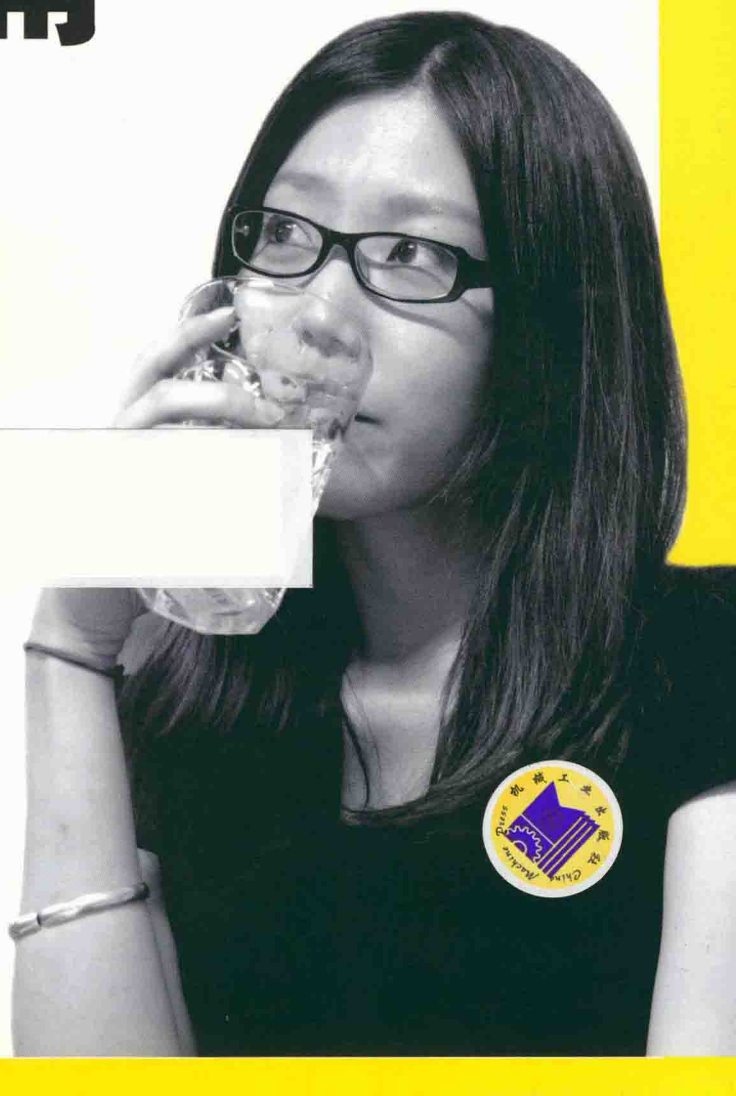
2014 考研数学

冲刺篇

模拟试题5套及详解

（数学一）

陈启浩　编著



集合精华题目

覆盖考试要点

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学冲刺篇（数学一）
——模拟试题 5 套及详解

陈启浩　编著

机械工业出版社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书，适用于参加“数学一”考试的学生．书中包含了5套精心设计的模拟试题，题目难度保持或者稍高于考研题目难度．这些题目大部分为首次公开发布，非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习．本书的详解部分，不仅给出详尽解答，还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习．

本书可作为考生自学的复习材料，也可作为考研培训班的辅导教材，还可供大学数学基础课程的相关教学人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

2014考研数学冲刺篇（数学一）模拟试题5套及详解/陈启浩编著.
—北京:机械工业出版社，2013.10
（考研数学复习指导系列丛书）
ISBN 978-7-111-43939-4

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解
Ⅳ.①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第209738号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　陈崇昱
责任校对：张　媛　封面设计：路恩中
责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013年10月第1版第1次印刷
184mm×260mm・6.5印张・158千字
标准书号：ISBN 978-7-111-43939-4
定价：19.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务　　网络服务
社服务中心：（010）88361066　教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294　机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649　机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203　**封面无防伪标均为盗版**

前　言

深入地读完我们编写的 2014 考研数学复习指导系列丛书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生，已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力，具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力．但是为了把准备工作做得更充分，为了践行“战前多流汗，战时少流血”，应在考试前进行五场“实战演习”——认真、独立地做完五套模拟试题，作为最后的冲刺．

书中的五套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验，精心设计的，它既涵盖性强，又重点突出，其中的问题新颖，既有较强的针对性，又有明显的前瞻性．书中给出了这五份试题的详细、规范的解答，每题之后都加有附注，用简明的词语，指明了与本题有关的概念、方法等值得注意的考点．当然，我们在“实战演习”时，不应一遇到困难就翻看解答，一定要认真、反复地思索，这样才能达到使用本书的冲刺目的——进一步提高应试能力，向着高分进发．

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩，也欢迎考生们对本书提出宝贵意见，可发邮件到 cqhshuxue@ gmail. com，非常感谢！

北京邮电大学教授
陈启浩

目　　录

模拟试题（一）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）函数 $f(x)=x(x-2)^2|x(x-2)|$ 的二阶不可导点个数为

（A）0；　　（B）1；　　（C）2；　　（D）3.

[　　]

（2）下列等式中不正确的是

（A）$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$；

（B）$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\left(\frac{i}{2n}\right)^2$；

（C）$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2$；

（D）$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2$.

[　　]

（3）设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的三个二阶偏导数 $f''_{xx}(x,y)$，$f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 存在，则必有

（A）$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$；

（B）$f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；

（C）$f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

（D）$f'_x(x,y_0)$ 在点 x_0 处可微．

[　　]

（4）设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，则以下各式正确的是

（A）$\iiint\limits_{\Omega}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v=1$；

（B）$\iiint\limits_{\Omega}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v=0$；

（C）$\iiint\limits_{\Omega}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v=8\iiint\limits_{\Omega_1}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v$（$\Omega_1$ 是 Ω 的第一卦限部分）；

（D）$\iiint\limits_{\Omega}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\tan(3x)\mathrm{d}v$.

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有解是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有解的

（A）必要而非充分条件；

（B）充分而非必要条件；

（C）充分必要条件；

（D）既非充分也非必要条件．

[ ]

（6）矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^4$ 的最小特征值为

（A）-1；　　（B）-2；

（C）1；　　（D）2．

[ ]

（7）设随机变量 X、Y 相互独立，概率密度都为 $f(t)$，则随机变量 $Z=X-2Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 为

（A）$f_Z(z)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f\left(\frac{z-x}{2}\right)\mathrm{d}x$；

（B）$f_Z(z)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f\left(\frac{x-z}{2}\right)\mathrm{d}x$；

（C）$f_Z(z)=2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(2(z-x))\mathrm{d}x$；

（D）$f_Z(z)=2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(2(x-z))\mathrm{d}x$．

[ ]

（8）设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，则统计量 $Y=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的数学期望与方差分别为

（A）$\dfrac{1}{n}\sigma^2$，$\dfrac{2}{n}\sigma^4$；　　（B）$\dfrac{1}{n}\sigma^2$，$\dfrac{4}{n}\sigma^4$；

（C）σ^2，$\dfrac{2}{n}\sigma^4$；　　（D）σ^2，$\dfrac{4}{n}\sigma^4$．

[ ]

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $f(x)=\begin{cases}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}, & x>0,\\ a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 连续，则常数 $a=$__________．

（10）设二元函数 $f(u,v)$ 可微，则 $\dfrac{\partial}{\partial x}f\left(\mathrm{e}^{xy},\cos\dfrac{1}{x}\right)=$__________．

（11）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+(-1)^{\cos\frac{n}{2}\pi}\frac{1}{2^n}\right]=$__________．

（12）设二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x),$$

则二阶非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^x\cos x$ 应具有的特解形式为__________．

（13）设四阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $A^*=$ ________.

(14) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 p $(0<p<1)$，记 A 为“此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”这一事件，又记 X 为服从参数是 $P(A)$ 的 0-1 分布的随机变量，则 $E(X^2)=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cos x\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}}\mathrm{d}x$.

(16)（本题满分 10 分）

已知 $f_n(x)$ 满足 $f'_n(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$ 及 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}(n=1,2,\cdots)$，求 $s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}f_n(x)$.

(17)(本题满分 10 分)

已知二元连续函数$f(x,y)$满足$f(x,y)=y+\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t$，$g(x,y)$满足$g'_x(x,y)=g'_y(x,y)=1$及$g(0,0)=0$. 求二重积分$\iint\limits_D f(\sqrt{x},g(x,y))\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由曲线$x=y^2$及直线$x=1$围成的平面图形.

(18)(本题满分 10 分)

设曲线$L:\begin{cases} x=\sin z, \\ y=0. \end{cases}$

(Ⅰ)求曲线积分$\int_{\widehat{OA}}(\mathrm{e}^z\sin x+x-z)\mathrm{d}z+(\mathrm{e}^z\cos x-z)\mathrm{d}x$，其中，$\widehat{OA}$是由原点沿曲线$L$到点$A(0,0,\pi)$的有向曲线；

(Ⅱ)记由曲线$L(0\leqslant z\leqslant\pi)$绕$z$轴旋转一周而成的曲面(外侧)为$\Sigma$，求曲面积分

$$\iint\limits_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内二阶可导,且 $f'_{+}(a) > 0$,$f(b) = 0$. 此外存在 $c \in (a, b)$,使得 $f(c) = 0$,$f'(c) < 0$. 证明:存在 $\xi \in (a, b)$,使得 $f''(\xi) = 0$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, a)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (b, 3, 5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3 = (3., 4, b)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,但 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,求常数 a,b.

(21)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$（其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$ 以及 $\boldsymbol{Q}$ 是三阶正交矩阵）下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，求对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

(22)（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - x^3y - xy^3), & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求（Ⅰ）随机变量 $Z = X^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

（Ⅱ）随机变量 $W = (X - Y)^2$ 的数学期望.

(23)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

(其中,$\theta\in$(0,1)是未知参数). 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 X_1,X_2,…,X_n 中取值等于 i 的个数($i=1$,2,3),求常数 a_1,a_2,a_3,使得 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量.

(Ⅱ)当 $n=300$,$\theta=0.5$ 时,用中心极限定理计算上述样本中取值等于 2 的 N_2 的概率 P($N_2>80$).(标准正态分布函数 Φ(x)的值:Φ(0.57) $=0.7157$,Φ(0.67) $=0.7486$,Φ(0.77) $=0.7794$.)

模拟试题（二）

一、选择题： 1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 的不同实根个数为

（A）1；　　（B）2；　　（C）3；　　（D）4.

[　　]

（2）设 $F(x) = \int_0^x \max\{e^{-t}, e^t\} dt$，则

(A) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, x < 0, \\ e^x - 1, x \geqslant 0; \end{cases}$　　(B) $F(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, x < 0, \\ e^x - 1, x \geqslant 0; \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} < 0, \\ 1 - e^x \geqslant 0; \end{cases}$　　(D) $F(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, x < 0, \\ 1 - e^x, x \geqslant 0. \end{cases}$

[　　]

（3）设 $\{a_n\}$ 是单调减少收敛于零的正项数列，则当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，下列结论正确的是

（A）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散；

（B）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛；

（C）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛；

（D）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛．

[　　]

（4）设 Σ 是半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geqslant 0)$ 的上侧，则关于坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x + 2) dydz + zdxdy$ 等于

(A) $2\iint_{D_{yz}} \sqrt{4 - y^2 - z^2} dydz$；

(B) $2\iint_{D_{yz}} (\sqrt{4 - y^2 - z^2} + 2) dydz + \iint_{D_{xy}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy$；

(C) $2\iint_{D_{yz}} \sqrt{4 - y^2 - z^2} dydz + \iint_{D_{xy}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy$；

(D) $\iint_{D_{xy}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy$.

其中 D_{xy}, D_{yz} 分别是 Σ 在 xOy 平面与 yOz 平面的投影．

[　　]

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示；

(B) $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示；

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示；

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示．

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵及命题

① $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值；

② $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量；

③ $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵；

④ $\boldsymbol{A}$ 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_i$（其中，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵），

则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件是

(A) ①②；　　(B) ②③；

(C) ②④；　　(D) ①④.

[　　]

(7) 下列命题中不正确的是

(A) 设二维随机变量 (X,Y) 在矩形区域 $\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上服从均匀分布，则 X 与 Y 相互独立；

(B) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}ab\mathrm{e}^{-(ax+by)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\text{（其中，}a,b\text{ 都是正数），}$$

则 X 与 Y 相互独立；

(C) 设二维随机变量 (X,Y) 在圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 上服从均匀分布（其中，R 是正数），则 X,Y 相互独立；

(D) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自同一总体的简单随机样本，则随机变量 $X=f_1(X_1,X_2)$，$Y=f_2(X_3,X_4)$（其中，f_1,f_2 都是连续函数）相互独立．

[　　]

(8) 设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，它们相互独立，又设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是分别来自 X 和 Y 的简单随机变量，记

$$Z=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\text{（其中，}\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j\text{），}$$

则 DZ 为

(A) σ^2；　　(B) $\dfrac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}$；

（C）$\dfrac{\sigma^4}{n_1+n_2-2}$；　　（D）$\dfrac{2\sigma^4}{n_1+n_2-2}$.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$________.

（10）设函数 $z=f(x+y,\ yg(x))$，其中，f 具有二阶连续偏导数，曲线 $w=g(x)$ 在点（0，1）处的切线方程为 $w=1+x$，且 $f(u,v)$ 的各阶偏数在 $u=v$ 处的值都为 1，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=$__________.

（11）曲面 $z=x^2+y^2$ 被上半球面 $x^2+y^2+z^2=2\ (z\geqslant 0)$ 截下部分 Σ 的面积为__________________.

（12）设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 1-2x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$ 其余弦级数与正弦级数的和函数分别为 $S_1(x)$ 与 $S_2(x)$，则 $S_1(-1)$ 与 $S_2\left(\dfrac{5}{2}\right)$ 分别为__________.

（13）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为二阶与四阶矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=1$，$r(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

（14）设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从参数为 1 的指数分布，即它们的概率密度都为 $f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $P(\max\{X,Y\}\leqslant 1)=$________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有连续导数，且满足

$$y(x)=1+x+2\int_0^x (x-t)y(t)y'(t)\,dt,$$

求 $y^{(n)}(x)$.

（16）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x, y, z)=2x+2y+x^2+y^2-z^2$ 在 Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 上的最大值与最小值．

（17）（本题满分 10 分）

证明：当 $x\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$2\sin x+\tan x>3x$.

（18）（本题满分 10 分）

设 $\alpha=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\tan\dfrac{x}{2}}{1-(1+x)^{x\sin^2\sqrt{x}}}$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin^{n-1}\alpha$ 的和．

(19)(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $I = \int_C \frac{1}{x^2 + y^2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$,

其中,C 为曲线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) - a\pi, \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.

(20)(本题满分 11 分)

已知线性方程组(A) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + (a+4)x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = -3 \end{cases}$ 有无穷多解.

(Ⅰ)求非零常数 a 的值;

(Ⅱ)对上述算得的 a 值,求方程组(A)与(B) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 1 \end{cases}$ 有公共解时的 λ 值及公共解.