

张宇



CLASSIC

考研数学 真题大全解

(试卷分册 · 数学 一)

AUTHENTIC EX-
AMINATION PAPERS
WITH ANSWERS

□ Mr. Zhang

张宇 ○ 主编



[张宇考研数学系列丛书]

张宇



CLASSIC

考研数学 真题大全解

(试卷分册 · 数学一)
藏书

张宇  主编

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 试卷分册. 数学一 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2014.7
ISBN 978-7-5640-9480-5

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 148157 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市文阁印刷有限公司

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 6

字 数 / 147 千字

版 次 / 2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷

定 价 / 46.00 元(共 2 册)

责任编辑 / 高 芳

文案编辑 / 胡 莹

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

Contents 目录

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(1)
1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(4)
1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(7)
1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(10)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(14)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(17)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(21)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(24)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(27)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	(31)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(34)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(37)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(40)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(43)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(46)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(49)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(52)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(55)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(58)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(61)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(65)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(69)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(72)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(76)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(79)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(82)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(86)
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(89)



1987 年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷 I, II 均为现在的数学一。

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)与两直线

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \\ z=2+t \end{cases}$$

及 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 都平行,且过原点的平面方程为_____.

P51,4.1 题

(2)当 $x=$ _____时,函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

P23,2.1 题

(3)由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是_____.

P39,3.1 题

(4)设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$,则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值是_____.

P77,6.1 题

(5)已知三维线性空间的一组基底为 $\alpha_1=(1,1,0), \alpha_2=(1,0,1), \alpha_3=(0,1,1)$,则向量 $u=(2,0,0)$ 在上述基底下的坐标是_____.

P149,1 题

二、(本题满分 8 分)

求正常数 a 与 b ,使等式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 1$ 成立.

P9,1.1 题

三、(本题满分 7 分)

(1)设 f, g 为连续可微函数 $u=f(x, xy), v=g(x+xy)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

P61,5.1 题

(2)设矩阵 A 和 B 满足 $AB=A+2B$,其中 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,求矩阵 B .

P157,1 题

四、(本题满分 8 分)

求微分方程 $y''' + 6y'' + (9+a^2)y' = 1$ 的通解,其中常数 $a > 0$.

P125,8.1 题

五、选择题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1)设常数 $k > 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

P104,7.1 题

(A)发散.

(B)绝对收敛.

(C)条件收敛.

(D)收敛或者发散与 k 的取值有关.

(2)设 $f(x)$ 为已知连续函数, $I = t \int_0^{\frac{x}{t}} f(tx) dx$,其中 $s > 0, t > 0$,则 I 的值

P34,3.1 题

(A)依赖于 s 和 t .

(B)依赖于 s, t, x .

(C)依赖于 t 和 x ,不依赖于 s .

(D)依赖于 s ,不依赖于 t .



(3) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在 $x=a$ 处

P14, 2.1 题

(A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$.

(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

(4) 设 A 为 n 阶方阵, 且 A 的行列式 $|A| = a \neq 0$, 而 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|A^*|$ 等于

P135, 1 题

(A) a .

(B) $\frac{1}{a}$.

(C) a^{n-1} .

(D) a^n .

六、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n+1}$ 的收敛域, 并求其和函数.

P110, 7.1 题

七、(本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy,$$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1}, \\ x = 0 \end{cases} (1 \leq y \leq 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面, 它

的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$ (图 1).

P83, 6.1 题

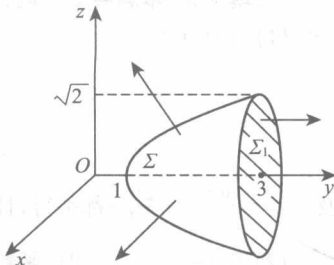


图 1

八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上可微, 对于 $[0, 1]$ 上的每一个 x , 函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0, 1)$ 内, 且 $f'(x) \neq 1$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$.

P25, 2.1 题

九、(本题满分 8 分)

问 a, b 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$ 有唯一解, 无解, 有无穷多组解? 并求出有

无穷多组解时的通解.

P157, 2 题

十、填空题(本题共 3 小题, 每小题 2 分, 满分 6 分)

(1) 设在一次试验中 A 发生的概率为 p , 现进行 n 次独立试验, 则 A 至少发生一次的概率为 _____; 而事件 A 至多发生一次的概率为 _____.

P208, 1 题

(2) 三个箱子, 第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球, 第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球, 第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球. 现随机地取一个箱子, 再从这个箱子中取出 1 个球, 这个球为白球的概率等于 _____. 已知取出的球是白球, 此球属于第二个箱子的概率为 _____.

P208, 2 题

(3) 已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2x - 1}$. 则 $EX =$ _____, $DX =$ _____.

P209, 3 题

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 其概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

求随机变量 $Z = 2X + Y$ 的概率密度函数.

P219, 1 题

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同数学 I 第一题】

二、(本题共 2 小题, 满分 14 分)

(1) (本题满分 6 分) 计算定积分 $\int_{-2}^2 (|x| + x) e^{-|x|} dx$.

P42, 3.1 题

(2) (本题满分 8 分) 【同数学 I 第二题】

三、(本题满分 7 分)

设 $z = f(u, x, y)$, $u = xe^y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

P61, 5.2 题

四、(本题满分 8 分) 【同数学 I 第四题】 五、(本题满分 12 分) 【同数学 I 第五题】

六、(本题满分 10 分) 【同数学 I 第六题】 七、(本题满分 10 分) 【同数学 I 第七题】

八、(本题满分 10 分) 【同数学 I 第八题】 九、(本题满分 8 分) 【同数学 I 第九题】

十、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶矩阵, λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值; x_1, x_2 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量, 试证明 $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

P158, 3 题

答案速查(试卷 I)

一、填空题

(1) $x - y + z = 0$. (2) $-\frac{1}{\ln 2}$. (3) $\frac{3}{2}$. (4) -18π . (5) $(1, 1, -1)$.二、 $a = 4, b = 1$.三、(1) $(1+y)g' \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial w} \right)$. (2) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.四、 $y = Y + y^* = C_1 + e^{-3x}(C_2 \cos ax + C_3 \sin ax) + \frac{x}{9+a^2}$.

五、选择题

(1)(C). (2)(D). (3)(B). (4)(C).

六、收敛域为 $[-2, 2)$, $S(x) = 2x \ln \frac{2}{2-x}$, $x \in [-2, 2)$. 七、 34π . 八、略.九、① 当 $a \neq 1$ 时, 有唯一解; ② 当 $a = 1$ 时, (i) 当 $b \neq -1$ 时, 无解; (ii) 当 $b = -1$ 时, 有无穷多组解,

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, k_1, k_2 为任意常数.

十、填空题

(1) $1 - (1-p)^n$; $(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$. (2) $\frac{53}{120}; \frac{20}{53}$. (3) $1; \frac{1}{2}$.

十一、 $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-z}), & 0 < z \leq 2, \\ \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-z}, & z > 2. \end{cases}$

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、(1) $2 - \frac{6}{e^2}$. (2) 略. 三、 $f''_{ux} \cdot xe^{2y} + f''_{vy} e^y + f'_u \cdot e^y + f''_{ux} x e^y + f''_{xy}$.

四、略. 五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略. 十、略.



1988 年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题

(试卷 I)

一、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域.

P110, 7.2 题

(2) 已知 $f(x) = e^x$, $f[\varphi(x)] = 1-x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

P9, 1.2 题

(3) 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy.$$

P84, 6.2 题

二、填空题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1) 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____.

P23, 2.2 题

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定义为 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$

的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于 _____.

P109, 7.1 题

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x$, 则 $f(7) =$ _____.

P40, 3.2 题

(4) 设 4×4 矩阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且已知行列式 $|A| = 4$, $|B| = 1$, 则行列式 $|A+B| =$ _____.

P149, 2 题

三、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 点处的微分 dy 是

P14, 2.2 题

(A) 与 Δx 等价的无穷小.

(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.

(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

(2) 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 且 $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处

P14, 2.3 题

(A) 取得极大值.

(B) 取得极小值.

(C) 某邻域内单调增加.

(D) 某邻域内单调减少.

(3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$; 及 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则

P72, 6.1 题

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv.$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv.$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv.$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv.$

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处

P104, 7.2 题

(A) 条件收敛.

(B) 绝对收敛.

(C) 发散.

(D) 收敛性不能确定.

(5) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (3 \leq s \leq n)$ 线性无关的充分必要条件是

P135, 2 题

(A) 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表出.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

四、(本题满分 6 分)

设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 求 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

P61, 5.3 题

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且其图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y = y(x)$.

P125, 8.2 题

六、(本题满分 9 分)

设位于点 $(0, 1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k > 0$ 为常数, r 为质点 A 与 M 之间的距离),

质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $B(2, 0)$ 运动到 $O(0, 0)$. 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

P84, 6.4 题

七、(本题满分 6 分)

已知 $AP = PB$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 及 A^5 .

P158, 4 题

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似;

(1) 求 x 与 y ; (2) 求一个满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P .

P159, 5 题

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 内有 $f'(x) > 0$. 证明: 在 (a, b) 内存在唯一的 ξ , 使曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi)$, $x = a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi)$, $x = b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍 (图 2).

P43, 3.2 题

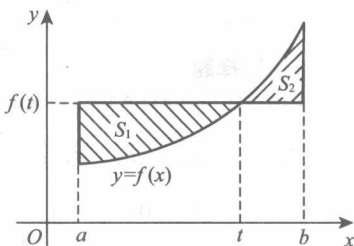


图 2

十、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 2 分, 满分 6 分)

(1) 设三次独立试验中, 事件 A 出现的概率相等. 若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$, 则事件 A 在一次试验中出现的概率为 _____.

P209, 4 题

(2) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$ ”的概率为 _____.

P209, 5 题

(3) 设随机变量 X 服从均值为 10, 均方差为 0.02 的正态分布. 已知

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad \Phi(2.5) = 0.9938,$$

则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为 _____.

P209, 6 题

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, 求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

P219, 2 题



(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同数学 I 第一题】

二、(本题满分 12 分)【同数学 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同数学 I 第三题】

四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)

(1)【同数学 I 第四题】

(2) 计算二次积分 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$.

P84, 6.3 题

(3) 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程,使 π 过已知直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$.

P62, 5.4 题

五、(本题满分 8 分)【同数学 I 第五题】

六、(本题满分 9 分)【同数学 I 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同数学 I 第七题】

八、(本题满分 8 分)【同数学 I 第八题】

九、(本题满分 9 分)【同数学 I 第九题】

答案速查(试卷 I)

一、(1) $[0, 6)$. (2) $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}, x \leq 0$. (3) $\frac{12}{5}\pi$.

二、填空题

(1) $(1+2t)e^{2t}$. (2) $\frac{3}{2}$. (3) $\frac{1}{12}$. (4) 40.

三、选择题

(1) (B). (2) (A). (3) (C). (4) (B). (5) (D).

四、0. 五、 $y = (1-2x)e^x$. 六、 $W = k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.七、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A^5 = A$. 八、(1) $x=0, y=1$; (2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 九、略.

十、填空题

(1) $\frac{1}{3}$. (2) $\frac{17}{25}$ (或 0.68). (3) 0.987 6.十一、 $f_Y(y) = \frac{3}{\pi} \frac{(1-y)^3}{1+(1-y)^6}$.

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、略. 三、略.

四、(1) 略. (2) $\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$. (3) $x+2z=7$ 和 $x+4y+6z=21$.

五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略.

1989 年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 已知 $f'(3)=2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{2h} =$ _____.

P23, 2.3 题

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) =$ _____.

P40, 3.3 题

(3) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ _____.

P77, 6.2 题

(4) 向量场 $u(x, y, z) = xy^2i + ye^zj + x \ln(1+z^2)k$ 在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\operatorname{div} u =$ _____.

P78, 6.3 题

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则逆矩阵 $(A - 2I)^{-1} =$ _____.

P149, 3 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$

P14, 2.4 题

(A) 有且仅有水平渐近线.

(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线, 也有铅直渐近线.

(D) 既无水平渐近线, 也无铅直渐近线.

(2) 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标是

P54, 5.1 题

(A) $(1, -1, 2)$.

(B) $(-1, 1, 2)$.

(C) $(1, 1, 2)$.

(D) $(-1, -1, 2)$.

(3) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该非齐次方程的通解是

P121, 8.1 题

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$.

(B) $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$.

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$.

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

(4) 设函数 $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1$, 而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty$.

其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, n = 1, 2, 3, \dots$, 则 $S(-\frac{1}{2})$ 为

P104, 7.3 题

(A) $-\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

(5) 设 A 是 4 阶矩阵, 且 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 A 中

P135, 3 题

(A) 必有一列元素全为 0.

(B) 必有两列元素对应成比例.

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 设 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

P62, 5.5 题



(2) 设曲线积分 $\int_C xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0) = 0$. 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 的值. P84, 6.5 题

(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+z) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域. P85, 6.6 题

四、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数. P110, 7.3 题

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$. P126, 8.3 题

六、(本题满分 7 分)

证明: 方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根. P26, 2.2 题

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时, 线性方程组 $f(x) = \begin{cases} x_1 + \dots + x_3 = \lambda, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$ 有解, 并求出解的一般形式. P159, 6 题

八、(本题满分 7 分)

假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值, 证明:

(1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值; (2) $-\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值. P159, 7 题

九、(本题满分 9 分)

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2 (a>0)$ 上, 问当 R 取何值时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大? P85, 6.9 题

十、填空题(本题共 3 小题, 每小题 2 分, 满分 6 分)

(1) 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$, 随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$, 则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B) =$ _____. P210, 7 题

(2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中, 则它是甲射中概率为 _____. P210, 8 题

(3) 设随机变量 ξ 在区间 $(1, 6)$ 上服从均匀分布, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是 _____. P210, 9 题

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从均值为 1、标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布, 而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数. P219, 3 题

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同数学 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同数学 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同数学 I 第三题】

四、(本题共3小题,每小题6分,满分18分)

(1)【同数学I 第四、(1)题】

(2)求八分之一的球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界曲线的重心, 设曲线的线密度 $\rho=1$.

P85, 6.7 题

(3)设空间区域 Ω 由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成, 其中 a 为正常数. 记 Ω 表面的外侧为 S , Ω 的体积为 V . 证明:

$$\oint_S x^2 y z^2 dy dz - x y^2 z^2 dz dx + z(1 + x y z) dx dy = V.$$

P85, 6.8 题

五、(本题满分7分)【同数学I 第五题】

六、(本题满分7分)【同数学I 第六题】

七、(本题满分6分)【同数学I 第七题】

八、(本题满分8分)【同数学I 第八题】

九、(本题满分9分)【同数学I 第九题】

答案速查(试卷 I)

一、填空题

$$(1)-1. \quad (2)x-1. \quad (3)\pi. \quad (4)2. \quad (5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

二、选择题

(1)(A). (2)(C). (3)(D). (4)(B). (5)(C).

三、(1) $-2f'' + xg_{ww} + xyg_{wv} + g_v$. (2) $\frac{1}{2}$. (3) $\frac{\pi}{8}$.四、 $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $(-1 \leq x < 1)$. 五、 $\frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$. 六、略.七、 $\lambda=1$ 时, 方程组有解; 解为 $\begin{cases} x_1=1-x_3, \\ x_2=-1+2x_3, \end{cases}$ 其中 x_3 取任意常数.八、略. 九、 $\frac{4}{3}a$.

十、填空题

(1)0.7. (2)0.75. (3) $\frac{4}{5}$.十一、 $\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、略. 三、略.

四、(1)略. (2) $(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$. (3)略.

五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略.



1990 年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)过点 $M(1, 2, -1)$ 且与直线

$$\begin{cases} x = -t + 2, \\ y = 3t - 4, \\ z = t - 1 \end{cases}$$

垂直的平面方程是_____.

P51, 4.2 题

(2)设 a 是非零常数,则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x =$ _____.

P6, 1.1 题

(3)设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____.

P6, 1.2 题

(4)积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于_____.

P78, 6.4 题

(5)已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4), \alpha_2 = (2, 3, 4, 5), \alpha_3 = (3, 4, 5, 6), \alpha_4 = (4, 5, 6, 7)$, 则该向量组的秩是

P150, 4 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x) = \int_x^x f(t) dt$, 则 $F'(x)$ 等于

P34, 3.2 题

(A) $-e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$.

(B) $-e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$.

(D) $e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.

(2)已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为

P14, 2.5 题

(A) $n! [f(x)]^{n+1}$.

(B) $n[f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$.

(D) $n! [f(x)]^{2n}$.

(3)设 α 为常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

P104, 7.4 题

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 发散.

(D) 收敛性与 α 取值有关.

(4)已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

P15, 2.6 题

(A) 不可导.

(B) 可导且 $f'(0) \neq 0$.

(C) 取得极大值.

(D) 取得极小值.

(5)已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数,则方程组 $AX=b$ 的通解(一般解)是

P135, 4 题

(A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$.

(B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

(C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$.

(D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1) 求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$.

P43, 3.3 题

(2) 设 $z=f(2x-y, y\sin x)$, 其中 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

P62, 5.6 题

(3) 求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 的通解(一般解).

P126, 8.4 题

四、(本题满分6分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域, 并求其和函数.

P111, 7.4 题

五、(本题满分8分)

求曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} yz dz dx + 2 dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $z \geq 0$ 的部分.

P86, 6.10 题

六、(本题满分8分)

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$.

P26, 2.3 题

七、(本题满分8分)

设四阶矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且矩阵 A 满足关系式 $A(E - C^{-1}B)^T C^T = E$,

其中 E 为四阶单位矩阵, C^{-1} 表示 C 的逆矩阵, C^T 表示 C 的转置矩阵, 将上述关系式化简并求矩阵 A .

P160, 8 题

八、(本题满分8分)

求一个正交变换化二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 成标准形.

P160, 9 题

九、(本题满分8分)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周, 从点 $A(1, 2)$ 运动到点 $B(3, 4)$ 的过程中受变力 F 作用(见图3), F 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离, 其方向垂直于线段 OP , 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 F 对质点 P 所作的功.

P86, 6.11 题

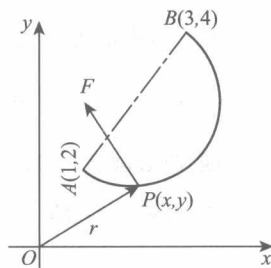


图3

十、填空题(本题共3小题,每小题2分,满分6分)

(1) 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, 则

 X 的概率分布函数 $F(x) =$ _____.

P210, 10 题

(2) 设随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6. 若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件, 那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B}) =$ _____.

P211, 11 题

(3) 已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布, 且随机变量 $Z = 3X - 2$, 则 $EZ =$ _____.

P211, 12 题

十一、(本题满分6分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| < x$ (图4) 内服从均匀分布, 求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z = 2X + 1$ 的方差 $D(Z)$.

P220, 4 题

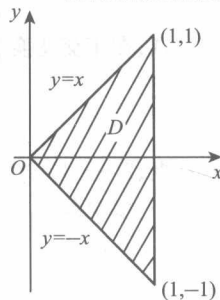


图4



(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同数 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同数 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同数 I 第三题】

四、(本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分)

(1)【同数 I 第四、(1)题】

(2) 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足条件 $y|_{x=e} = 1$ 的特解.

P126, 8.5 题

(3) 过点 $P(1, 0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形, 求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

P43, 3.4 题

五、(本题满分 8 分)【同数 I 第五题】

六、(本题满分 7 分)【同数 I 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同数 I 第七题】

八、(本题满分 8 分)【同数 I 第八题】

九、(本题满分 8 分)【同数 I 第九题】

答案速查(试卷 I)

一、填空题

(1) $x - 3y - z + 4 = 0$. (2) e^{2a} . (3) 1. (4) $\frac{1}{2}(1 - e^{-4})$. (5) 2.

二、选择题

(2)(A). (2)(A). (3)(C). (4)(D). (5)(B).

三、(1) $\frac{1}{3} \ln 2$. (2) $-2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (2 \sin x - y \cos x) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y \sin x \cos x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \cos x \frac{\partial f}{\partial v}$.(3) $(C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{x^2}{2}e^{-2x}$.四、收敛域是 $(-1, 1)$; $S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$, $-1 < x < 1$.五、 12π . 六、略.七、 $A(C-B)^T = E, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.八、在正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 下, 二次型为 $f = 9y_3^2$.九、 $2(\pi - 1)$.

十、填空题

(1) $\begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$ (2) 0.3. (3) 4.

$$十一、f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}, D(Z) = \frac{2}{9}.$$

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、略. 三、略.

四、(1)略. (2) $\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)$. (3) $\frac{\pi}{6}$.

五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略.