普通高等教育“十二五”规划教材·财经类院校基础课系列教材

应用概率统计

主编　王佐仁　孙学英

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材·财经类院校基础课系列教材

应用概率统计

主　编　王佐仁　孙学英

副主编　杨大成　刘润芳

参　编　史维良　刘云忠

张　云　安　琳　严惠云

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是一本普通高等院校非理学专业的概率统计教材。全书共 9 章，分为两大部分，第一部分是第 1～5 章，主要介绍概率论的基本理论，包括随机事件及其概率、一维随机变量及其概率分布、随机向量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理；第二部分是第 6～9 章，主要介绍数理统计的基本理论和方法，包括数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析. 每章均附有习题，书后附有对应的参考答案，以便初学者使用.

本书可作为高等学校经济、管理和工科类等专业学生的教材，也可作为实际工作者自学的参考书，同时还可作为考研学子的复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计/王佐仁，孙学英主编. —北京：科学出版社，2014
普通高等教育“十二五”规划教材 · 财经类院校基础课系列教材
ISBN 978-7-03-041561-5

Ⅰ.①应… Ⅱ.①王… ②孙… Ⅲ.①概率统计-高等数学-教材
Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 179482 号

责任编辑：任俊红 李梦华 / 责任校对：胡小洁
责任印制：霍 兵 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 12 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2014 年 12 月第一次印刷 印张：12 1/2
字数：350 000

定价：28.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

本书是编者在西安财经学院几十年教学实践的基础上编写的，适合作为普通高等院校非理学专业学生学习概率统计的教材或实际工作者的参考书.

概率统计是一门研究随机现象（统计）规律性的数学学科，它广泛应用于自然科学、社会科学领域.特别是信息技术迅猛发展的今天，概率统计在经济、管理、金融、保险、生物、医学等领域的应用更加广泛，因而它也成为各类专业大学生最重要的数学必修课之一.

与其他数学课程相比，这门课程的思想方法明显不同.初学者往往对一些重要的概率统计理论和方法实质难以领会.鉴于这方面的原因，并结合概率统计应用性强这一特点，我们根据多年的教学实践经验和体会，在博采众家之长的基础上，紧扣教育部最新颁布的教学大纲，针对非理学专业学生学习概率统计的实际情况，遵从从易到难，由浅入深的编写思路，力图以实际问题引入概念、以实例介绍统计方法，几经修改编写了此书.本书在编写上注意了以下几点：

（1）对于基本概念和基本结论着重阐述实际背景、统计思想、直观意义和应用条件，不拘泥于抽象而严密的数学定义和论证.

（2）本书侧重应用，对基本统计方法力求讲清操作程序及应用条件.

（3）考虑到概率统计的广泛应用性，注意举例的多样性，书中给出经济、管理、保险、医疗等方面的例子，以便帮助读者从各个侧面理解概念、掌握方法.

全书共9章，分为两大部分，第一部分是第1～5章，主要介绍概率论的基本理论，包括随机事件及其概率、一维随机变量及其概率分布、随机向量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理；第二部分是第6～9章，主要介绍数理统计的基本理论和方法，包括数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析.每章均附有一定数量的习题且在书后附有相对应的参考答案，以便读者练习和参考.

在遵循本学科系统性和科学性的前提下，本书尽量避免烦琐的数学推导，强调概念和统计思想的阐述，注重统计方法的实际应用.

全书内容大概需要54课时，不同院校、不同专业可根据教学大纲要求和学时要求，灵活选用章节，合理组织教学.

全书由王佐仁、孙学英主编.参加编写的有王佐仁（第1章）、刘云忠（第2章）、张云（第3章）、史维良（第4章）、安琳（第5章）、孙学英（第6章）、刘润芳（第7章）、杨大成（第8章）和严惠云（第9章）.最后由王佐仁和孙学英统稿.

本书的出版得到西安财经学院和科学出版社的大力支持，在此表示衷心感谢.

在编写过程中，编者参考了一些概率统计和应用统计的专著、教材和文献，摘引了这些文献的一些例子和图表，在此对这些著作的作者谨致谢忱.

由于编者的水平有限，书中难免有不足之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2014年5月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

概率论是研究随机现象的数量规律的数学学科. 由于随机现象广泛地存在于自然界和人类社会中,使得概率论成为有广泛应用的一门学科. 概率论与其它数学学科一样,也有自己的一套严格的概念体系和严密的逻辑结构. 本章介绍概率论的一些基本概念,如样本空间、随机事件及其概率等. 还将介绍概率的性质、古典概型、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式及事件的独立性等. 这些内容是进一步学习后续各章的基础.

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机现象

在自然界和人类社会中经常会遇到各种各样的现象. 这些现象大体上可分为两类,一类是在一定的条件下必然发生的现象,称为确定性现象,例如:

(1) 在标准大气压下,水加热到 100℃就会沸腾;

(2) 边长为 a 的正方形,其面积必为 a^2;

(3) 太阳从东方升起.

另一类是在一定的条件下可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,且我们不能事先准确预知出现那一个结果的现象,称为偶然现象或随机现象,例如:

(1) 掷一颗骰子,观察出现的点数;

(2) 新生婴儿的性别;

(3) 某天上午电话总机接到的呼叫次数.

在实际中,我们经常要面对和处理随机现象,比如,明天是否会下雨? 某种股票明天价格是否会上升? 这些问题往往事先不能得到明确的答案,却是我们十分关心的问题. 这种偶然发生的现象正是概率论的研究对象.

1.1.2　随机试验和样本空间

既然随机现象是偶然现象,那么它们是不是杂乱无章,从而导致我们无法对它们进行研究呢? 事实上并非如此. 人们经过长期的实践发现,虽然个别随机现象没有规律,但性质相同的随机现象在大量试验中却呈现出明显的规律性. 这种规律性称为随机现象的统计规律性.

为了对随机现象的统计规律性进行研究,人们往往要对随机现象进行观察或试验,我们把对随机现象进行观察或试验统称为随机试验,简称为试验,记为 E. 一般地,一个随机试验要求满足如下特点:

(1) 试验可在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果是明确可知的,并且不止一个;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪个结果。

随机试验中的每一个可能的结果称为**样本点**,通常用 ω 表示. 样本点的特点是每次试验

必出现一个且只能出现一个,任何两个样本点都不可能同时出现.即样本点是随机试验的那些“不可再分”的最小可能结果.一个随机试验的所有可能的结果(样本点)是明确的,通常把一个随机试验的所有样本点组成的集合称为**样本空间**,通常用Ω表示.对一个具体的随机试验来说,样本空间可以根据试验的内容来决定.

例 1.1.1 在掷一颗骰子观察其出现的点数的试验中,试验的所有的可能结果有6种:1点,2点,…,6点,样本空间为

$$\Omega=\{1\text{点},2\text{点},\cdots,6\text{点}\}$$

记$\omega_i=\{\text{出现 } i \text{ 点}\}$,$i=1,2,\cdots,6$,则样本空间也可表示为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$,或将样本空间简记为$\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

例 1.1.2 试验E:一射手向一目标射击,直到击中目标为止,记录射手所需射击次数,样本空间可表示为

$$\Omega=\{1,2,\cdots\}$$

例 1.1.3 试验E:观察一个新灯泡的寿命.用t表示“灯泡的寿命为t小时”,样本空间可表示为$\Omega=\{t|0\leqslant t<+\infty\}$.

通过上面的例子我们可以看到,随机试验的样本空间中可能有有限个样本点,可能有可列无穷多个样本点,也可能有不可列无穷多个样本点.

1.1.3 随机事件

在一个随机试验中,我们把带有某些特征的基本事件构成的集合称为**随机事件**,简称为事件.通常用大写字母A,B,C等表示.例如,在例1.1.1中,A=“出现6点”,B=“出现偶数点”,C=“出现的点数大于3”等都是随机事件.

对一个随机试验来说,它的每一个结果(样本点)是一个最简单的随机事件,称为**基本事件**,如上述事件A.所以,样本空间也称为基本事件空间.除基本事件外,还有由若干个可能结果(样本点)组成的事件,相对于基本事件,称这种事件为复合事件.如上述事件B,C等.

每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**,用Ω表示.例如,在例1.1.1中,事件“点数小于7”是必然事件.每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**0,用$\varnothing$表示.例如,在例1.1.1中,事件“点数大于6”是不可能事件.必然事件和不可能事件本质上不是随机事件,但为了今后研究问题的方便,通常把必然事件和不可能事件视为随机事件的两个极端情形统一处理.

1.1.4 事件的集合表示

根据样本空间的定义,样本空间是随机试验的所有可能结果(样本点)的全体,因此,样本空间实际上是所有样本点构成的集合,每一个样本点即为该集合中的一个元素.一个随机事件是由该事件所要求的特征的那些可能结果所构成,所以随机事件是样本空间中具有相同特征的样本点构成的集合,它可以看成是样本空间的一个子集.对基本事件来说,可以用以样本空间中样本点为元素的单点集来表示.对复合事件来说,可以用以样本空间中若干个样本点为元素的集合来表示.当且仅当随机事件A中某一个样本点出现时,称事件A发生.由于样本空间Ω包含所有可能结果(样本点),所以样本空间作为一个事件是必然发生的,即为必然事件.空集$\varnothing$作为样本空间的子集不含任何样本点,作为一个事件总是不可能发生,即是不可能事件.这也是我们用Ω表示必然事件,用$\varnothing$表示不可能事件的原因.

1.1.5　事件的关系

在一个随机试验中，一般有很多随机事件，有的随机事件可能很复杂，为了利用简单事件来研究复杂事件，我们需要研究同一试验中的各种事件之间的关系和运算. 由于事件是样本空间的某一个子集，因此，事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的. 定义事件的关系如下.

1) 事件的包含

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，即属于 A 的每个样本点也都属于 B，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$. 显然，对于任意随机事件 A 有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega$$

2) 事件的相等

如果事件 A 包含事件 B，且事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等. 即事件 A 与事件 B 的样本点完全相同，记作 $A=B$.

3) 事件的并(或和)

“事件 A 和 B 至少有一个发生”是一个随机事件，这一事件称作事件 A 与 B 的并(或和)，记作 $A \cup B$ 或 $A+B$.

4) 事件的交(或积)

“事件 A 和 B 都发生”是一个随机事件，这一事件称作事件 A 与 B 的交(或积)，记作 $A \cap B$ 或 AB.

类似可定义 n 个事件的并 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 和 n 个事件的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 的运算.

5) 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”是一个随机事件，这一事件称作事件 A 与 B 的差. 它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合，记作 $A-B$.

6) 互不相容事件

如果事件 A 与 B 不能同时发生，也就是说，AB 是不可能事件，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的(或称事件 A 与 B 是互斥的). 显然，任意两个基本事件是互不相容的.

7) 对立事件

“事件 A 不发生”是一个随机事件，这一事件称作事件 A 的对立事件(或 A 的逆事件). 记作 $\overline{A}$. 由于 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，因此，称 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件. 对立事件满足下面关系式：

$$\overline{A}=\Omega-A,\quad \overline{\overline{A}}=A,\quad A\overline{A}=\varnothing,\quad A+\overline{A}=\Omega$$

8) 完备事件组

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足

(1) $A_iA_j=\varnothing, i \neq j (i,j=1,2,\cdots,n)$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组.

若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 满足

(1) $A_iA_j=\varnothing, i \neq j (i,j=1,2,\cdots)$；

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$,

则称可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 构成一个完备事件组.

显然,所有的基本事件构成一个完备事件组.对于任一事件 A, A 和 $\overline{A}$ 构成完备事件组.

事件的关系和运算常用图形(韦恩图)来直观表示,如图 1-1 所示.

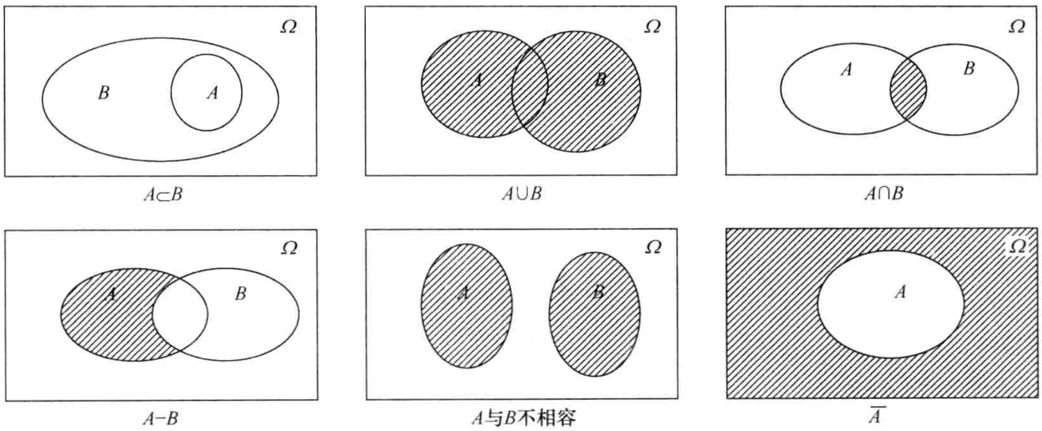

图 1-1 事件的关系与运算(韦恩图)

1.1.6 事件的运算律

类似于集合运算的性质,可以证明,一般事件的运算满足如下运算规律,利用这些运算律可以帮助我们化简一些复杂的事件.

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 第一分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 第二分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(5) 差化积:$A-B=A\overline{B}$.

(6) 吸收律:若 $A\subset B$,则有 $A\cup B=B, A\cap B=A$.

(7) 第一对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

(8) 第二对偶律:$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上各运算律均可推广到有限个和可列个事件的情形,读者可通过复习集合论中的相关知识自行给出.

例 1.1.4 掷一颗质地均匀的骰子,用 A_i 表示事件"出现 i 点",$i=1,2,\cdots,6$,B 表示事件"出现偶数点",C 表示事件"出现的点数不小于 2",则

$$B=A_2+A_4+A_6$$
$$C=A_2+A_3+A_4+A_5+A_6=\overline{A}_1$$

且 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 构成一个完备事件组.

例 1.1.5 某人向一靶子射击 3 次,用 A_i 表示事件"第 i 次射击击中靶子",$i=1,2,3$.

(1) 用语言描述下列事件

$$\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3,\quad \overline{A_1+A_2},\quad A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3$$

(2) 用 A_1, A_2, A_3，通过运算关系表示出下列事件：

B="三次射击恰好有一次击中靶子"；

C="三次射击第一次不中而后两次中至少有一次击中"；

D="三次射击至少有两次没有击中靶子".

解　(1) $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$ 表示的事件是"三次射击中至少有一次没有击中靶子"；$\overline{A_1+A_2}$ 表示的事件是"前两次没有击中靶子"；$A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3$ 表示的事件是"恰好连续两次击中靶子".

(2)
$$B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$
$$C=\overline{A}_1(A_2+A_3)$$
$$D=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$$

1.2　频率与概率

1.2.1　频率的定义及性质

在研究随机现象发生的规律性时，仅仅知道随机试验中可能出现哪些事件是不够的，还应该知道随机事件发生的可能性有多大. 怎样研究事件发生的可能性的大小呢？虽然随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，但在大量的重复试验中，它的发生却具有统计规律性，所以，我们应从大量重复试验出发来研究它. 为此，先介绍频率的概念.

定义 1.2.1　设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 $n(A)$ 次，则称比值 $n(A)/n$ 为随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率，记为 $\mu_n(A)$，即
$$\mu_n(A)=\frac{n(A)}{n} \tag{1.2.1}$$

人们经过长期的实践发现，当试验次数 n 较小时，随机事件 A 发生的频率波动性较明显，但当重复试验次数 n 充分大时，频率的这种波动性明显减小，并且随着 n 的不断增大，A 发生的频率总在一确定的数值附近摆动，有稳定于一常数值的趋势. 这种性质称为频率的稳定性.

历史上人们进行过投硬币的试验，用来观察"正面向上"这一事件发生的规律，见表 1-1.

表 1-1

实验者	投掷次数 n	正面向上次数 $n(A)$	正面出现的频率 $\mu_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

从表 1-1 可以看出，随着试验次数 n 的增大，正面出现的频率 $\mu_n(A)$ 越来越靠近一确定的常数值 0.5.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，在 n 次重复试验中，由频率的定义不难得到频率具有下述基本性质：

(1) 非负性：对任何事件 A，有 $\mu_n(A)\geqslant 0$；　(1.2.2)

(2) 规范性：若 Ω 是必然事件，则 $\mu_n(\Omega)=1$；　(1.2.3)

(3) 可加性:对任意 m 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$,有

$$\mu_n\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\mu_n(A_i) \tag{1.2.4}$$

1.2.2 概率的统计定义

定义 1.2.2 在相同的条件下,重复进行 n 次试验,事件 A 发生的频率稳定地在某一确定的常数 a 附近摆动,且一般说来,n 越大,摆动的幅度越小.则称常数 a 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$.

一个事件发生的频率与试验次数 n 有关,而一个事件发生的概率却是与试验次数 n 无关的,它完全由事件本身决定,是先于试验而客观存在的.因此,频率与概率是两个完全不同的概念.

1.2.3 概率的公理化定义

在实际中,我们不可能对每一个事件都做大量的试验,然后利用事件发生的频率来表征事件发生的可能性的大小.同时,为了理论研究的需要,我们必须给概率一个更明确的定义.受频率的稳定性和频率的性质的启发,下面给出事件概率的公理化定义.

定义 1.2.3 设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间.对于随机试验 E 的每一个随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,称此实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率,如果实数 $P(\cdot)$ 满足下列三条公理.

公理 1 对任意事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$.　(1.2.5)

公理 2 $P(\Omega)=1$.　(1.2.6)

公理 3 对于任意可列个两两不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.2.7}$$

从概率的公理化定义我们可以看到,概率公理化定义并没有考虑每一个事件 A 对应的概率 $P(A)$ 是怎样确定的,值为多大(这依赖于每一个具体实际问题的结构),而是要求实数 $P(\cdot)$ 应满足一些必要的条件,这些条件被总结为一些公理,这些公理是对概率的现实直观进行的抽象.

1.2.4 概率的性质

从概率的公理化定义出发,可以推导出概率的许多性质,这些性质有助于我们进一步理解概率的概念,同时,它们也是概率计算的重要基础.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.　(1.2.8)

证明 令 $A_i=\varnothing(i=1,2,\cdots)$,则 $\sum_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$.由公理 3 知

$$P(\varnothing)=P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

由公理 1 知 $P(\varnothing)\geqslant 0$,故必有 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.2.9}$$

证明　令 $A_i=\varnothing(i=n+1,n+2,\cdots)$，由公理 3 及性质 1 即可导出.

下面各性质的证明留给读者作为练习.

性质 3　对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1.2.10}$$

性质 4　设 A,B 是两个随机事件，则

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB) \tag{1.2.11}$$

特别地，若 $A\supset B$，则有

(1) $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

(2) $P(A)\geqslant P(B)$.

性质 5　对于任一事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1.2.12}$$

性质 6（广义加法公式）　对于任意两个随机事件 A,B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2.13}$$

性质 7（次可加性）　对于任意两个随机事件 A,B，有

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B) \tag{1.2.14}$$

性质 6 和性质 7 可推广到任意有限个事件的情形. 即对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

且

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.2.16}$$

特别地，对于三个事件 A,B,C，有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

且

$$P(A+B+C)\leqslant P(A)+P(B)+P(C)$$

例 1.2.1　已知 $P(\overline{A})=0.5$，$P(\overline{A}B)=0.1$，$P(B)=0.4$，求 (1) $P(AB)$；(2) $P(A\overline{B})$；(3) $P(\overline{A}\overline{B})$.

解　(1) $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.1=0.3$；

(2) $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.3=0.2$；

(3) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}-B)=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=0.5-0.1=0.4$.

例 1.2.2　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解　因 $ABC\subset AB$，故 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，从而 $P(ABC)=0$，于是，A,B,C 至少有一个发生的概率为

$$\begin{aligned}P(A+B+C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

例 1.2.3　对某班的学生进行期中测验，测得有 70% 的学生数学成绩得优，有 75% 的学

生语文成绩得优，有 80％的学生英语成绩得优，有 85％的学生政治成绩得优，试证明该班至少有 10％的学生四门课程全部得优.

解 设 A 表示事件"数学成绩得优的学生"，B 表示事件"语文成绩得优的学生"，C 表示事件"英语成绩得优的学生"，D 表示事件"政治成绩得优的学生". 则

$$P(A)=0.7,\quad P(B)=0.75,\quad P(C)=0.8,\quad P(D)=0.85$$

$$\begin{aligned}P(ABCD)&=1-P(\overline{ABCD})=1-P(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})\\&\geqslant 1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})+P(\bar{C})+P(\bar{D})]\\&=1-(0.3+0.25+0.2+0.15)=0.1\end{aligned}$$

即该班至少有 10％的学生四门课程全部得优.

1.3 古典概型与几何概型

1.3.1 古典概型

概率的统计定义和概率的公理化定义并没有给出随机事件概率大小的确定方法，要计算一个随机事件发生的概率大小，应根据具体的随机试验的形式和结构而定. 随机试验的形式是多种多样的，本节介绍两类特殊情形，首先介绍古典概型，它是一类最简单的概率模型，曾经是概率论发展早期的主要研究对象，这也是它被称为"古典概型"的原因.

古典概型是指满足下列两个条件的概率模型：

(1) 随机试验只有有限个基本事件；

(2) 每一个基本事件发生的可能性相同，即各基本事件发生的概率相同.

对一个随机试验 E 来说，以上两个条件在数学上可表述为：

(1) 样本空间有限，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) $P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_n\}$.

根据概率的公理化定义知

$$1=P(\Omega)=P\left(\sum_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\right)=\sum_{i=1}^{n}P(\omega_i)=nP(\omega_i)$$

所以

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

若事件 A 包含 m 个样本点，分别为 $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}$，即

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}=\sum_{k=1}^{m}\{\omega_{i_k}\}$$

由概率的有限可加性得

$$P(A)=\sum_{k=1}^{m}P(\omega_{i_k})=\frac{m}{n}$$

即

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中包含的基本事件数}}\tag{1.3.1}$$

这就是古典概型中随机事件概率的计算公式. 容易验证上述公式定义的古典概型满足定义 1.2.3 中的三条公理.