高等学校工科数学系列教材

# 高等数学

华东六省工科数学系列教材编委会 主编

（下册）

辽宁科学技术出版社

高等学校工科数学系列教材

# 高等数学

## 下册

华东六省工科数学系列教材编委会　主编

辽宁科学技术出版社

# 高等数学

# Gaodeng Shuxue

## 下　　册

华东六省工科数学系列教材编委会　主编

辽宁科学技术出版社出版发行(沈阳市南京街6段1里2号)
朝阳新华印刷厂分厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：$16^5/_8$字数：370,000
1991年1月第1版　　　　1991年1月第1次印刷

责任编辑：符　宁　　　　责任校对：李秀芝
封面设计：曹太文

印数：1-14.625

ISBN 7-5381-0983-8/O·50　　定价：6.65元

# 目　录

# 第九章　向量运算和空间解析几何

向量是数学、物理、力学以及工程技术的一种重要数学工具. 本章先介绍向量概念以及向量的某些运算；然后讲述空间解析几何. 空间解析几何是通过空间坐标系，用代数方法来研究空间几何问题的，其主要内容是讨论空间的平面和直线，介绍一些常见的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的一些基本问题. 这些方程的建立和问题的解决是以向量作为工具的.

正象平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识是学习多元函数微积分所必需的.

## 第一节　向量及其线性运算

### 一、向量概念

在力学、物理学以及其它应用科学中，常遇到两类量，一类是只有大小没有方向的量，如时间、距离、质量、体积、面积等，这一类量叫做数量（也称为标量）。另一类是不但有大小而且还有方向的量，如力、位移、速度、加速度等，称这一类量为向量（也称矢量）.

在几何上，可用空间的一条有方向的线段（即有向线

段）来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以$M_1$为始点、$M_2$为终点的有向线段所表示的向量，记为$\overrightarrow{M_1M_2}$（图 9 —1）．有时也用一个粗体字母或用一个上面加箭头的字母来表示向量，例如向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或$\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$等等．

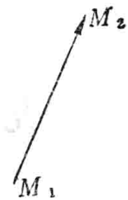


图 9—1

向量的大小叫做向量的模或长度．向量$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$的模依次记作$|\overrightarrow{M_1M_2}|$．$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$．模等于1的向量叫做单位向量．

如果向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的方向相同、模相等，就称这两个向量相等，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

根据这个规定，一个向量和它经过平行移动以后所得的向量是相等的．以后我们所讨论的向量，只考虑它的大小和方向，因此用有向线段表示向量时，起点位置可以任意取，这种向量也称作自由向量．若向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的长度相等，方向相反，就用$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$表示．方向相同或相反的向量叫做平行向量（平行向量也叫做共线向量），平行向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$一般表示为$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$．

## 二、向量的线性运算

### 1．向量的加法

根据力学中关于力的合成法则，我们规定两个向量的运算法则如下：

取定一点$O$，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为边作平行四边形$OACB$

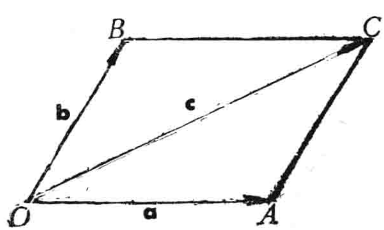


图 9—2

（图 9 — 2），其对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

这种求和的法则叫做向量加法的平行四边形法则.

如果两向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$共线，那末规定它们的和是这样一个向量：当 $\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{OB}$的方向相同时，和向量的方向与原来两向量的方向相同，其模等于两向量的模的和；当 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的方向相反时，和向量的方向与模较大的向量的方向相同，而模等于两向量模的差.

由于平行四边形的对边平行且相等，所以从图9— 2 可以看出，也可以这样作出两向量的和：作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点$A$为起点作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接$OC$，就得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，这种求两个向量和的法则叫做向量加法的三角形法则.

三角形法则还可以推广到求任意有限个向量的和. 只需将前一个向量的终点作为后一个向量的起点，相继作出向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，然后从第一个向量的起点向最后一个向量的终点引一向量，此向量即为这 $n$个向量的和，如图 9 — 3 所示，$\overrightarrow{OD}$ 就是四个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 的和，即

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$$

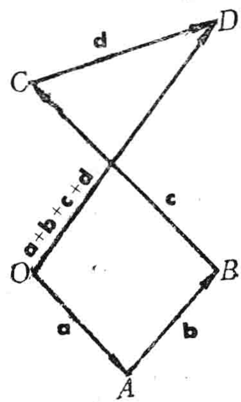



图 9—3

在向量中，我们把模等于零的向量叫做零向量，记作

0．从几何上看，零向量就是起点与终点重合的向量．零向量没有确定的方向，或者说它的方向是任意的，所以零向量可看作与任何向量共线．对任一向量$\boldsymbol{a}$，与$\boldsymbol{a}$的模相同而方向相反的向量叫做$\boldsymbol{a}$的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$（图９—４），则

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$$

$$\boldsymbol{a}+0=0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

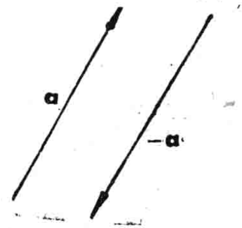
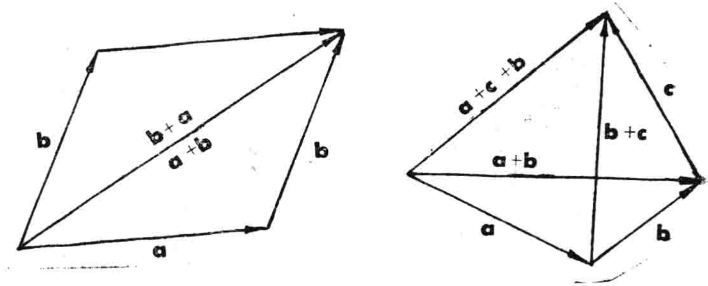



图 9—4

向量的加法符合交换律和结合律：

（１）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+$

（２）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$这两个规律从图９—５（$a$）、（$b$）中很容易得知．




(a)　　(b)

图 9—5

２．向量的减法

我们规定两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

显然　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$

由三角形法则可以看出：要从$\boldsymbol{a}$减去$\boldsymbol{b}$，只要把$-\boldsymbol{b}$加到向量$\boldsymbol{a}$上去即可（图9—6）.

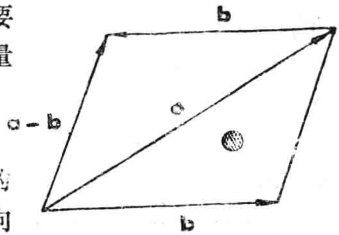


图 9—6

3．向量与数量的乘积

设$\lambda$是一实数，向量$\boldsymbol{a}$与$\lambda$的乘积规定是这样一个向量，该向量的模

$$|\lambda \boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$$

当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$一致；$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$相反（图9—7）；当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$是零向量，即$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

特别当$\lambda=-1$时，我们得到$(-1)\boldsymbol{a}$，它的模与$\boldsymbol{a}$的模相等而方向与$\boldsymbol{a}$的方向相反，所以有

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

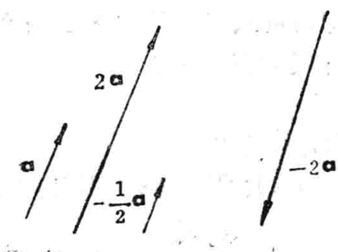


图 9—7

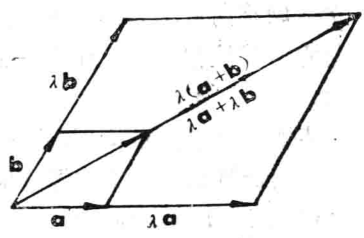


图 9—8

即它是$\boldsymbol{a}$的负向量.

向量与数量的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

（2）分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

（3）分配律　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

（1）、（2）的正确性可由数量与向量乘积的定义直接得出，（3）可由三角形的相似比得出（图9—8是$\lambda>0$

的情况）．

向量的加、减法和向量与数量乘积统称为向量的线性运算．

我们已经知道，方向相同或相反的向量称为平行向量或共线向量．根据向量与数量乘积的规定，向量$\boldsymbol{a}$与向量$\lambda\boldsymbol{a}$必共线，而共线的两个向量中的一个必定可以表示为某个常数与另一个向量的乘积，因此，两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共线的充要条件是

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a} \qquad （\lambda\text{为数量}）$$

若令$\lambda=-\dfrac{K}{L}$（$L\neq0$）则有

$$K\boldsymbol{a}+L\boldsymbol{b}=0$$

在一般情形下，若有不同时为零的两个数$K$、$L$，使上式成立，则称向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$线性相关，即向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共线的充要条件是它们线性相关．对任意向量$\boldsymbol{a}$和零向量，总有

$$0\cdot\boldsymbol{a}+1\cdot0=0$$

这表明，任意向量$\boldsymbol{a}$和零向量0总是线性相关．

由此推出，两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线的充要条件是：当且仅当$K=L=0$时，才有

$$K\boldsymbol{a}+L\boldsymbol{b}=0$$

这时称向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$线性无关．

如果一组向量都与一个平面平行，则称它们是共面的，这些向量叫做共面向量，换句话说，平行于同一平面的向量叫共面向量．可以证明三个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面的充要条件是存在不全为零的数$L$、$m$、$n$使

$$L\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}=0$$

这时称向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$线性相关，否则$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$线性无关，即

$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$不共面.

根据向量和数量乘积的规定，还可以得出如下结论：

设$\boldsymbol{a}^{\circ}$表示与非零向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量，那么

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$$

上式两端乘以数量$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，并把$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$写成$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，则有

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

通常也说，向量$\boldsymbol{a}$“除以”它的模$|\boldsymbol{a}|$得到与$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量$\boldsymbol{a}^{\circ}$.

**例1** 已知△$ABC$，求证：

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=0$$

**解** 如图9—9，在△$ABC$内

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$$

又 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

所以

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=0$$

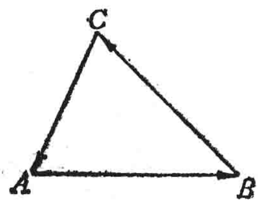



图 9—9

**例2** 已知两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，用几何法和代数法分别求出向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$(-\boldsymbol{a})$的和.

**解** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$

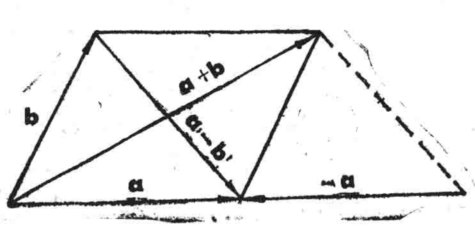



图 9—10