

高等学校工科数学系列教材

高等数学

华东六省工科数学系列教材编委会 主编

(下册)



辽宁科学技术出版社

高等学校工科数学系列教材

高等数学

下 册

华东六省工科数学系列教材编委会 主编

辽宁科学技术出版社

高等数学

Gaodeng Shuxue

下 册

华东六省工科数学系列教材编委会 主编

辽宁科学技术出版社出版发行(沈阳市南京街8段1里2号)

朝阳新华印刷厂分厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: $16\frac{5}{8}$ 字数: 370,000

1991年1月第1版

1991年1月第1次印刷

责任编辑: 符 宁

责任校对: 李秀芝

封面设计: 曹太文

印数: 1-14,625

ISBN 7-5381-0983-8/O·50 定价: 6.65元

目 录

第九章 向量运算和空间解析几何	1
第一节 向量及其线性运算	1
一、向量概念	1
二、向量的线性运算	2
三、向量在轴上的投影	8
第二节 空间直角坐标系及向量的坐标	13
一、空间直角坐标系	13
二、向量的坐标表达式	15
三、向量的模及方向余弦	19
第三节 数量积 向量积 混合积	25
一、两向量的数量积	25
二、两向量的向量积	31
三、向量的混合积	35
第四节 平面及其方程	41
一、平面的点法式方程	41
二、平面的一般方程	44
三、两平面的夹角	48
四、平面图形的投影面积	52
第五节 空间直线及其方程	54
一、直线的点向式及参数式方程	54
二、直线的一般方程	57
三、两直线的夹角	59

四、直线与平面的夹角	61
第六节 曲面及其方程	69
一、曲面方程的概念	69
二、旋转曲面	72
三、柱面	74
四、曲面的参数方程	77
第七节 空间曲线及其方程	81
一、空间曲线的一般方程	81
二、空间曲线的参数方程	83
三、空间曲线在坐标面上的投影	86
第八节 二次曲面	91
一、椭球面	91
二、双曲面	93
三、抛物面	95
第九节 空间中的几个坐标系	99
一、球面坐标系	99
二、柱面坐标系	100
*三、广义球面坐标系	101
*四、广义柱面坐标系	102
第十节 向量函数	103
一、向量函数的极限和连续性	104
二、向量函数的微分法	105
三、向量函数的积分法	109
第十一节 n维欧氏空间简介	111
第十章 多元函数微分学	115
第一节 多元函数概念	115
一、预备知识	115
二、多元函数概念	127

第二节 多元函数的极限与连续性	133
一、多元函数的极限	134
二、多元函数的连续性	138
第三节 偏导数	141
一、偏导数的定义	141
二、偏导数的几何意义	145
三、高阶偏导数	147
第四节 全微分及其在近似计算中的应用	153
一、全微分的定义	153
二、函数可微与可导的关系	157
三、全微分的向量或矩阵表示法、偏导数向量算子	162
四、全微分在近似计算中的应用	165
第五节 多元复合函数的求导法则	168
一、复合函数微分法——链式法则	168
二、全微分形式不变性	178
*三、二元函数的泰勒公式	182
第六节 隐函数的微分法	187
一、由一个方程所确定的隐函数的微分法	187
二、由方程组所确定的隐函数的微分法	191
*第七节 曲线坐标	195
一、曲线坐标的概念	195
二、曲线坐标的拉梅系数	197
第八节 数量场的方向导数与梯度	199
一、数量场的方向导数	199
二、数量场的梯度	202
三、数量场梯度的几何意义	204
第九节 多元函数极值及其求法	208
一、极值	208

二、闭区域上连续函数的最大值和最小值	216
三、条件极值 拉格朗日乘数法	218
第十一章 重积分	224
第一节 重积分的概念和性质	224
一、几何与物理中的两个问题	224
二、重积分的定义	228
三、重积分的存在定理	231
四、重积分的性质	231
第二节 二重积分的计算法	235
一、用直角坐标计算二重积分	235
二、用极坐标计算二重积分	247
*三、二重积分的换元法	255
第三节 三重积分的计算法	266
一、用直角坐标计算三重积分	266
二、用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	272
*三、三重积分的换元法	276
*第四节 广义重积分	280
一、无界区域上的广义二重积分	281
二、无界函数的广义二重积分	285
第五节 重积分的应用	290
一、体积计算	290
二、计算曲面面积	292
三、质量、重心和转动惯量	295
*第六节 含参变量的积分	303
一、定限含参变量的积分	303
二、变限含参变量的积分	307
第十二章 曲线积分 曲面积分 场论初步	314
第一节 第一类曲线积分	314

一、沿曲线分布的质量与第一类曲线积分	314
二、第一类曲线积分的计算	316
第二节 第二类曲线积分	321
一、力场做功与第二类曲线积分	321
二、第二类曲线积分的性质	324
三、第二类曲线积分的计算	324
第三节 格林公式	331
第四节 平面上曲线积分与路经无关的条件	336
第五节 全微分准则 原函数	345
第六节 第一类曲面积分	349
第七节 第二类曲面积分	354
一、通量与第二类曲面积分	354
二、第二类曲面积分的性质	357
三、第二类曲面积分的计算	358
第八节 散度与高斯公式	362
一、散度的概念	362
二、散度的直角坐标表示	364
三、高斯公式	368
第九节 旋度 斯托克斯公式	372
一、环量 环量面密度	372
二、旋度	374
三、斯托克斯公式	374
四、旋度的计算公式	377
十三章 无穷级数	382
第一节 数项级数的概念和性质	382
一、数项级数的概念	382
二、数项级数的性质	386
三、柯西收敛原理	391

第二节 数项级数的审敛法	394
一、正项级数审敛法	394
二、交错级数及其审敛法	402
三、绝对收敛与条件收敛	404
第三节 广义积分的审敛法、 Γ -函数	411
一、广义积分的审敛法	411
二、 Γ -函数	416
第四节 幂级数	419
一、函数项级数的一般概念	419
*二、函数项级数的一致收敛性	420
三、幂级数及其收敛性	425
四、幂级数的运算	430
第五节 函数展开成幂级数	437
一、泰勒级数	437
二、函数展开成幂级数	440
第六节 函数的幂级数展开式的应用	451
一、近似计算	451
二、欧拉公式	456
第七节 傅立叶(Fourier)级数	459
一、三角函数系的正交性	460
二、傅立叶系数	461
三、傅立叶级数的收敛性	463
第八节 正弦级数和余弦级数	472
一、奇函数和偶函数的傅立叶级数	472
二、函数展开成正弦级数和余弦级数	474
第九节 以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数	477
第十四章 微分方程(二)	433
第一节 全微分方程	433

一、全微分方程	483
二、积分因子	486
第二节 可降阶的二阶微分方程	488
一、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	488
二、 $y''=f(y, y')$ 型微分方程	491
第三节 二阶线性非齐次微分方程求解的常数变易法	493
第四节 欧拉方程	498
第五节 微分方程的幂级数解法	501
一、一阶微分方程定解(柯西)问题的幂级数解法	501
二、二阶线性微分方程的幂级数解法	503
第六节 常系数线性微分方程组	510
一、常系数线性微分方程组的初步知识	511
二、常系数线性齐次微分方程组解法举例	513
三、常系数线性非齐次方程组的解法举例	516

第九章 向量运算和空间解析几何

向量是数学、物理、力学以及工程技术的一种重要数学工具。本章先介绍向量概念以及向量的某些运算；然后讲述空间解析几何。空间解析几何是通过空间坐标系，用代数方法来研究空间几何问题的，其主要内容是讨论空间的平面和直线，介绍一些常见的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的一些基本问题。这些方程的建立和问题的解决是以向量作为工具的。

正象平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识是学习多元函数微积分所必需的。

第一节 向量及其线性运算

一、向量概念

在力学、物理学以及其它应用科学中，常遇到两类量，一类是只有大小没有方向的量，如时间、距离、质量、体积、面积等，这一类量叫做数量（也称为标量）。另一类是不但有大小而且还有方向的量，如力、位移、速度、加速度等，称这一类量为向量（也称矢量）。

在几何上，可用空间的一条有方向的线段（即有向线

段)来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 M_1 为始点、 M_2 为终点的有向线段所表示的向量,记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (图9-1).有时也用一个粗体字母或用一个上面加箭头的字母来表示向量,例如向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{F}$ 或 $\vec{a}$ 、 $\vec{i}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{F}$ 等等.



向量的大小叫做向量的模或长度.向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 $\mathbf{a}$ 、 $\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 、 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\vec{a}|$.模等于1的向量叫做单位向量.

如果向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 的方向相同、模相等,就称这两个向量相等,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

根据这个规定,一个向量和它经过平行移动以后所得的向量是相等的.以后我们所讨论的向量,只考虑它的大小和方向,因此用有向线段表示向量时,起点位置可以任意取,这种向量也称作自由向量.若向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 的长度相等,方向相反,就用 $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ 或 $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ 表示.方向相同或相反的向量叫做平行向量(平行向量也叫做共线向量),平行向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 一般表示为 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

根据力学中关于力的合成法则,我们规定两个向量的运算法则如下:

取定一点 O ,作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$,以 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 为边作平行四边形 $OACB$

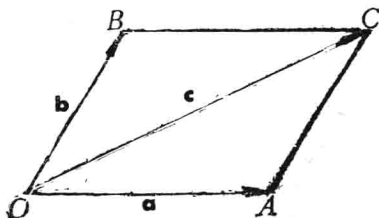


图 9-2

(图 9—2)，其对角线向量 $\overrightarrow{OC} \doteq \mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和，记作

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

这种求和的法则叫做向量加法的平行四边形法则。

如果两向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ 与 $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ 共线，那末规定它们的和是这样一个向量：当 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的方向相同时，和向量的方向与原来两向量的方向相同，其模等于两向量的模的和；当 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的方向相反时，和向量的方向与模较大的向量的方向相同，而模等于两向量模的差。

由于平行四边形的对边平行且相等，所以从图 9—2 可以看出，也可以这样作出两向量的和：作向量 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ，以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 为起点作 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ ，连接 OC ，就得 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ ，这种求两个向量和的法则叫做向量加法的三角形法则。

三角形法则还可以推广到求任意有限个向量的和。只需将前一个向量的终点作为后一个向量的起点，相继作出向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ，然后从第一个向量的起点向最后一个向量的终点引一向量，此向量即为这 n 个向量的和，如图 9—3 所示， $\overrightarrow{OD}$ 就是四个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 的和，即

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \\ &\quad + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} \end{aligned}$$

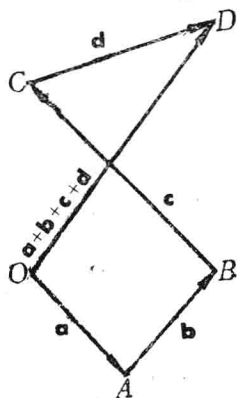


图 9—3

在向量中，我们把模等于零的向量叫做零向量，记作

0. 从几何上看，零向量就是起点与终点重合的向量。零向量没有确定的方向，或者说它的方向是任意的，所以零向量可看作与任何向量共线。对任一向量 a ，与 a 的模相同而方向相反的向量叫做 a 的负向量，记作 $-a$ （图 9—4），则

$$a + (-a) = 0$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

向量的加法符合交换律和结合律：

(1) 交换律： $a + b = b + a$

(2) 结合律： $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ 这两个规律从图 9—5 (a)、(b) 中很容易得知。

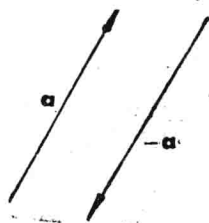
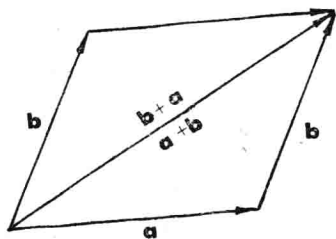
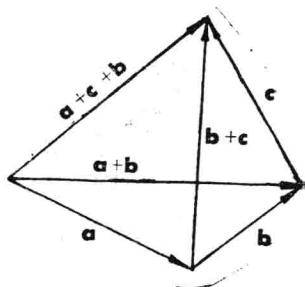


图 9—4



(a)



(b)

图 9—5

2. 向量的减法

我们规定两个向量 a 与 b 的差：

$$a - b = a + (-b)$$

显然 $a - a = a + (-a) = 0$

由三角形法则可以看出：要从 $\mathbf{a}$ 减去 $\mathbf{b}$ ，只要把 $-\mathbf{b}$ 加到向量 $\mathbf{a}$ 上去即可（图 9—6）。

3. 向量与数量的乘积

设 λ 是一实数，向量 $\mathbf{a}$ 与 λ 的乘积规定是这样：一个向量，该向量的模

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$$

当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda \mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 一致； $\lambda < 0$ 时， $\lambda \mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 相反（图 9—7）；当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda \mathbf{a}$ 是零向量，即 $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ 。

特别当 $\lambda = -1$ 时，我们得到 $(-1)\mathbf{a}$ ，它的模与 $\mathbf{a}$ 的模相等而方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相反，所以有

$$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

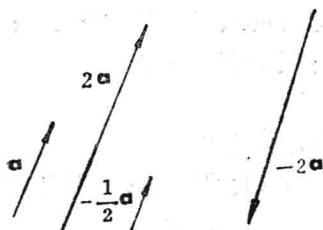


图 9—7

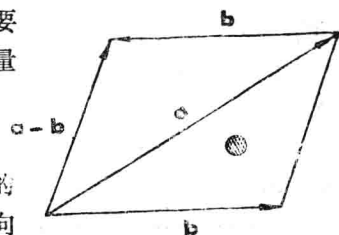


图 9—6

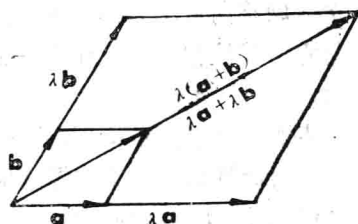


图 9—8

即它是 $\mathbf{a}$ 的负向量。

向量与数量的乘积符合下列运算规律：

(1) 结合律 $\lambda(\mu \mathbf{a}) = \mu(\lambda \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}$

(2) 分配律 $(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$

(3) 分配律 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$

(1)、(2)的正确性可由数量与向量乘积的定义直接得出，(3)可由三角形的相似比得出（图 9—8 是 $\lambda > 0$ ）

的情况)。

向量的加、减法和向量与数量乘积统称为向量的线性运算。

我们已经知道，方向相同或相反的向量称为平行向量或共线向量。根据向量与数量乘积的规定，向量 α 与向量 $\lambda\alpha$ 必共线，而共线的两个向量中的一个必定可以表示为某个常数与另一个向量的乘积，因此，两个非零向量 α 、 b 共线的充要条件是

$$b = \lambda\alpha \quad (\lambda \text{ 为数量})$$

若令 $\lambda = -\frac{K}{L}$ ($L \neq 0$) 则有

$$K\alpha + Lb = 0$$

在一般情形下，若有不同时为零的两个数 K 、 L ，使上式成立，则称向量 α 、 b 线性相关，即向量 α 、 b 共线的充要条件是它们线性相关。对任意向量 α 和零向量，总有

$$0 \cdot \alpha + 1 \cdot 0 = 0$$

这表明，任意向量 α 和零向量 0 总是线性相关。

由此推出，两个非零向量 α 、 b 不共线的充要条件是：当且仅当 $K=L=0$ 时，才有

$$K\alpha + Lb = 0$$

这时称向量 α 和 b 线性无关。

如果一组向量都与一个平面平行，则称它们是共面的，这些向量叫做共面向量，换句话说，平行于同一平面的向量叫共面向量。可以证明三个非零向量 α 、 b 、 c 共面的充要条件是存在不全为零的数 L 、 m 、 n 使

$$L\alpha + mb + nc = 0$$

这时称向量 α 、 b 、 c 线性相关，否则 α 、 b 、 c 线性无关，即

a 、 b 、 c 不共面.

根据向量和数量乘积的规定, 还可以得出如下结论:

设 a° 表示与非零向量 a 同方向的单位向量, 那么

$$a = |a| a^\circ$$

上式两端乘以数量 $\frac{1}{|a|}$, 并把 $\frac{1}{|a|}a$ 写成 $\frac{a}{|a|}$, 则有

$$a^\circ = \frac{a}{|a|}$$

通常也说, 向量 a “除以”它的模 $|a|$ 得到与 a 同方向的单位向量 a° .

例1 已知 $\triangle ABC$, 求证:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 0$$

解 如图 9—9, 在 $\triangle ABC$ 内

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

所以

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = 0 \end{aligned}$$

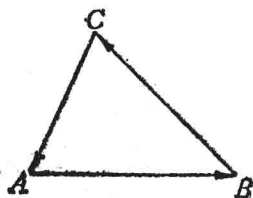


图 9—9

例2 已知两个向量 a 和 b , 用几何法和代数法分别求出向量 $a+b$, $a-b$ 与 $(-a)$ 的和.

$$\text{解 } (a+b) + (a-b) + (-a) = a$$

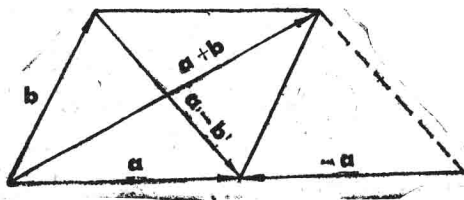


图 9—10