核心问题

——小学数学教学中的

学科教学核心问题研讨丛书

基本概念与运算法则

史宁中 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

——小学数学教学中的核心问题

—Xiaoxue Shuxue Jiaoxue zhong de Hexin Wenti

学科教学核心问题研讨丛书

基本概念与运算法则

Jiben Gainian yu Yunsuan Faze

史宁中　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书主要讲述小学数学教学内容中的一些核心问题，在理解内容的基础上，探讨实现“四基”课程目标、适合小学生认知规律的教学方法。“问题篇”包括30个问题，大部分问题来自数学教育工作者和教学一线的数学教师，本书尝试以回答问题的方式进行讲述，希望读者能够通过对这些问题的理解把握小学数学的核心。“话题篇”设定了30个话题，拓展对教学核心问题的理解。“案例篇”呈现了20个教学设计，供教师在设计自己的教学活动时参考。

小学数学所涉及的内容都是最基础的、最本质的。因此，本书的内容不仅适用于小学数学教师，对于中学数学教师、学生家长甚至对大学生和大学教师都有参考价值。本书还可作为校本研修的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

基本概念与运算法则：小学数学教学中的核心问题 / 史宁中主编. --北京：高等教育出版社，2013.5

ISBN 978-7-04-037069-0

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①史… Ⅲ. ①小学数学课-教学研究 Ⅳ. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 053940 号

策划编辑 王文颖　责任编辑 王文颖　封面设计 张志奇　版式设计 王 莹
插图绘制 尹文军　责任校对 刘娟娟　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市文林印务有限公司
开　　本 787 mm × 960 mm　1/16
印　　张 15.5
字　　数 230 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2013年5月第1版
印　　次 2013年5月第1次印刷
定　　价 28.00元

物 料 号 37069-00

前　言

自从1998年我担任东北师范大学校长以后，开始关注基础教育，但关注的是一般性的问题，并没有深入到学科内部。2005年，接受教育部的委托，我担任了义务教育数学课程标准修订组的组长，才开始真正思考数学教育。思考课程标准应当规定哪些教学内容，为什么要规定这些内容，这些内容的教育价值是什么？思考数学的本质是什么，应当如何在教学中体现这些本质？进一步，开始思考数学教育的本质，为了学生一生的发展，在义务教育阶段应当实施一种什么样的数学教育？培养创新型人才的关键是什么，应当通过什么样的教学活动进行培养？

思考的结果，促使我在传统“双基”的课程目标即基础知识和基本技能上，增加了数学的基本思想和基本活动经验，形成了“四基”的课程目标。与传统“双基”的课程目标不同，基本思想和基本活动经验是一种隐性的东西，恰恰是这种隐性的东西体现了数学素养。我确信：数学素养的培养、特别是创新人才的培养，是“悟”出来的而不是“教”出来的，因为数学的结果是“看”出来的而不是“证”出来的。可以想象，会“悟”会“看”的底蕴是把握数学思想，会“悟”会“看”的教育是一种经验的积累（包括思维的经验和实践的经验），需要受教育者本人的思考与实践，因此，受教育者本人参与其中的教育教学活动是至关重要的，是“教”与“学”的统一体。

令人欣慰的是，“四基”的提出得到义务教育数学课程标准修订组成员的一致支持，后来又得到数学家、数学教育专家、教研员以及活跃在教学第一线教师的广泛支持。这样的支持促使我更加深入地思考：数学基本思想是什么？为此，我给出了一个判定数学基本思想的准则，这个准则包含两条：一是数学的产生和发展所必须依赖的那些思想；二是学习过数学的人与没有学习过数学的人的思维差异。这样，就把数学思想归纳为三方面的内容，可以用六个字表达：抽象、推理、模型。

恰逢中国的基础教育要实现从“能上学”到“上好学”的转变，这

个转变的核心是：实现教育公平，提高教学质量；实现这个转变的基础是：提高全体教师的教育教学水平。于是在我国，由政府主导的大规模的中小学教师培训开始了，培训内容是全方位的，既涉及教育理念，又涉及教学方法，还涉及教师的专业标准。因此，在这个培训过程中，修订后的课程标准的解读与实施就自然而然地成为重要内容。在培训的过程中，我收到了许多问题：有来自培训者的，也有直接来自学员的；有教育理念的，也有教学内容的。在回答问题的同时，我深切地感悟到基础教育阶段的数学教育应当有所变化，而变化的依据就是“四基”。

比如小学数学。小学阶段所涉及的数学内容几乎都是常识性的，只要记住一些法则就会计算；此外，小学生的抽象能力特别是演绎推理能力尚未养成，不应当、也不可能过多地讲授数学道理。或许就是这些原因，在我国长期以来形成了基于“双基”的数学教学，不仅影响到小学，而且影响到整个基础教育。这种教学的目标是：基础知识（主要是概念和法则的记忆）扎实，基本技能（主要是计算和证明的能力）熟练。适于这种教学目标的主要教学形式是：教师讲授概念和法则，学生通过大量反复的练习，达到记忆扎实、熟能生巧；对应于这种教学目标的考试是：概念的记忆与理解，计算的准确与速度。显然，对于这样的考试而言，上面所说的教学形式是合适的，效果也是明显的。简而言之，就短期行为而言，上面所说的教学方法是简便有效的。但是，这样的教学形式不利于培养学生的数学素养，不利于让学生感悟数学的思想，不利于帮助学生积累思维的和实践的经验，更不利于培养学生的创新意识和创新思维。因此，这样的教学形式将无法实现基于“四基”的课程目标。

基于“四基”的课程目标对中小学数学教师提出了更高的要求，除了传统的“双基”之外，还要求教师：能够把握教学内容的数学实质，并且能够设计出符合学生认知规律的教学过程让学生感悟这些实质；引发学生思考问题，并且帮助学生养成良好的独立思考的习惯；引导学生能够正确地思维与实践，并且帮助学生积累思维的和实践的经验。众所周知，在同样条件下，一个人的事业成功与否，并不仅仅取决于这个人掌握多少知识，更取决于这个人的思维方法。因此，为了实现新的课程目标就必须改变传统的教育理念和教学方法。

这本书的写作目的就是讲述小学数学教学内容的实质，探讨能够实现“四基”课程目标、适合小学生认知规律的表达方式和教学方法。为了讲

述得更加直接，这本书尝试以回答问题的方式来讲述这些内容，其中大部分问题来自数学教育工作者和教学一线的数学教师。“问题篇”中一共30个问题，希望小学数学教师通过对这30个问题的理解就能够把握小学数学的核心，增强数学教学的信心。作为数学知识的拓展以及数学知识产生的历史背景，“话题篇”设定了30个话题，了解这些话题的内容对于数学教学是有益的。在问题和话题中，都没有直接涉及“综合与实践”的课程，因为我们讨论的问题针对的都是数学内容。即便如此，在问题和话题的讨论过程中多处特别提到，有些内容可以在“综合与实践”的课程中实现，这些想法还体现在“案例篇”相关内容的教学设计之中。

为了启发教师思考如何把“问题”所涉及的内容落实到具体的教学活动中，东北师范大学教育科学学部的马云鹏教授组织了长春市的几位优秀小学教师，编写了部分问题的教学设计。这些教师有着丰富的教学经验和饱满的工作热情。我多次参加他们的研讨会，商定了教学片段的编写原则和编写体例，并且对他们编写的每一个教学设计都进行了认真的修改，这些内容构成了“案例篇”中的20个教学设计。需要说明的是，这些教学设计是为了说明“问题”内容的教学实现，而不是为了具体的教学活动，因此，所设计的内容含量与教学时间无关，只是供教师在设计自己的教学活动时参考。

小学数学所涉及的内容，无论是基本概念（比如自然数、负数、有理数、点线面角等）还是基本法则（比如四则运算、交换律、分配率、全等、距离等）都是最基础的、最本质的，要把这些本质的东西讲述清楚往往是比较困难的，因此，这本书的内容对于中学数学教师、甚至对大学生和大学教师都有参考价值。马云鹏教授与他的团队，曾经用一个学期的时间，为东北师范大学教育学部小学教育本科专业三年级的学生开设了这门课，讲授了这本书的主要内容，反映很好。我曾经以解答问题的方式与这些学生讨论了一堂课，感觉到这些学生对数学内容的理解比过去深刻了，对教学内容的思考比过去深入了，对教学方法的探讨也更加本质了。

我没有小学数学的教学经验，也没有系统地研究过课程论和教学方法，因此，这本书的内容述说可能并不完全符合实际，特别是关于如何实施教学的那些内容。但是我相信，数学教育工作者、活跃在教学第一

线的教研员和广大的教师有着无限的创造力，只要理解了这本书所述说的内容和理念，就一定能够创造出生动活泼、行之有效的教学方案和教学方法。

史宁中

2013年3月

目录

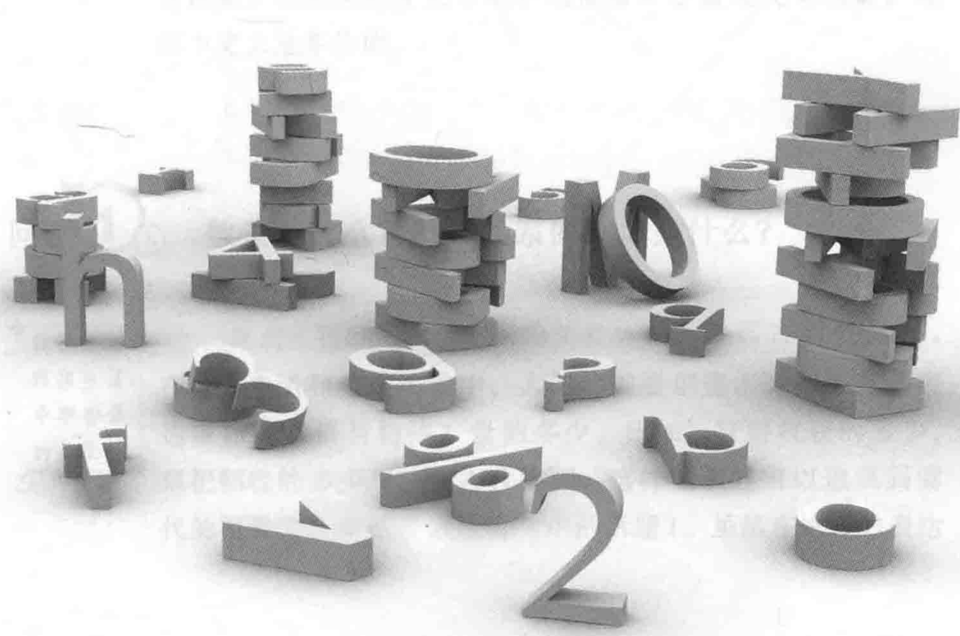
问题篇

话 题 篇

案例篇

问 题 篇

30个问题，引发对教学核心问题的思考



第一部分　数的认识

数是对数量的抽象，因此在认识数之前，首先要认识数量。但是，无论是认识数量还是认识数都不是数学的本质，数学的本质是：在认识数量的同时认识数量之间的关系，在认识数的同时认识数之间的关系。数量之间最基本的关系是多与少，与此对应，数之间最基本的关系是大与小。从零开始，依据数之间的大小关系就产生了自然数，表示自然数的关键在于十个符号和数位。

为了减法运算的需要，人们把自然数集合扩充到整数集合；为了除法运算的需要，人们把整数集合扩充到有理数集合。减法运算和除法运算都是逆运算，因此，逆运算是数集合扩充的原因，详细讨论参见第二部分：数的运算。

虽然可以把分数看作除法运算，但分数更重要的还是数，人们用这种数表示自然数之间的两种重要关系：一种是整体与等分的关系，一种是整数比例关系。最初人们用分数定义有理数，后来又用有限小数和无限循环小数定义有理数，这两个定义是等价的。

问题1　数量是什么？数量关系的本质是什么？

数量是对现实生活中事物量的抽象

数量是对现实生活中事物量的抽象。从远古时代开始，在日常生活和生产实践中，人们就需要创造出一些语言来表达事物（事件与物体）量的多少，比如，狩猎收获的多少，祭祀牺牲的多少等。在古代中国，这样的表述可以追溯到商代的甲骨文，参见“话题篇”中的话题1。虽然在这样的表达

中出现了数字，但这些数字都是有具体背景的：在这样的表达中，数字后面都有后缀名词。在现代汉语中，一些表示数量的后缀名词的具体形式已经被根深蒂固地保留下来了，比如，一粒米、两条鱼、三只鸡、四个蛋、五匹马、六头牛、七张纸、八顶帽子、九件衣服、十条裤子等。我们把**这种有实际背景的、关于量的多少的表达称为数量**。

在上面的表达中，数字还不具有数字符号的功能，只能把这些数字理解为与数量有关的事物的记载：一粒米与一头牛是不能相比的，虽然都是数量“一”的具体例子；此外，这样的表达是不利于进行运算的：一粒米加上一头牛是什么呢？因此，虽然数量是对现实世界中与量有关的事物的一种抽象，但数量还不能作为数学研究的对象，数学研究的对象应当是比数量更为一般的抽象。为了实现更为一般的抽象，就必须把握数量的本质，这个本质表现在数量的关系之中。

数量关系的本质是多与少

数量关系的本质是多与少。从远古开始，人们对数量关心的就是数量的多少：狩猎的收获是否可以满足部族的需要？粮食的收获是否可以满足一年的温饱？数量关系的本质是多与少，抽象到数学内部就是数的大与小。可是，当人们还不会计数时，如何准确地分辨数量的多与少呢？

对于同样的东西，问题还是比较简单的，因为数量是一个一个多起来的。比如，四个苹果是在三个苹果的基础上又多了一个苹果，所以四个苹果要比三个苹果多；同样的道理，五个苹果要比四个苹果多；因为“多”的关系具有传递性，因此五个苹果要比三个苹果多。“少”与“多”是对应的，因此用同样的方法可以理解“少”。

对于不同的东西，问题将变得比较复杂，因为很难理解四粒米要比三头牛多。这时，可以采用对应的方法来比较多少，比如，有若干个苹果，还有若干个橘子，如何判断是苹果多还是橘子多呢？可以实施下面的过程来判断多少：把苹果看作一个集合，把橘子也看作一个集合；从苹果的集合中拿出一个，同时也从橘子的集合中拿出一个；重复这个过程，如果最后苹果的集合中还有剩余，这就说明苹果的数量比橘

子的数量多，反过来说明橘子的数量比苹果的数量少。**这种比较数量多少的方法称为对应**，人们最初就是用这种对应的方法来比较数量的多少，一些例子可以参见“话题篇”中的话题 3。在现代数学中，人们把这种对应的方法应用于无穷集合大小的比较。

从上面的讨论可以看到，比数量更为一般的抽象，或者说，能够成为数学研究对象的抽象已经呼之欲出了。但是，应当如何来描述这个抽象呢？

问题 2　如何认识自然数？

数是对数量的抽象，数的关系是对数量关系的抽象

数是对数量的抽象，数的关系是对数量关系的抽象。在问题 1 中已经谈到，为了更好地研究现实世界中量的关系，就必须对数量进行更一般的抽象。抽象的结果就是自然数。在这个抽象过程中，人们把数量关系也一并抽象出来，形成数的关系。数量关系的本质是多与少，与此对应，数的关系的本质是大与小。因此，自然数是对数量以及数量关系的抽象。可以有两种方法实现这种抽象，或者说，可以有两种方法认识自然数。

对应的方法

一种是基于对应的方法。基于对应的抽象过程大概是这样的：首先利用图形对应表示事物数量的多少，然后再对图形的多少进行命名，最后把命名了的东西符号化①。比如，采用下面的对应方法：

$$\square\square \longleftrightarrow 2,$$

① 曾经有一位研究小学数学教育的教师问我：为什么有些孩子分不清 3 和 4？于是我就问她：是不是在教孩子 3 的时候说的是三个苹果、在教 4 的时候说的是四个梨呢？她回答：是的。事实上，一些发育比较晚的孩子对抽象的感悟比较困难，他们很难理解 3 与苹果无关、4 与梨无关。因此在这样的教学中，最好把数量对应于同一类图像，比如小方块，或者小圆圈，并且不要经常变换，逐渐让孩子形成自己的思维模式。

□□□⟷3，

……　　(1)

在汉语中，分别称其为“二”和“三”。其中，小方块表示任何元素，既可以表示小石头（参见“话题篇”中的话题3），也可以表示苹果或者橘子；符号“⟷”表示对应关系。

因为上面的表达具有一般性，因此可以把表达式（1）称为模式，其中小方块就是沟通数量与数字之间对应关系的桥梁。之所以称这样的表达为模式，是因为这样的表达具有一般性，我们把**能够认识或者解决一类数学问题的方法称为模式**。

可以看到，这种基于实际背景认识自然数的方法是直接的、也是深刻的，因此，我国现行小学数学教材普遍采用的就是这样的写法，在教学过程中普遍采用的也是这样的教学方法。进一步，因为数量的“多与少”对应于数的“大与小”，所以从（1）的对应法则可以让学生知道：3>2，并且让学生理解这样的数学表达。

一般来说，需要从两个角度来把握这种抽象：在形式上，自然数去掉了数量后面的后缀名词；在实质上，自然数去掉了数量所依赖的实际背景。自然数的抽象过程深刻地表明，数学不是研究某一个有具体背景的东西，数学研究的是一般的规律性的东西。反过来，人们又可以把一般性的结果应用于某一个具体的事物，这就体现了数学的价值。比如，人们通过抽象了的自然数和自然数之间的关系，得到了自然数的运算方法，反过来，又把自然数的运算方法应用于具体的数量运算。

定义的方法

另一种是基于定义的方法。数的定义紧密地依赖于数的关系，即大小关系。通过大小关系定义自然数的方法利用了“后继”的概念。比如，先有1；称1的后继为2，2比1大1，表示为2=1+1；称2的后继为3，3比2大1，表示为3=2+1；等等。通过这样的后继关系，人们就得到了所有的自然数。最初规定自然数是从1开始的，后来为了更一般的表示，又规定自然数从0开始。关于定义自然数的详细讨论参见“话题篇”中的话题6。