普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析选讲

隋振璋　丁亮　刘铭　编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析选讲

隋振璋　丁　亮　刘　铭　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本教材是高等院校本科生数学分析课程的选讲教材. 全书共分 10 章, 内容包括极限、连续、实数的连续性、一元函数微积分、多元函数微积分、级数、曲线积分以及曲面积分. 本书通过简明的理论介绍、评注与总结, 以及对大量有代表性的典型例题进行分析、求解, 揭示数学分析的解题方法与技巧.

本书可作为高等学校的数学专业本科生学习数学分析课程的辅导书, 也可作为考取数学专业研究生的学生、参加专业数学竞赛的数学专业高年级学生、教授数学分析课程的高校教师尤其是青年教师以及其他数学分析爱好者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/隋振璋, 丁亮, 刘铭编. —北京: 科学出版社, 2014.8
ISBN 978-7-03-041801-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①隋… ②丁… ③刘… Ⅲ. ① 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 197763 号

责任编辑: 王 静 周金权 / 责任校对: 胡小洁
责任印制: 霍 兵 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 10 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2014 年 10 月第一次印刷 印张: 18 1/4
字数: 367 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

数学分析是数学专业重要的基础课程, 它对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力的培养, 以及后继课程的学习起着非常重要的作用. 但是, 学生在学习这门课程时普遍感到抽象, 抓不住概念的实质, 解题更感困难, 总结不出一般的思考方法. 为了帮助学生消化课堂讲授的内容, 加深对基础概念、基本理论的理解, 提高解题的技能, 同时也为研究生入学考试做好准备, 编者根据长期教授数学分析的经验编写了本书. 编者希望以此帮助学生克服由于不适应数学分析中全新的研究对象和解题方法而产生的困惑, 同时也为讲授此课程的教师提供一些便利的条件. 本书由隋振璋编写第 5、6、7 章, 丁亮编写第 1、2、3、4 章, 刘铭编写第 8、9、10 章.

本书典型例题精解部分所选例题有三种类型: 第一种是基础题, 它们用到的知识点基本上局限在所在章节提供的基本内容范围, 只要细心从定义出发或应用所在章节的定理就能得到解答. 第二种是规范题, 解题使用的方法、体现的思想在数学分析中具有典型性, 学生应从中体验数学分析的基本思想和方法, 它们概括了处理某一类课题的规范性方法. 第三种是考研题, 其中许多是国内知名大学数学系研究生入学考试原题, 它们具有较大的启发性与借鉴性. 通过克服较困难、较复杂的考研题, 一定程度上可以反映学生对数学分析的理解, 同时也可以熟悉考研的热点及规律.

编者对本书的责任编辑周金权同志的细心审校表示衷心的感谢, 同时感谢东北林业大学重点建设专业项目对本书的资助. 由于编者水平有限, 书中难免会有一些疏漏与不妥之处, 恳请广大读者和老师们批评指正.

编　者

2014 年 5 月

目　　录

第 1 章　极　　限

1.1　按定义证明极限的存在性

1.1.1　用 ε-N(ε-A, ε-δ) 语言证明极限

基 本 内 容

ε-N 语言　设 $\{a_n\}$ 为数列, a 是常数. 若 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 常数 a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 并记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 或 $a_n\to a(n\to\infty)$.

ε-A 语言　设函数 $f(x)$ 在 $\{x||x|>a\}$ 上有定义, b 是常数. 若 $\forall\varepsilon>0,\exists A>0$, 当 $|x|>A\,(A>a)$ 时, 有 $|f(x)-b|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$(当 $x\to\infty$ 时) 收敛于 b, 常数 b 称为函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$, 或 $f(x)\to b(x\to\infty)$.

ε-δ 语言　设函数 $f(x)$ 在邻域 $\overset{\circ}{U}(a)$ 有定义, b 是常数. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x:0<|x-a|<\delta\left(x\in\overset{\circ}{U}(a,\delta)\right)$ 时, 有 $|f(x)-b|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$(当 $x\to a$ 时) 收敛于 b, 常数 b 称为函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, 或 $f(x)\to b(x\to a)$.

典型例题精解

例 1　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$($k$ 为正实数).

分析　要使 $\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$, 即只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{k}}}$.

证明　由于 $\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|=\dfrac{1}{n^k}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{k}}}\right]$, 当 $n>N$ 时, 恒有 $\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$.

例 2　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-4}=3$.

分析　要使 $\left|\dfrac{3n^2}{n^2-4}-3\right|=\dfrac{12}{n^2-4}\leqslant\dfrac{12}{n}<\varepsilon$(不妨令 $n\geqslant5$), 即只要 $n>\dfrac{12}{\varepsilon}$.

证明　$\forall\varepsilon>0$, 存在 $N=\max\left\{\left[\dfrac{12}{\varepsilon}\right],5\right\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{3n^2}{n^2-4}-3\right|=\frac{12}{n^2-4}\leqslant\frac{12}{n}<\varepsilon,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-4}=3$.

例 3　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, 其中 $a>0$.

证明　(1) 当 $a=1$ 时, 结论显然成立.

(2) 当 $a>1$ 时, 记 $\alpha=a^{\frac{1}{n}}-1$, 则 $\alpha>0$. 由

$$a=(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha=1+n(a^{\frac{1}{n}}-1)$$

得

$$a^{\frac{1}{n}}-1\leqslant\frac{a-1}{n},$$

任给 $\varepsilon>0$, 当 $n>N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$ 时, 就有 $a^{\frac{1}{n}}-1\leqslant\dfrac{a-1}{n}<\varepsilon$, 即 $|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(3) 当 $0<a<1$ 时, 令 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}-1=\beta$, 则 $\beta>0$. 由

$$\frac{1}{a}=(1+\beta)^n\geqslant 1+n\beta=1+n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-1\right)$$

得

$$1-a^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a^{-1}-1}{n+a^{-1}-1}=\frac{1-a}{1+(n-1)\,a}<\frac{1}{1+(n-1)\,a},$$

任给 $\varepsilon>0$, 当 $n>1+\dfrac{a^{-1}-1}{\varepsilon}=N$ 时, 就有 $1-a^{\frac{1}{n}}<\varepsilon$, 即 $|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

例 4　设 $a_n>0$, $a>0$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2.\cdots.a_n}=a$.

证明　(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 正整数 N_1, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 则

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na}{n}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_N-a|}{n}+\frac{|a_{N+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n} \\
&\leqslant \frac{c}{n}+\frac{n-N}{n}\varepsilon<\frac{c}{n}+\varepsilon,
\end{aligned}
$$

其中, c 是某一非负常数. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n}=0$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 正整数 N_2, 当 $n>N_2$ 时, 有 $\left|\frac{c}{n}\right|<\varepsilon$. 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2.\cdots.a_n}&=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2.\cdots.a_n}} \\
&=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots\ln a_n}{n}}.
\end{aligned}
$$

根据 (1) 的结论, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots\ln a_n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln a}=a.$$

例 5 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $b\neq0$, 用 ε-δ 语言证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$, $|b_n-b|<\varepsilon$. 因为 $b\neq0$, 所以由数列极限的保号性, 当 $n>N$ 时, 有 $|b_n|>\frac{|b|}{2}$, 则

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|&=\left|\frac{a_nb-ab_n}{bb_n}\right|=\left|\frac{a_nb-ab+ab-ab_n}{bb_n}\right| \\
&\leqslant\left|\frac{b(a_n-a)}{bb_n}\right|+\left|\frac{a(b_n-b)}{bb_n}\right|\leqslant\frac{2\varepsilon}{|b|}+\frac{2|a|\varepsilon}{b^2}=\frac{2(|a|+|b|)}{b^2}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

例 6 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$ 上, $f(x)$ 在每一个有限区间 (a,b) 内有界, 并满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M_1>0$, 当 $x>M_1$

时, 有 $|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, 于是有

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x+1)-f(x)<A+\frac{\varepsilon}{2},$$
$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)-f(x-1)<A+\frac{\varepsilon}{2},$$
$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x-1)-f(x-2)<A+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\begin{aligned}[x-M_1]\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)&<f(x-[x-M_1]+1)-f(x-[x-M_1])\\&<[x-M_1]\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[M_1,M_1+1]$ 上有界, 即存在 $C>0$, 使得当 $x\in[M_1,M_1+1]$ 时, 有 $|f(x)|\leqslant C$, 从而 $|f(x-[x-M_1])|\leqslant C$. 于是

$$A-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{M_1+1+C}{x}<\frac{f(x)}{x}<A+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{C}{x}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{M_1+1+C}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{C}{x}=0$, 所以 $\exists M_2>0$, 当 $x>M_1$ 时, 有

$$\left|\frac{M_1+1+C}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad\left|\frac{C}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是令 $M=\max\{M_1,M_2\}$, 则当 $x>M$ 时, 有

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<A+\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$.

1.1.2　用 Cauchy 收敛准则证明极限

基 本 内 容

数列极限存在的Cauchy 收敛准则　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $m,n>N$ 时, 有 $|a_m-a_n|<\varepsilon\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon\,(\forall p>0)$.

$x\to\infty$时函数极限存在的 Cauchy 收敛准则　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0,\exists A>0$, 当 $|x|,|y|>A$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

$x\to a$时函数极限存在的 Cauchy 收敛准则　$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta,0<|y-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Cauchy 收敛准则的意义 $n\to\infty$ 时, 数列各项的值, 彼此越来越接近, 以至于后面的任何两项之差的绝对值可小于任意正数 ε. 或者形象地说, 收敛数列的每一项越到后面越是"挤"在一起.

Cauchy 收敛准则的优点 Cauchy 收敛准则是把 ε-N 定义中 a_n 与 a 的关系换成了 a_n 与 a_m 的关系, 其好处在于无需借助数列以外的数 a, 只要根据数列本身的特征就可以判断其敛散性.

典型例题精解

例 7 证明: 任一无限十进小数 $\alpha=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 的 n 位近似 $(n=1,2,\cdots)$ 所组成的数列

$$\frac{b_1}{10},\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2},\cdots,\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n},\cdots$$

满足 Cauchy 条件 (从而必收敛), 其中 b_k 为 $0,1,2,\cdots,9$ 中的某一个数, $k=1,2,\cdots$.

证明 记 $a_n=\dfrac{b_1}{10}+\dfrac{b_2}{10^2}+\cdots+\dfrac{b_n}{10^n}$. 不妨设 $n>m$, 则有

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=\frac{b_{m+1}}{10^{m+1}}+\frac{b_{m+1}}{10^{m+2}}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}\quad\leqslant\frac{9}{10^{m+1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-m-1}}\right),\\&=\frac{1}{10^m}\left(1-\frac{1}{10^{n-m}}\right)<\frac{1}{10^m}<\frac{1}{m},\end{aligned}$$

对任给的 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则对一切 $n>m>N$ 有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon,$$

则原数列满足 Cauchy 条件, 从而收敛.

例 8 利用 Cauchy 收敛原理讨论数列 $x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ 的收敛性.

证明 不妨设 $n>m$, 则有

$$\begin{aligned}&|x_m-x_n|\\=&\left|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+3}\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{m+1}\frac{1}{m}\right|\\=&\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{m-n-1}\frac{1}{m}\right|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0,\quad\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $m>n>N$ 时, $|x_m-x_n|<\varepsilon$, 所以数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 9 设 $x_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$, 试证: $\{x_n\}$ 收敛.

证明 因为

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p}-x_n| &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n},
\end{aligned}
$$

$\forall \varepsilon>0, \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

例 10 设 $|x_{n+1}-x_n| \leqslant \frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\,(n \geqslant 2)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

证明 令 $b_{n+1}=|x_{n+1}-x_n|$, 于是有 $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}b_n\,(n=1,2,\cdots)$. 利用数学归纳法可得

$$
b_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}b_2.
$$

又对于 $\forall m>n$, $x_m-x_n=\sum\limits_{i=n}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)$, 于是

$$
|x_m-x_n|=\sum_{i=n}^{m-1} b_i \leqslant b_n \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{2^{m-1-i}}<2b_n \to 0,
$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

例 11 设 $a>0$, $b>0$, $a_1=a$, $a_2=b$, $a_{n+2}=2+\frac{1}{a_{n+1}^2}+\frac{1}{a_n^2}$, $n=1,2,\cdots$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明 由条件可知, 当 $n\geqslant 3$ 时, $a_n>2$; 当 $n\geqslant 5$ 时, $a_n<\frac{5}{2}$. 所以当 $n \geqslant 7$ 时,

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1}-a_n| &= \left|\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{a_{n-1}^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}-\frac{1}{a_{n-2}^2}\right|=\frac{a_n+a_{n-2}}{(a_n a_{n-2})^2}|a_n-a_{n-2}| \\
&\leqslant \frac{5}{16}(|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|) \\
&\leqslant \frac{1}{3}|a_n-a_{n-1}|+\frac{5}{16}|a_{n-1}-a_{n-2}|,
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1}-a_n|+\frac{5}{12}|a_n-a_{n-1}| &\leqslant \frac{3}{4}\left(|a_n-a_{n-1}|+\frac{5}{12}|a_{n-1}-a_{n-2}|\right) \\
&\leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}\left(|a_7-a_6|+\frac{5}{12}|a_6-a_5|\right).
\end{aligned}
$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

1.1.3 极限存在性的否定形式

基本内容

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n_0>N$, 有 $|a_{n_0}-a| \geqslant \varepsilon_0 \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0$, $\forall N>0, \exists m_0, n_0>N$, 有 $|a_{m_0}-a_{n_0}| \geqslant \varepsilon_0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq b \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall A>0, \exists |x_0|>A$, 有 $|f(x_0)-b| \geqslant \varepsilon_0 \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0$, $\forall A>0, \exists |x_0|, |y_0|>A$, 有 $|f(x_0)-f(y_0)| \geqslant \varepsilon_0$.

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall\delta>0, \exists 0<|x_0-a|<\delta$, 有 $|f(x_0)-b| \geqslant \varepsilon_0 \Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon_0>0, \forall\delta>0, \exists 0<|x_0-a|<\delta, 0<|y_0-a|<\delta$, 有 $|f(x_0)-f(y_0)| \geqslant \varepsilon_0$.

典型例题精解

例 12 设 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数, $x_0\in\mathbf{R}$. 证明: $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在.

证明 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$, $\forall\delta>0$, 由有理数及实数的稠密性, 在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 中既有有理数, 也有无理数, 从中取有理数 $x'\in\mathring{U}(x_0, \delta)$, 取无理数 $x''\in\mathring{U}(x_0, \delta)$, 于是 $D(x')=1$, $D(x'')=0$, 从而 $|D(x')-D(x'')|=1>\dfrac{1}{2}$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在.

例 13 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 发散.

证明 对于 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$, 对任意大的 N, $n=[n]+1$, $m=2n$, 虽然 $n,m>N$, 但是

$$|a_m-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\{a_n\}$ 发散.

例 14 叙述 $\{x_n\}$ 发散的定义, 证明: $\{\cos n\}$, $\{\sin n\}$ 发散.

证明 $\exists\varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists x_{n_0}>N$, 有 $|x_{n_0}-a| \geqslant \varepsilon_0$. $\exists\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall N>0$, $\exists n=\left[2N\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right]$, $m=[2N\pi+2\pi]$, $m>n>N$, 则有

$$2N\pi+\frac{\pi}{4}<n<2N\pi+\frac{3\pi}{4}, \qquad 2N\pi+\pi<m<2N\pi+2\pi,$$

所以 $|\sin n-\sin m|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\{\sin n\}$ 发散. $\{\cos n\}$ 的证明过程类似.

例 15 证明: 当 $x\to 0$ 时, 函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 没有极限.

证明　$\exists \varepsilon_0 = 1, \forall \delta > 0$, 设正整数 $n > \frac{1}{\delta}$, 令

$$x_1 = \frac{1}{2n\pi}, \quad x_2 = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},$$

则有 $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}(0, \delta)$, 而 $\left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| = 1 = \varepsilon_0$, 根据 Cauchy 收敛准则, $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 没有极限.

1.2　极限存在性判定定理

1.2.1　单调有界原理证明极限存在

基 本 内 容

数列单调有界原理　单调有界数列必有极限.

函数单调有界原理　(1) 设 f 为定义在 $\overset{\circ}{U}_+(x_0)$ 上的单调有界函数, 则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在.

(2) 设 f 为定义在 $\overset{\circ}{U}_-(x_0)$ 上的单调有界函数, 则左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在.

典型例题精解

例 1　设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$, $n = 1, 2, \cdots$, 其中 $\alpha \geqslant 2$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明　显然 $\{a_n\}$ 递增的, 下面证明 $\{a_n\}$ 有上界.

$$\begin{aligned} a_n &\leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2. \end{aligned}$$

于是由单调有界定理知, $\{a_n\}$ 收敛.

例 2　设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限.

证明　由条件可知

$$\sqrt{2} \leqslant x_2 = \sqrt{2x_1} = \sqrt{2\sqrt{2}} \leqslant 2,$$

假设 $\sqrt{2} \leqslant x_n \leqslant 2$, 则 $\sqrt{2} \leqslant x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leqslant 2$. 又因为

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2x_n} - x_n = \sqrt{x_n}\left(\sqrt{2} - \sqrt{x_n}\right) > 0.$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 故极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 对 $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 两边取极限可得 $a = \sqrt{2a}$, 因为 $\sqrt{2} \leqslant x_n \leqslant 2$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

例 3 设 $x_0 = 1$, $x_{n+1}(1 + x_n) = 1$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求其值.

证明 由条件可知

$$x_1 = \frac{1}{1 + x_0}, \quad x_2 = \frac{1}{1 + x_1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} > 0,$$

由数学归纳法可得 $x_n > 0$, 所以

$$0 < x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n} < 1.$$

如果

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{1 + x_n} - x_n = \frac{1 - x_n(1 + x_n)}{1 + x_n} > 0,$$

则可得

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x_n < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

即当此条件成立时, $\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 所以根据单调有界原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设为 A. 对递推公式两边取极限得 $A(1 + A) = 1$, 则 $A = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 因为 $x_n > 0$, 所以 $A = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

如果

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{1 + x_n} - x_n = \frac{1 - x_n(1 + x_n)}{1 + x_n} \leqslant 0,$$

即 $x_n \leqslant \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ 或 $x_n \geqslant \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, 又 $x_n > 0$, 所以 $x_n \geqslant \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. 此时, $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 所以根据单调有界原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设为 A. 对递推公式两边取极限得 $A(1 + A) = 1$, 则 $A = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 因为 $x_n > 0$, 所以 $A = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

例 4 设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{3(1 + x_n)}{3 + x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出极限.

证明 由条件可知

$$x_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{(3-\sqrt{3})(x_n-\sqrt{3})}{3+x_n},$$

因为

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3+x_n}<\frac{3-\sqrt{3}}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以

$$\left|x_{n+1}-\sqrt{3}\right|\leqslant\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left|x_n-\sqrt{3}\right|,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

例 5 证明: (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}<\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}<\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$;

(2) 设 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}-\sqrt{2n-1}$, 则 $\{x_n\}$ 的极限存在.

证明 (1) 作不等式变形, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}&<\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}^2-\sqrt{2n-1}^2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\\&=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}<\frac{1}{\sqrt{2n-1}}.\end{aligned}$$

(2) 因为 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}-\sqrt{2n-1}$, 则

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}<0,\end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减. 由 (1) 的结论, $\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}<\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$, $n=1,2,\cdots$, 依次相加得

$$\sqrt{2n+1}-1\leqslant 1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}.$$

所以 $x_n\geqslant\sqrt{2n+1}-1-\sqrt{2n-1}\geqslant -1$, 因此 $x_n<0$. 由单调有界原理可知, x_n 的极限存在.

例 6 设 $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, $n=1,2,\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 因为 $0<x_1\leqslant 2$, 根据递推关系和数学归纳法可知 $0<x_n\leqslant 2$, 于是有

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n+2}-x_n=\left(\sqrt{x_n+2}+1\right)\left(2-\sqrt{x_n+2}\right)\geqslant 0.$$

因此 $\{x_n\}$ 为单调有界数列, 所以极限存在, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 则根据递推关系有 $A=\sqrt{2+A}$, 解得 $A=2$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

1.2.2 Heine 定理证明极限存在

基 本 内 容

Heine 定理 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ 的充分必要条件是对任意数列$\{a_n\}$, $a_n \neq a$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

Heine 定理也称归结原则.

典型例题精解

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)$, $a>0$.

解 由 Heine 定理得

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} a^x \ln a = \ln a.$$

例 8 用 Heine 定理及数列极限和的运算性质证明函数极限和的运算性质: 若极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a,\quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b,$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = a+b$.

证明 因为极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, 由 Heine 定理知, 对 $\forall \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a,\quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = b,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+g(x_n)] = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = a+b.$$

再由 Heine 定理可得 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = a+b$.

例 9 用 Heine 定理及数列极限的唯一性定理证明函数极限的唯一性定理: 若函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ 存在, 则极限唯一.

证明 假设 a 和 b 都是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$. 由 Heine 定理知, 对任意的 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a,\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

又由数列极限的唯一性定理知 $a=b$, 故若函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ 存在, 则极限唯一.