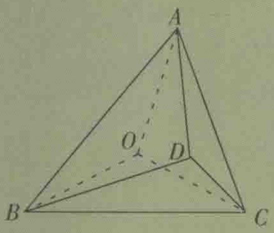
高等院校数学专业教材

LISAN YU ZUHE JIHE YINLUN

离散与组合几何引论

朱玉扬 著

第2版



离散与组合几何学是近年来发展极为惊人的新兴数学学科。它的应用非常广泛，如场站的优化设置、区域的最优覆盖、最佳几何构形等。其优美的理论以及许多著名的问题无不引人入胜……

中国科学技术大学出版社

高等院校数学专业教材

离散与组合几何引论

第2版

师范学院图书馆
藏书

朱玉扬　著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

离散与组合几何学是一门新兴学科，主要研究离散几何对象的计数与设计问题、组合与极值问题，其特点是研究方法灵活、内容多样且有趣、应用十分广泛．它所研究的问题看似简单，实际却较为困难而又引人入胜．全书共9章，主要介绍离散几何中的组合计数和组合极值等问题的研究方法及其理论．

本书可作为数学、计算机科学、建筑工程技术等专业本科生和研究生的教材或参考书，也可供相关教学、科研和技术人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

离散与组合几何引论/朱玉扬著．—2版．—合肥：中国科学技术大学出版社，2014.6

ISBN 978-7-312-03401-5

Ⅰ．离…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．①离散数学—高等学校—教材　②组合几何—高等学校—教材　Ⅳ．①158　②O157.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第061624号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，邮编：230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥华星印务有限责任公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　19.75
字数　398千
版次　2008年4月第1版　2014年6月第2版
印次　2014年6月第2次印刷
定价　36.00元

第 2 版前言

本书第 1 版自 2008 年出版以来已有 5 年多的时间. 随着社会的发展与读者要求的提高,第 1 版中的内容已经显得不够丰富. 为使更多的读者了解或进入离散与组合几何这一富有创新而美妙的数学领域,有必要再版此书. 第 2 版增加或修订的内容为:

在原版第 1 章 1.1 节中补充了关于 n 维空间 $n+2$ 个点场站设置问题的内容;增加"又一种场站设置问题的几个结果"一节,将原 1.2 节变为 1.3 节.

第 2 章增加"Heilbronn 型问题研究的又一种方法"一节.

第 5 章增加"正多边形等积分割线下确界的又几个结果"一节.

第 6 章 6.10 节换为"高维空间中的一个极图问题",扩展了原来的内容,还增加了"斜率最少问题"一节.

此外,新增第 8 章"格及其应用"以及第 9 章"填装与覆盖".

第 1 章至第 6 章新增的内容中,除了第 2 章的"Heilbronn 型问题研究的又一种方法"一节以及第 6 章的"斜率最少问题"一节,其他皆是作者近年来的研究成果. 第 9 章 9.2 节中的引理 1 也是作者给出的.

修改了第 1 版中极个别疏误的地方.

新版的内容将适用于更多的读者. 有些内容自成体系,不需要更多的数学知识,作为中学生以及大学生科技创新活动的素材也很适宜,但有些内容则需要一定的数学基础,若感困难,可选择读之.

此版内容虽有充实,但仍感不完美. 其一,写作风格显得不够灵活;其二,取材安排仍不尽如人意.

限于作者的学识水平与精力,书中难免存在不足之处,恳请读者批评指正.

本书第 2 版得到合肥学院自然科学基金重点项目(12KY04ZD)、合肥学院应用数学重点学科建设项目基金以及 2014 年度合肥学院人才科研基金计划项目(14RC12)的资助.

朱玉扬

2013 年 9 月于南淝湖畔

前　言

离散与组合几何学主要研究几何对象的组合设计、计数与极值问题.人们对它的研究由来已久,如等球装箱及 Steiner 树问题等.人们在社会生产实践中,发现许多问题实际上是某些几何对象的安排与计数问题,这就产生了离散与组合几何学.

离散与组合几何学的深入研究始于 20 世纪.1964 年,H. Hadwiger,H. Debrunner 与 V. Klee 合著的《Combinatoril Geometry in the Plane》一书的出版,标志着这门学科真正诞生.P. Brass,W. Mose,J. Pach 合著的《Research Problems in Discrete Geometry》一书更体现了这门学科中丰富的内容与问题,其内容涉及计算与算法几何、初等与凸几何、微分几何、分析学、代数学、图论、数论、组合数学等.对此学科的研究,不仅需要相关的基础理论知识,而且需要一定的几何直觉与构造能力.组合方法与技巧的运用对这门学科的研究是至关重要的.时至今日,这门学科的发展,不仅丰富了相关的数学理论知识,而且形成了自身的特色.

目前,现代数学已被广泛应用于一些长期悬而未决的离散与组合几何的问题,同时,一些新的问题又不断产生,使这门学科极具生命力,发展异常迅猛.由于人们很容易掌握这类问题的陈述,同时它的解决往往又体现出创造性的数学思想与精神,所以它深受人们喜爱.

每个人都生活在几何空间之中,都有其自身的几何感受,这些感受往往又能从离散与组合几何学中反映出来;另一方面,创新性与现实性是这门学科的主要特点,所以离散与组合几何在数学教育及实际应用方面也凸显出重要性.

本书第 1 章介绍一种场站设置及平面上的点—线选址问题;第 2 章讨论关于点集间距离的 Heilbronn 型问题;第 3 章介绍 Steiner 树;第 4 章研究正四边形与三角形上的 Heilbronn 数;第 5 章介绍正多边形的一种最优分割;第 6 章讨论某些点集的构造与离散计数的问题;第 7 章介绍格点上的组合数学.

由于等圆覆盖与球的装箱问题篇幅较大,故未将此内容列入书中.这方面的内容可参见宗传明教授与单墫教授相关的著作.

从 20 世纪 90 年代以来,我开始从事这方面的研究与教学工作,搜集整理相关文献,逐渐形成本书,其中很多内容都是作者的科研与教学成果.由于作者的

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

能力与学识水平有限，书中的错误在所难免；加之离散与组合几何的内容极其广泛，不可能在一本书中充分体现其全貌，书中内容与作者的兴趣有关，难免有失偏颇，恳请读者给予批评指正.

本书的出版得到了安徽省教育厅自然科学基金项目(2005KJ220)的资助及合肥学院创新教学研究基金项目(2005027)与人才基金项目的资助.

朱玉扬

目　　录

第 1 章　场站设置与点线选址问题

本章主要讨论如下几类问题：(1) 对于 $\mathbb{R}^m$ 中 n 个不同的点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，$d(A_i,A_j)(i,j\in\{1,2,\cdots,n\})$ 表示 A_i 与 A_j 两点之间的距离，记

$$\mu(m,n)=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} d(A_i,A_j)}{\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} d(A_i,A_j)},$$

那么 $\inf\mu(m,n)$ 的值是什么？(2) 平面上给定 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，求一直线 L，使 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i d(A_i,L)$ 为最小. 这里 ω_i 表示点 A_i 的权，$d(A_i,L)$ 表示点 A_i 到直线 L 的距离. (3) 平面上给定 n 条直线 $L_1,L_2,\cdots,L_n$，求点 P，使 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i d(P,L_i)$ 及 $\max\omega_i d(P,L_i)$ 为最小.

1.1　场站设置问题

在现实中我们会遇到这样的离散几何规划问题：在平面内需设置 n 个不同的场站 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，它们之间的距离都不小于某个常数(否则它们之间就可能产生某种干扰)，另外因保密等要求，每两个场站之间需且只需架设一条线，那么应如何设置这 n 个场站，才能使得所架设各线长之和最小？此问题可推广到一般更高维空间中. 其数学模型是：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 m 维空间 $\mathbb{R}^m$ 中的 n 个不同点，$d(A_i,A_j)$ 表示 A_i 与 A_j 两点之间的距离，记

$$\mu(m,n)=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} d(A_i,A_j)}{\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} d(A_i,A_j)},$$

$\mu(m,n)$ 的下确界 $\inf\mu(m,n)$ 的值即为所求问题的解.

1.1.1　几个简单结论

定理 1　$\inf\mu(m,m+1)=C_{m+1}^2$.

证明 $\mathbb{R}^m$ 中 $m+1$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_{m+1}$ 总有

$$\mu(m,m+1)=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m+1} d(A_i,A_j)}{\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant m+1} d(A_i,A_j)}\geqslant\frac{\mathrm{C}_{m+1}^2 \min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m+1} d(A_i,A_j)}{\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant m+1} d(A_i,A_j)}=\mathrm{C}_{m+1}^2,$$

即 $\inf\mu(m,m+1)\geqslant\mathrm{C}_{m+1}^2$.

另一方面，当 $A_1,A_2,\cdots,A_{m+1}$ 恰为 $\mathbb{R}^m$ 中 m 维的正则单形的顶点时，它们每两点之间距离皆相等，所以此时有 $\mu(m,m+1)=\mathrm{C}_{m+1}^2$，故又有

$$\inf\mu(m,m+1)\leqslant\mathrm{C}_{m+1}^2.$$

总之，我们证明了 $\inf\mu(m,m+1)=\mathrm{C}_{m+1}^2$.

对于 1 维空间，我们易得如下结果：

定理 2 $\inf\mu(1,n)=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$.

证明 设 $\mathbb{R}^1$（直线）上 n 个不同点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 依次从左至右分布. 记 $t=\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} d(A_i,A_j)$. 间隔 $n-2$ 个点的两点有 1 对（即 A_1 与 A_n），其距离 $\geqslant 1\times(n-1)t$；间隔 $n-3$ 个点的两点共 2 对，其距离和 $\geqslant 2\times(n-2)t$……间隔 0 个点的两点共有 $n-1$ 对，其距离和 $\geqslant(n-1)\times 1t$. 故

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} d(A_i,A_j)&\geqslant 1(n-1)t+2(n-2)t+\cdots+(n-1)1t\\&=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1),\end{aligned}$$

即 $\mu(1,n)\geqslant\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$. 所以 $\inf\mu(1,n)\geqslant\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$.

另一方面，当 n 个点在 $\mathbb{R}^1$ 上均匀分布时，恰有 $\mu(1,n)=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$. 于是又有 $\inf\mu(1,n)\leqslant\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$.

总之，我们有 $\inf\mu(1,n)=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$. 证毕.

在平面中，当 n 较大时，求 $\inf\mu(2,n)$ 的值是很困难的. 显然当 $n=2,3$ 时，有 $\inf\mu(2,2)=1$，$\inf\mu(2,3)=3$. 当 $n=4$ 时，我们有：

定理 3 $\inf\mu(2,4)=5+\sqrt{3}$.

证明 对平面内的 4 个不同点 A_1,A_2,A_3,A_4，可分以下三种情形来证明：(1) 有三点在一条直线上；(2) 四点为凹四边形的顶点；(3) 四点为凸四边形的顶点.

(1) 为方便计，不妨设 $\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4} d(A_i,A_j)$ 为单位长 1，而且 A_1,A_2,A_3 在一条直线上. 那么

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j)+\sum_{i=1}^{3} d(A_i,A_4)\geqslant 4+3=7,$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

即 $\mu(2,4)\geqslant 7>5+\sqrt{3}$.

（2）设 A_1,A_2,A_3,A_4 为凹四边形的顶点，如图 1-1 所示. 因

$$\min_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4} d(A_i,A_j)=1,$$
$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi,$$

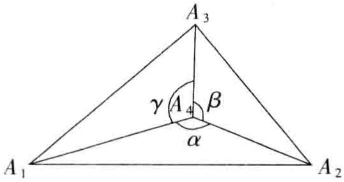


图 1-1

所以 α,β,γ 中至少有一个角不小于 $\frac{2\pi}{3}$ 且小于 π，不妨设 $\frac{2\pi}{3}<\alpha<\pi$. 由于 γ 和 β 所对边 $A_1A_3,A_2A_3\geqslant 1$，于是

$$\begin{aligned} d(A_1,A_2) &\geqslant \sqrt{d^2(A_1,A_4)+d^2(A_2,A_4)-2d(A_1,A_4)d(A_2,A_4)\cos\alpha} \\ &\geqslant \sqrt{d^2(A_1,A_4)+d^2(A_2,A_4)-2d(A_1,A_4)d(A_2,A_4)\cos\frac{2\pi}{3}} \\ &\geqslant \sqrt{1^2+1^2+1\times 1}=\sqrt{3}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j) &= d(A_1,A_2)+\sum_{i=3}^{4} d(A_1,A_i)+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j) \\ &\geqslant \sqrt{3}+2+3=5+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

故此时也有 $\mu(2,4)\geqslant 5+\sqrt{3}$.

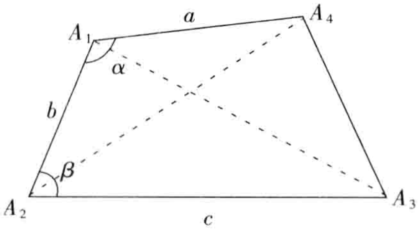


图 1-2

（3）设 A_1,A_2,A_3,A_4 为凸四边形的顶点，如图 1-2 所示. 设两顶点之间距离最小者为单位 1. 因凸四边形的每个内角 $<\pi$，若有一内角 $\geqslant\frac{2\pi}{3}$，不妨设 $\alpha\geqslant\frac{2\pi}{3}$，此时 $\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha<\pi$，则有

$$\begin{aligned} d(A_2,A_4) &= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha} \\ &\geqslant \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3}} \\ &= \sqrt{a^2+b^2+ab}\geqslant\sqrt{3}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j)+d(A_1,A_4)+d(A_3,A_4)+d(A_2,A_4) \\ &\geqslant 3+1+1+\sqrt{3}=5+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

若每个内角都 $\leqslant\frac{2\pi}{3}$，因凸四边形必有两邻角和 $\geqslant\pi$，不妨设 $\alpha+\beta\geqslant\pi$，此时 $\pi\leqslant\alpha+\beta\leqslant\frac{4\pi}{3}$，则有

$$d(A_2,A_4)=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha},$$
$$d(A_1,A_3)=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\beta}.$$

因为

$$\begin{aligned}&a^2+b^2-2ab\cos\alpha-(1^2+1^2-2\cos\alpha)\\&\quad=(a^2+b^2-2)-2(ab-1)\cos\alpha\\&\quad\geqslant(2ab-2)-2(ab-1)\cos\alpha=2(ab-1)(1-\cos\alpha)\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以

$$d(A_2,A_4)\geqslant\sqrt{1^2+1^2-2\cos\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

同理有 $d(A_1,A_3)\geqslant 2\sin\frac{\beta}{2}$. 于是

$$d(A_2,A_4)+d(A_1,A_3)\geqslant 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}.$$

现要证 $|\alpha-\beta|\leqslant\frac{\pi}{3}$.

若 $|\alpha-\beta|>\frac{\pi}{3}$，不妨设 $\alpha-\beta>\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{2\pi}{3}\geqslant\alpha>\frac{\pi}{3}+\beta$，从而 $\beta<\frac{\pi}{3}$. 又 $\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$，故有 $\alpha+\beta<\pi$. 此与条件 $\alpha+\beta\geqslant\pi$ 矛盾，所以 $|\alpha-\beta|\leqslant\frac{\pi}{3}$. 又 $\pi\leqslant\alpha+\beta\leqslant\frac{4\pi}{3}$，于是

$$d(A_2,A_4)+d(A_1,A_3)\geqslant 4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\geqslant 4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{4}=1+\sqrt{3},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}d(A_i,A_j)&=[d(A_1,A_2)+d(A_1,A_4)+d(A_2,A_3)+d(A_3,A_4)]\\&\quad+[d(A_2,A_4)+d(A_1,A_3)]\\&\geqslant 4+1+\sqrt{3}=5+\sqrt{3},\end{aligned}$$

即 $\mu(2,4)\geqslant 5+\sqrt{3}$.

综合(1)，(2)，(3)，总有 $\mu(2,4)\geqslant 5+\sqrt{3}$，故 $\inf\mu(2,4)\geqslant 5+\sqrt{3}$. 另一方面，从(3)的证明知，当 A_1,A_2,A_3,A_4 恰为两个正三角形合在一起构成的菱形的顶点时，有 $\mu(2,4)=5+\sqrt{3}$，所以又有 $\inf\mu(2,4)\leqslant 5+\sqrt{3}$.

综之，$\inf\mu(2,4)=5+\sqrt{3}$. 证毕.

1.1.2 平面 5 点情形

对于平面 5 点情形的场站设置问题可用组合分析的方法予以解决，即有如下结果：

定理 4 $\inf\mu(2,5)=9+2\sqrt{3}$.

为证明此定理,先证如下几个引理.

引理 1　若 $a,b\geqslant 1,c\in\mathbb{R}^+$,则 $\forall\theta\in\mathbb{R}$,有

$$(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^c\geqslant[2(1-\cos\theta)]^c,$$

等号取得当且仅当 $a=b=1$.

证明　因

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta\geqslant 2ab-2ab\cos\theta=2ab(1-\cos\theta)\geqslant 2(1-\cos\theta),$$

由指数函数的单调性即证毕.

引理 2　若 A_4 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 内或边上一点,且 $\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4}d(A_i,A_j)=1$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}d(A_i,A_j)\geqslant 3+\sqrt{3},$$

等号取得当且仅当 A_4 恰在有一内角为$\frac{\pi}{3}$的 $\mathrm{Rt}\triangle A_1A_2A_3$ 的斜边的中点上.

证明　设点 A_4 对 $\triangle A_1A_2A_3$ 三边所张的三个角分别是 α,β,γ,如图 1-3 所示. 不妨设 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$,则 $\alpha=\min\{\alpha,\beta,\gamma\}$. 因 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$,所以 α 不可能大于$\frac{2\pi}{3}$,故只需分(1) $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$及(2) $\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$两种情形来证明.

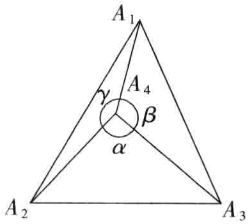


图 1-3

(1) 当 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$时,则 $\beta+\gamma=2\pi-\alpha\geqslant\frac{5\pi}{3}$,而 $0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi$,于是$\frac{5\pi}{6}\leqslant\gamma\leqslant\pi$,从而$\frac{2\pi}{3}\leqslant\beta\leqslant\pi$,故$\frac{5\pi}{3}\leqslant\beta+\gamma\leqslant 2\pi$,$0\leqslant\gamma-\beta\leqslant\frac{\pi}{3}$,即

$$\begin{cases}\frac{5\pi}{12}\leqslant\frac{\beta+\gamma}{4}\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0\leqslant\frac{\gamma-\beta}{4}\leqslant\frac{\pi}{12}.\end{cases}\tag{1}$$

由余弦定理及引理 1 知

$$\begin{aligned}d(A_1,A_2)&=\sqrt{d^2(A_1,A_4)+d^2(A_2,A_4)-2d(A_1,A_4)d(A_2,A_4)\cos\gamma}\\&\geqslant\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\gamma}{2}\right)}=2\sin\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

同理有 $d(A_1,A_3)\geqslant 2\sin\frac{\beta}{2}$. 所以

$$d(A_1,A_2)+d(A_1,A_3)\geqslant 2\left(\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\cos\frac{\beta-\gamma}{4}.\tag{2}$$

由 $\sin x$ 与 $\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调性及(1)式,(2)式知

$$d(A_1,A_2)+d(A_1,A_3)\geqslant 4\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}.$$

故

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j) \geqslant 2+\sqrt{3}+d(A_2,A_3) \geqslant 2+\sqrt{3}+1 = 3+\sqrt{3}. \tag{3}$$

根据引理 1 及(1)式,(2)式,(3)式知,等号取得当且仅当 $d(A_1,A_4)=d(A_2,A_4)=d(A_3,A_4)=d(A_2,A_3)=\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4} d(A_i,A_j)=1$,且 $\alpha=\frac{\pi}{3}$,$\beta=\frac{2\pi}{3}$,$\gamma=\pi$. 此时 A_4 恰在有一内角为$\frac{\pi}{3}$的 $\mathrm{Rt}\triangle A_1A_2A_3$ 斜边的中点上.

(2) 当$\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$时,$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$,$0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi$. 同上,由余弦定理及引理 1 知

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j) &\geqslant \sqrt{2(1-\cos\alpha)}+\sqrt{2(1-\cos\beta)}+\sqrt{2(1-\cos\gamma)}\\ &= 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right).\end{aligned} \tag{4}$$

记(4)式的右端为 $f(\alpha,\beta,\gamma)$,则 $f(\alpha,\beta,\gamma)$定义在区域 D:

$$\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi,\quad \alpha+\beta+\gamma=2\pi.$$

显然 $f(\alpha,\beta,\gamma)=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)$在区域 D 上连续,且对 α,β,γ 的各阶偏导都连续. 现求 $f(\alpha,\beta,\gamma)$在区域 D 内的稳定点:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=\cos\dfrac{\alpha}{2}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial\beta}=\cos\dfrac{\beta}{2}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial\gamma}=\cos\dfrac{\gamma}{2}=0.\end{cases} \tag{5}$$

因 $0<\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$,由(5)式知 $\alpha=\beta=\gamma=\pi$. 但点(π,π,π)不在 D 内(因 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$),故 $f(\alpha,\beta,\gamma)$在 D 内无稳定点. 又 $f(\alpha,\beta,\gamma)$在 D 内偏导连续,所以 $f(\alpha,\beta,\gamma)$只能在 D 的边界∂D 上取得最小值. 因此我们只要考虑边界$\partial D=\partial D_1\cup\partial D_2$(这里$\partial D_1$:$\alpha=\frac{\pi}{3}$,$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi$,$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$;$\partial D_2$:$\alpha=\frac{2\pi}{3}$,$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi$,$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$)上的函数值.

在 ∂D_2 上,因 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$,$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi$,$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$,所以 $2\pi=\alpha+\beta+\gamma\geqslant 3\alpha=3\cdot\frac{2\pi}{3}=2\pi$. 故此时必有 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$,即在边界$\partial D_2$ 上实际只有一点$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,而 $f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$.

在 ∂D_1 上,$\alpha=\frac{\pi}{3}$,$\beta+\gamma=2\pi-\alpha=\frac{5\pi}{3}$,$\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi$,于是$\frac{5\pi}{6}\leqslant\gamma\leqslant\pi$. 因 $\beta=\frac{5\pi}{3}-\gamma$,所

以 $f(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}-\gamma,\gamma\right)=2\left[\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\frac{\gamma}{2}\right]\xlongequal{\text{def}}g(\gamma)$. 故 $f(\alpha,\beta,\gamma)$ 在 ∂D_1 上的最小值即是 $g(\gamma)$ 在 $\frac{5\pi}{6}\leqslant\gamma\leqslant\pi$ 上的最小值.

因在 $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ 上 $g'(\gamma)=\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\gamma}{2}\right)=0$ 的唯一解是 $\gamma=\frac{5\pi}{6}$，而 $g'(\pi)<0$，故在 $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ 上 $g'(\gamma)\leqslant 0$，即 $g(\gamma)$ 在 $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ 上单调减，故 $g(\gamma)$ 在 $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ 上的最小值为 $g(\pi)=3+\sqrt{3}$. 此时 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，$\gamma=\pi$.

总之，$f(\alpha,\beta,\gamma)$ 在 $\partial D_1\cup\partial D_2$ 上的最小值为

$$\min\left\{f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right),f\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi\right)\right\}=3+\sqrt{3},$$

所以 $f(\alpha,\beta,\gamma)$ 在 D 上的最小值为 $3+\sqrt{3}$.

由(4)式知

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}d(A_i,A_j)\geqslant f(\alpha,\beta,\gamma)\geqslant 3+\sqrt{3}.$$

综合(1)与(2)，命题获证.

引理 3　若在凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，$\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4}d(A_i,A_j)=1$，则其对角线和 $d(A_1,A_3)+d(A_2,A_4)\geqslant 1+\sqrt{3}$，等号取得当且仅当凸四边形是有一内角为 $\frac{\pi}{3}$ 的菱形.

此引理的证明同定理3的证明中(3)的情形. 略.

引理 4　若凸五边形各边长 $\geqslant 1$，则其对角线长之和大于 $4+2\sqrt{3}$，且 $4+2\sqrt{3}$ 为最大下界.

证明　如图1-4所示. 记凸五边形的对角线长之和为 σ，各边长分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5. 由余弦定理得

$$\begin{aligned}\sigma=&\ d(A_5,A_2)+d(A_1,A_3)+d(A_2,A_4)+d(A_3,A_5)+d(A_4,A_1)\\=&\sqrt{a_5^2+a_1^2-2a_5a_1\cos\theta_1}+\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\theta_2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2-2a_2a_3\cos\theta_3}\\&+\sqrt{a_3^2+a_4^2-2a_3a_4\cos\theta_4}+\sqrt{a_4^2+a_5^2-2a_4a_5\cos\theta_5}.\end{aligned}$$

不妨设 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 5}\theta_i=\theta_1$，因 $\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i=3\pi$，所以 $\frac{3\pi}{5}\leqslant\theta_1<\pi$. σ 是关于 $\theta_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的多元函数，现要证在区域 D：$\frac{3\pi}{5}\leqslant\theta_1<\pi$，$\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i=3\pi$，$0<\theta_i\leqslant\theta_1(2\leqslant i\leqslant 5)$ 中有 $\sigma>4+2\sqrt{3}$. 由 $0<\theta_i<\pi$ 知 σ 在 D 内可微，先求 σ 在 D 内的稳定点.

令 $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta_1}=0$，得 $\frac{a_5a_1\sin\theta_1}{\sqrt{a_5^2+a_1^2-2a_5a_1\cos\theta_1}}=0$，于是 $\sin\theta_1=0$. 而 $0<\theta_1<\pi$，故此方程在

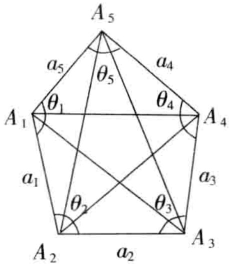


图 1-4

D 内无解. 同理，方程$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta_i}=0(i=2,3,4,5)$在 D 内也无解，因此 σ 在D 内无稳定点. 故 σ 在 D 内的最小值只能在其边界 ∂D 上获得.

现考虑 σ 在∂D 上函数值的变化情况. $\partial D=\partial D_1\cup\partial D_2$，其中 $\partial D_1:\theta_1=\frac{3\pi}{5},\ \sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i=3\pi,0<\theta_i\leqslant\theta_1(2\leqslant i\leqslant 5)$；$\partial D_2:\theta_1=\pi,\ \sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i=3\pi,0<\theta_i\leqslant\theta_1(2\leqslant i\leqslant 5)$.

在 ∂D_1 上，因 $3\pi=\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i\leqslant 5\theta_1=3\pi$，故 $\theta_i=\theta_1=\frac{3\pi}{5}(i=2,3,4,5)$，即边界$\partial D_1$ 实际上只有一点$\left(\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5}\right)$. 故由引理 1 的证明知

$$\sigma\geqslant(\sqrt{a_5a_1}+\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_4}+\sqrt{a_4a_5})\sqrt{2\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right)}$$
$$\geqslant 5\sqrt{2\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right)}=10\sin\frac{3\pi}{10}>4+2\sqrt{3}.$$

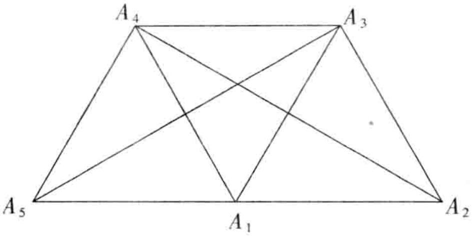


图 1-5

在 ∂D_2 上，因 $3\pi=\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i,\theta_1=\pi$，故得 $\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5=2\pi$. 此时图 1-4 退化为图 1-5，即 A_1 在凸四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 边上. 由于$d(A_2,A_5)\geqslant 2$，在凸四边形 $A_1A_3A_4A_5$ 中，由引理 3 知

$$d(A_1,A_4)+d(A_3,A_5)>1+\sqrt{3}.$$

同理在凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中有

$$d(A_1,A_3)+d(A_2,A_4)>1+\sqrt{3}.$$

故 $\sigma\geqslant d(A_2,A_5)+2(1+\sqrt{3})\geqslant 4+2\sqrt{3}$. 等号取得当且仅当 $a_i=1(i=1,2,\cdots,5)$，且 $\theta_1=\pi,\theta_2=\theta_5=\frac{\pi}{3},\theta_3=\theta_4=\frac{2\pi}{3}$. 其图形由 3 个正三角形拼成.

总之，边界 ∂D 上总有 $\sigma\geqslant 4+2\sqrt{3}$. 因 σ 的最小值只能在 ∂D 上取得，故在 D 上总有 $\sigma\geqslant 4+2\sqrt{3}$. 而等号取得当且仅当在 ∂D_2 上，但 ∂D_2 不在 D 上，即总有 $\sigma>4+2\sqrt{3}$. 又 σ 在 $D\cup\partial D$ 上连续，故 $4+2\sqrt{3}$是 σ 在 D 内的最大下界. 证毕.

定理 4 的证明 为方便计，不妨设平面中 5 个不同点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 有 $\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 5}d(A_i,A_j)=1$. 平面中 5 点只有以下 4 种可能：(1) 至少有四点在同一直线上；(2) 有两点在以另外三点为顶点的三角形内或边上且无四点共线；(3) 五点中有一点在以另外四点为顶点的凸形内或其边上；(4) 五点为一凸形的顶点. 下面我们将逐一

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com