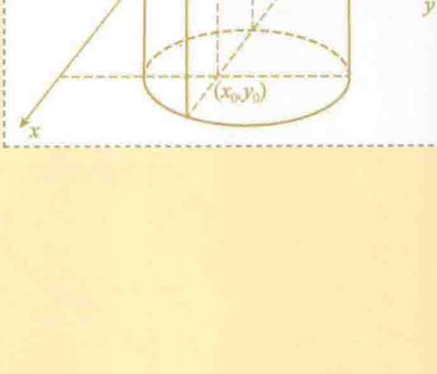
高职高专教育“十二五”规划教材

经济应用数学

JINGJI YINGYONG SHUXUE

主 编 梁淑莲 王士新



中国建材工业出版社

高职高专教育“十二五”规划教材

经济应用数学

主　编　梁淑莲　王士新
副主编　蔡宇泽　刘世金
　　　　温延红　王艳双

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/梁淑莲,王士新主编. —北京:
中国建材工业出版社,2012.7
ISBN 978-7-5160-0189-9

Ⅰ.①经… Ⅱ.①梁… ②王… Ⅲ.①经济数学—高
等学校-教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 134379 号

内容提要

本教材是根据教育部制定的《高等教育基础课程教学基本要求》和经济类院校对经济数学教学的基本要求而编写的.在内容阐述上力争做到以实例引人概念,淡化理论的推导和证明,删除繁杂的计算,用简明扼要的语言阐明基本知识要点,满足经济类各专业对数学知识的基本要求.

本教材内容包括函数、极限及连续,导数与微分,不定积分,定积分,微分方程,线性代数,概率,统计初步知识,数学建模与数学实验等 9 章内容,每章后附有相应的习题.

本教材可用作高等院校经济类专业的教材,也可作为同层次的成人教育经济类专业的教材和供参加有关自学考试的人员自学使用.

经济应用数学

主　　编:梁淑莲　王士新
封面设计:华盛英才
出版发行:中国建材工业出版社
地　　址:北京市西城区车公庄大街 6 号
邮　　编:100044
经　　销:全国各地新华书店
印　　刷:三河市宏兴印刷厂
开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张:13.75
字　　数:326 千字
版　　次:2013 年 1 月第 1 版
印　　次:2013 年 1 月第 1 次印刷
书　　号:978-7-5160-0189-9
定　　价:30.00 元

本社网址:www.jccbs.com.cn
本书如出现印装质量问题,由我社发行部负责调换。联系电话:(010)62400499

前　言

本教材“以必需为底，够用为限”优化了教材的内容，对本课程的重点、难点剖析清晰，尽量做到结构合理、论证简明、叙述严谨、例题典型、方法为重、能力优先，努力使教材应用特色明显．通过本教材的学习，不仅使学生学到数学的基本知识和基本理论，而且能开阔学生的视野，培养数学素养，树立正确的思维方式，能应用数学方法和技巧提高解决实际问题的兴趣、意识和能力．

本教材内容包括函数、极限与连续，导数与微分，不定积分，定积分，微分方程，线性代数，概率，统计初步知识，数学建模与数学实验等9章内容，基本涵盖了高等院校经济管理类各专业课程所需的数学知识，在编写过程中，我们力求体现如下特色：

第一，在科学性的基础上，贯彻“必须、够用为度”的原则．用辩证法的思想浅显通俗地处理了概念的扩展与难点，对一元函数的导数与微分及多元函数的偏导数、定积分、线性代数的编写方式进行大胆改革与创新，力争跳出传统数学教学体系的约束．

第二，在职业教育理念的指导下，较好地体现数学知识的应用性．本书紧扣“成本与利润”这根主线，展示数学的魅力，培养学生运用数学知识的能力．

第三，采用案例驱动式的编写体例．每一章均提出与本章内容相关的经济问题，由此引入数学概念与内容，让学生始终带着问题学习与思考．

第四，注重知识的拓展，每一章都有知识应用链接与问题思考，潜移默化地向学生传达经济理念，培养学生运用数学工具对简单经济问题进行分析、预测、决策的能力．

第五，突出学生的主体地位．每一章都提出了学习目标，便于学生自学与评估．

第六，弱化了复杂的及技巧性较高的计算内容，引入了语言简洁、交互性较好、易于掌握的MATLA B数学软件，希望学生掌握这一功能强大的数学计算工具，能用它处理较为复杂的数学计算．

本教材适合作为高等院校会计学、审计学、财务管理、金融学、税务、财政学、公共事业管理、信息管理与信息系统、电子商务、经济学、国际贸易、统计学、投资学、工商管理、市场营销、人力资源、旅游管理、物流管理、管理科学等专业的教材，也可以作为相关科技、管理人员的参考书培训用书．

由于编者水平有限，加之时间紧迫，书中难免存在疏漏和不足之处，敬请同行、专家和广大读者批评指正，以便在今后的重印或再版中改进和完善．

编　者

目 录

绪论

1. 名家谈数学

为什么数学比其他一切科学更受到特殊的尊重，一个理由是它的命题是绝对可靠的和无可争辩的，另一个理由是数学给予精密自然科学以某种程度的可靠性．没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的．

数学是打开科学大门的钥匙，忽视数学必将伤害所有的知识，因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的．更为严重的是，忽视数学的人不能理解他自己的这一疏忽，最终将导致无法寻求任何补救的措施．

——BaconRoger

从最广泛的意义上说，数学是一种精神，一种理性精神，正是这种精神，使得人类的思维得以运用到最完美的程度；亦正是这种精神，试图决定地影响人类的物质、道德和社会生活；试图回答人类自身存在的问题；努力去理解和控制自然；用心力去探索和确立已获得知识的最完美的内涵．

——M. Klein

2. 朱镕基讲分配率

1993 年秋，时任国务院副总理的朱镕基，会同有关部门的负责人，专程到 19 个省市研究财税体制改革方案．为了说明分税制与包干制相比，地方财政收入只会增加，不会减少，朱副总理常常彻夜给他们讲解分配律：$A(B+C)=AB+AC$. 其实，这个初等代数中的公式并不难懂，大家也未必不懂，问题在于，它涉及中央与地方的利益分配．

这件事情说明：一方面，数学可以清晰表达文字难以描述的关系，数学推导可以给出定性分析难以得到的结论．但另一方面，数学又不等于经济学．

西方流传很广的一个故事是，对“1＋1＝?”这么简单的算术，不同的人有不同的回答：

工程师的回答是 2.

经济师的回答可能是 2，也可能大于或小于 2.

会计师的回答则是：你想等于几?

为此，我们学习《经济应用数学》这门课程，首先要熟练掌握高等数学的基本概念、基本原理和基本方法，并注意恰当地运用所学来处理经济管理方面的一些问题．例如，经济变量之间和经济变量与非经济变量之间，是具有极其复杂的关系的．数学方程总是在一定假设条件下，反映主要变量之间的函数关系，而舍弃其他次要的、但并非不重要的关系，所得结论未必与现实完全相等．这并不是数学的过错．

数学方程都是反映特定时空条件下的经济关系的，将随着条件的变化而变化．

数学方程的解可能出现负值，但在经济学上，有些负值是没有意义的，如产品至少是 0. 某些经济概念的本身便是负值，就没有必要加上负号．如果说我国 2000 年财政赤字

—2491亿元人民币，反而叫人糊涂．这正是经济数学的特点．

经济学从它诞生之日起便和数学结下了不解之缘，经济学概念的可计量性，是数学与经济学相互渗透、相互促进的最典型也是最基础的表现，因为只有从经济现象中抽象出具有量的规定性的定性概念，才有可能确立起严格的数量分析方法．

第1章 函数、极限及连续

知识目标

1. 了解经济中常用的函数的概念；
2. 理解极限的概念和几何意义；
3. 理解无穷小量、无穷大量的概念以及二者之间的关系；
4. 掌握连续函数的概念及闭区间上连续函数的性质．

技能目标

1. 学会分析复合函数的复合结构；
2. 会利用极限的运算法则、两个重要极限和其他重要的方法求函数的极限；
3. 能够判断间断点及其类型．

1.1 函数的概念和性质

函数的概念在17世纪之前，一直与公式紧密关联，到了1873年，德国数学家狄利克雷（1805—1859）抽象出较为合理的函数的概念沿用至今．

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

设 x，y 是两个变量，D 是给定的非空实数集．对于任一 $x\in D$，按照某种对应规则 f，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$．其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**（或函数），x 的取值范围 D 称为函数的**定义域**，一般用区间或集合表示．

当 $x=x_0$（$x_0\in D$）时，通过规则 f 得到 y 的值称为函数在点 x_0 处的**函数值**，记作

$$y_0=y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$$

函数值的范围 $f(D)=\{f(x)\ x\in D\}$ 称为函数的**值域**．

2. 确定函数的两个要素

由函数定义知，函数的值域由函数的定义域和对应规则确定，因而，只要两个函数的定义域和对应规则相同，即可断定这两个函数是相同的函数，与用什么字母表示自变量和

因变量没有关系．例如，$y=x^3$ 与 $w=t^3$ 是同一个函数．

注：(1) 定义域有时也用邻域表示．所谓邻域是指开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，称为以 x_0 为中心，以 $\delta>0$ 为半径的邻域，简称点 x_0 的 δ **邻域**，不包含中心点 x_0 的邻域，称为点 x_0 的 δ **去心邻域**．

(2) 在实际问题中，函数的定义域应根据实际意义确定，如人数，只能取整数．

【例 1-1】 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$，求 $f(x)$，$f(-3)$．

解
$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1,$$
则
$$f(x)=x^2+1,\quad f(-3)=(-3)^2+1=10.$$

【例 1-2】 求函数 $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域．

解 满足函数要求的 x 的范围是
$$\begin{cases}x-1>0,\\ x+1>0,\end{cases}$$
解此方程组得 $x>1$，故此函数的定义域是 $x\in(1,+\infty)$．

3. 分段函数

在不同的定义区间内用不同的解析式表示的函数，称为**分段函数**．分段函数是高等数学及经济应用中常见的一种函数．例如，某城市出租车的计价器计价方法如下：不超过 4km 的为 8 元；超过 4km 时，超过部分为 1.2 元/km. 如果设行驶里程为 $x$km，所需费用为 y 元，其解析表达式就是一个分段函数，即
$$y=\begin{cases}8 & 0<x\leqslant 4\\ 8+1.2(x-4) & x>4\end{cases}$$
又如，绝对值函数可以表示为分段函数，即
$$y=|x|=\begin{cases}x & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0\end{cases}$$

分段函数是用几个式子表示一个函数，而不是几个函数．其定义域是各定义区间的并集，求函数值时，要根据自变量所在范围选取对应的解析式．

【例 1-3】 已知分段函数
$$y=\begin{cases}(x+1)^2-4 & x<3\\ \ln x & 5\leqslant x<10\end{cases}$$
求：(1) 定义域；　(2) $f(-2)$，$f(8)$．

解 (1) 定义域是 $(-\infty, 3)\cup[5, 10)$．

(2) $f(-2)=(-2+1)^2-4=-3$，　$f(8)=\ln 8=3\ln 2$.

【例 1-4】 已知分段函数
$$y=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ x-1 & x>4\end{cases}$$
求：(1) 函数的定义域；　(2) $f(3)$，$f(5)$；　(3) 画出函数图形．

解　(1) 函数定义域是 $[0, +\infty)$.

(2) $f(3)=\sqrt{3}$,　$f(5)=5-1=4$.

(3) 函数 $f(x)$ 的图形由函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间 $[0, 4]$ 上的图形与 $y=x-1$ 在区间 $(4, +\infty)$ 内的图形组成，如图 1-1所示.

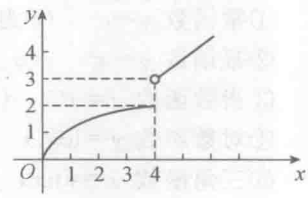


图 1-1

1.1.2　函数的性质

在中学我们对函数的重要性质，即**单调性、有界性、奇偶性、周期性**已作过比较详细的研究，这里只作简单复习.

(1) 有界性　对于任意的 $x\in D$，若存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

例如，$f(x)=\sin x$，当 $x\in(-\infty, +\infty)$ 时，$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，而 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界.

有界函数的图形介于两条平行于 x 轴的直线 $y=\pm M$ 之间.

(2) 奇偶性　设 D 是关于坐标原点对称的区间，若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；否则，称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

(3) 单调性　设函数 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，且 $(a, b)\subseteq D$，若对于任意 x_1，$x_2\in(a, b)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是**单调增加**（或**单调减少**）的，此时区间 (a, b) 也称为函数 $f(x)$ 的**单调增**（或**单调减**）**区间**. 单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

例如，$y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调减少，在区间 $(0, +\infty)$ 内单调增加；$y=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

单调增函数的图形是沿着 x 轴正向上升的，单调减函数的图形是沿着 x 轴正向下降的.

(4) 周期性　若存在不为零的数 T，使得对于任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，中学熟悉的三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数. 特别地，$y=c$（c 为常数），$x\in \boldsymbol{R}$ 也是周期函数，任何正数都是它的周期，但没有最小正周期. 以 T 为周期的周期函数 $y=f(x)$ 的图形特点是在 x 轴上每隔长度 T，就重复出现这一周期内的图形.

1.1.3　初等函数及经济中常用的函数

1. 初等函数

初等函数主要是由基本初等函数组成的.

(1) 基本初等函数

①常函数 $y=c$ （c 为常数）；

②幂函数 $y=x^a$ （a 为常数）；

③指数函数 $y=a^x$ （a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$）；

④对数函数 $y=\log_a x$ （a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$）；

⑤三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

⑥反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$.

这六种函数统称为基本初等函数，基本初等函数的应用非常广泛，同时是后续学习的基础.

(2) 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合而成，且能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**. 否则，就是**非初等函数**.

例如，$y=\ln\cos x$，$y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$，$y=\frac{1-x}{1+x^2}$，$y=x^x$ 等都是初等函数，而分段函数 $y=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant0)\\ x+1 & (x<0)\end{cases}$ 不是初等函数，因为它不能用一个解析式表示.

2. 经济中常用的函数

经济领域中经常涉及一些函数，这些函数是通过对大量的数据进行分析、归纳、抽象建立的经济数学模型，为我们以后更深入的理论研究打下一个坚实的基础.

(1) 成本函数

成本函数是指在技术水平和产品价格不变的条件下，以货币形式反映企业的生产和销售产品的全部支出费用. 它包括固定成本和可变成本两部分. **固定成本**是指在一定时期内，不随产量变化的那部分支出，如厂房、机器设备的费用等. **可变成本**是指随产量变化而变化的那部分支出，如原材料、工人工资等. 一般情况下，**总成本函数**用 $C(x)$ 表示，即

$$C(x)=C_0+C(x)$$

其中 C_0 为固定成本，$C(x)$ 为可变成本，x 为产量，**成本函数为单调增函数**.

(2) 收入函数

收入函数是销售价格与销售量的乘积，总收入一般用 R 表示，即

$$R=R(x)=Px$$

其中 P 为销售价格，x 为销售量.

(3) 利润函数

利润函数是收入函数与成本函数的差，一般以 L 表示，即

$$L=L(x)=R(x)-C(x)$$

其中 x 为销售量.

当 $L(x_0)>0$ 时，表示销售 x_0 单位时盈利.

当 $L(x_1)<0$ 时，表示销售 x_1 单位时亏损.

当 $L(x_2)=0$ 时，表示盈亏平衡. x_2 称为平衡点（或保本点）.

【例 1-5】 设某厂每月生产的产品固定成本为 1000 元，生产 x 个单位产品的可变成

本为 $0.01x^2+10x$ 元，如果每单位产品的售价为 30 元，试求总成本函数、总收入函数、总利润函数及盈亏的平衡点．

解 总成本为可变成本与固定成本之和．依题设知，总成本函数为

$$C(x)=0.01x^2+10x+1000$$

总收入函数为

$$R(x)=Px=30x$$

总利润函数为

$$\begin{aligned}L(x)&=R(x)-C(x)\\&=30x-0.01x^2-10x-1000\\&=-0.01x^2+20x-1000\end{aligned}$$

令 $L(x)=0$，即

$$-0.01x^2+20x-1000=0$$

解之得 $x_1\approx1948$，$x_2\approx52$. 即销售量为 1948 个单位或 52 个单位时为盈亏的平衡点．

(4) 需求函数与供给函数

需求函数是指在某一特定的时期内，市场上某种商品的购买量和决定这些购买量的诸因素之间的数量关系，把需求量 Q 作为因变量，只考虑商品价格 P 本身对需求量的影响，则可用函数关系式 $Q=f(P)$ 表示，其中 Q 表示需求量，P 表示价格．这就是需求函数．

一般情况下商品的需求量与价格成反比，即商品价格低则需求量大，商品价格高则需求量小．因此，需求函数是单调减函数．

供给函数是指在某种特定的时期内，市场上某种商品的供给量和决定这些供给量的诸多因素之间的数量关系．假定生产水平、生产成本等诸因素不变，则决定这种商品供给量的因素就是这种商品的价格．因此，供给函数就可以看作把影响供给量因素的价格 P 作为自变量，把供给量 Q 作为因变量所形成的函数关系，其表达式如下：

$$Q=\varphi(P)$$

其中 P 为价格，Q 为供给量．注意与需求量 Q 在含义上的不同．

一般情况下，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增长；反之，价格下降，使供给量减少．所以，供给函数是单调增函数．

需求函数与供给函数可以帮助生产者或销售者分析市场规律，二者密切相关，如果把需求曲线（需求函数的图形）和供给曲线（供给函数的图形）画在同一坐标系中，则由于需求函数 $Q=f(P)$ 是单调减函数，供给函数 $Q=\varphi(P)$ 是单调增函数，所以它们将相交于一点，这一点称为供需平衡点；横坐标就是供需平衡价格，称为均衡价格；纵坐标就是供需平衡数量，称为均衡数量．

1.2 极 限

函数极限是讨论自变量在某种变化过程中函数值的变化情况，而自变量的变化趋势有两种：趋于无限数和趋于有限数．

1.2.1 数列的极限

极限思想是微积分学的核心，利用微积分学解决问题的方法，归根到底是求极限的问题．我们首先讨论数列的极限．

1. 引例

公元263年，为了计算圆的周长，我国古代杰出的数学家刘徽首先作圆内接正六边形；然后平分每边所对的弧，再作圆内接正十二边形．用同样的方法，依次作圆内接正二十四边形、正四十八边形，……对圆内接正多边形很容易计算其周长，这样每一个内接正多边形的周长，都对应着一个实数，从而可以得到一列相关联的实数．刘徽说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．"即是讲，当内接正多边形的边数无限增加时，这一系列圆内接正多边形的周长的"极限"就是圆周的长．

刘徽的割圆术给我们一个重要启示：圆的周长最初是未知的，通过与未知有联系的一列数——圆内接正多边形的周长，在无限的过程中，化未知为已知．这一思想正是我们所要介绍的极限的基本思想．

2. 数列的极限

按照一定次序排列的一列数称为**数列**，记作 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为数列的**一般项**或**通项**，n 为正整数，称为下标．例如：

(1) $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots$

(2) $1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots$

(3) $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$

(4) $2,\ 2,\ 2,\ \cdots,\ 2,\ \cdots$

观察上面五个数列的项，可以看出：随着数列的项数 n 越来越大，数列 (1) 的通项 $x_n=\frac{n+1}{n}$ 无限趋近于常数1；数列 (2) 的通项 $x_n=(-1)^{n+1}$ 在 -1 与 1 之间跳动，不趋向于任何一个常数；数列 (3) 的通项 $x_n=n$ 无限变大；数列 (4) 的通项 $x_n=2$ 仍是常数2.

设有数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 无限地接近于常数 A，则称当 $n\to\infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限．记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad \text{或} \quad x_n\to A\ (n\to\infty)$$

如果一个数列有极限，则称这个数列是**收敛**的，否则称这个数列是**发散**的．

通过观察可以知道，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0\ (a>1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

1.2.2 函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x\to\infty$ 包括两个方向：一个是沿着 x 轴的负向，这时自变量 x 取值为负且 $|x|$ 无限

增大，记作 $x\to-\infty$；另一个则是沿着 x 轴的正向，这时自变量 x 取值为正且 $|x|$ 无限增大，记作 $x\to+\infty$，因而 $x\to\infty$ 意味着同时要考虑 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$.

对于函数 $y=f(x)$，如果当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称**当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

上述定义的几何意义：曲线 $y=f(x)$ 沿着 x 轴的正向和负向无限地延伸时，与直线 $y=A$ 越来越接近，即以直线 $y=A$ 为水平渐近线．如图 1-2 所示．

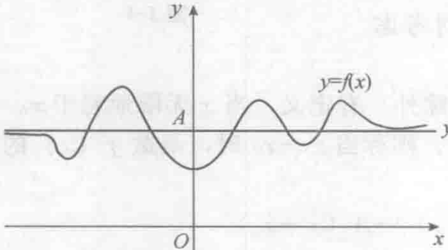


图 1-2

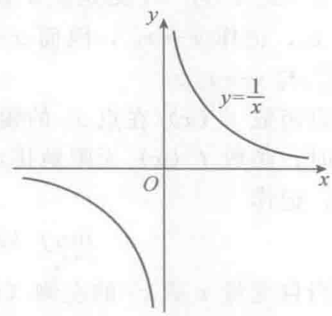


图 1-3

【例 1-6】　已知函数 $y=\dfrac{1}{x}$，观察其函数图形，如图 1-3 所示．

可见无论当 $x\to-\infty$ 还是 $x\to+\infty$ 时，对应的函数 y 值都无限接近于常数 0，意味着当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 无限接近常数 0，这时称函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 x 趋于无穷大时以 0 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

同理对于函数 $y=f(x)$，如果当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称**当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to+\infty)$$

对于函数 $y=f(x)$，如果当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称**当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to-\infty)$$

由上述 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 极限的定义，不难发现：$x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限是 A，这表明当 $x\to+\infty$ 以及当 $x\to-\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 都要有相同的极限 A.

定理 1.1　极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

根据这个定理，极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 与极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 中只要有一个不存在，或者虽然存在但不相等，则极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在．

【例 1-7】　讨论极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解　观察函数 $y=\arctan x$ 的图形，如图 1-4 所示，由图像知：

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$由于极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$，根据定理 1.1，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在 .

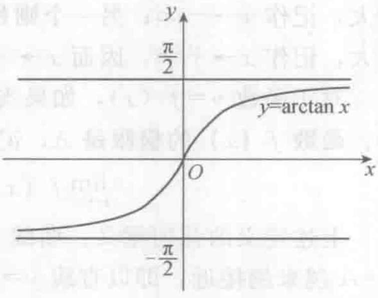


图 1-4

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x\to x_0$ 是指自变量 x 无限接近于 x_0 点，它包括两个方向：一个是点 x 从点 x_0 的左方无限接近于点 x_0，记作 $x\to x_0^-$；另一个则是点 x 从点 x_0 的右方无限接近于点 x_0，记作 $x\to x_0^+$，因而 $x\to x_0$ 意味着要同时考虑 $x\to x_0^-$ 与 $x\to x_0^+$.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的领域内（点 x_0 可以除外）有定义，当 x 无限地趋于 x_0（$x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 无限地接近于某一个常数 A，则称**当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

当自变量 x 从 x_0 的左侧（或右侧）趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限地接近于某一个常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的**左极限（或右极限）**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\ (或\ \lim_{x\to x_0^+}f(x)=A)$$

函数的左极限与右极限统称为**单侧极限**.

定理 1.2 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

【例 1-8】 设 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-2 & x>0\end{cases}$ 试判断 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在

解 这是一个分段函数，且 $x=0$ 是其分段点，先分别求函数 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限：

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2$$

左、右极限存在但不相等，由极限存在的充分必要条件可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在 .

【例 1-9】 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x & x>0\\ k & x<0\end{cases}$ 问当 k 为何值时，极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在？并求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}k=k$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}e^x=1$$

要使极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，必须有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=k=1=\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

所以当 $k=1$ 时

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1$$

由本例知，函数在 $x=0$ 处虽然没有定义，但极限仍然存在．

1.2.3　无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量

在实际问题中，我们经常会遇到极限为零的变量，例如，产品的库存会随着销量的增加而趋近于零；电容器放电时，电压会随时间的增加而逐渐减少并趋近于零．

这些趋近于零的变量，在微积分中有着特殊的含义，我们称之为无穷小量．

若函数 $y=f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中以零为极限，则称 $f(x)$ 为在该变化过程中的**无穷小量**．简称无穷小．常以 α、β、γ 等表示．

例如，当 $x\to 0$ 时，x，$3x^2$ 都是无穷小量；当 $x\to 1$ 时，x^2-1 是无穷小量；$x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷小量等．

在常量中，唯有数 0 是无穷小量．

（1）无穷小量的性质

①有限个无穷小量的代数和是无穷小量；

②有限个无穷小量的积是无穷小量；

③有界变量与无穷小量的积是无穷小量．

【例 1-10】　求极限（1）$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0} x=0$，所以 x 是 $x\to 0$ 时的无穷小量，

又 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量，由无穷小量的性质③，

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

（2）
$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$$

（2）函数极限与无穷小量的关系

定理 1.3　函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 可以表示为极限值 A 与一个无穷小量 α 之和．即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha=0$.

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2x+1}{3x}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3x}$. 其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3x}=0$.

（3）无穷小量的比较

同样是无穷小量，但趋于零的速度有快有慢，为了比较两个无穷小量趋于零的速度，我们给出无穷小量阶的概念．