

管理类硕士联考辅导指定用书·联考数学序列3

旅游管理(MTA)、工程管理(MEM)、
图书情报(MLIS)、审计硕士(MAud)联考适用

2015

MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力 数学考前冲刺

考前预测+解题黄金技巧+全真模拟密训

主编 陈剑

第5版

超级畅销书《MBA、MPA、MPAcc联考综合能力
数学高分指南》(序列1)姊妹篇

100余种重点题型、**55**种解题思维模式

10大解题黄金技巧暨**14**套模拟密训试卷

买正版图书

赠**100**元
听课卡



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

管理类硕士联考辅导指定用书·联考数学序列3

旅游管理(MTA)、工程管理(MEM)、
图书情报(MLIS)、审计硕士(MAud)联考适用

2015

MBA、MPA、MPAcc

联考综合能力

数学考前冲刺

考前预测+解题黄金技巧+全真模拟密训

主编 陈剑

第5版



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书紧扣考试大纲,强调解题技巧和全真模拟。全书分为考点题型预测、解题黄金技巧、全真模拟密训三部分。考点题型预测将考纲知识点归纳成100余种考试预测题型,精心挑选题目,逐题深度剖析,指导考生把握命题脉搏。解题黄金技巧以提升实战为宗旨,将历年试题解题中用到的技巧系统总结为十大黄金技巧,汇总了55种固定解题思维模式,又灵活演变成数十种做题模板和解题套路,无论基础怎样,都能收到“水到渠成”和“润物细无声”之功效。全真模拟密训根据最新考试动态,汇集整理出14套模拟试题,让考生在临考前有限的时间里抓住重要考点,通过全真演练,进一步掌握解题的技巧和方法,考场上从容应考,轻取高分。

本书以实用性和技巧性为基础,强调考试方法和做题技巧,立竿见影、快速突破,迅速提高读者的数学解题能力,适合参加管理类专业硕士联考的考生在考前冲刺阶段复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

2015 MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学考前冲刺 /
陈剑主编. -- 北京:北京航空航天大学出版社, 2014. 8
ISBN 978-7-5124-1348-1

I. ①2… II. ①陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 173161 号

版权所有,侵权必究。

2015 MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学考前冲刺

主编 陈 剑

策划编辑 沈 涛

责任编辑 张冀青

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:shentao@buaa.edu.cn 邮购电话:(010)82316524

北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:21 字数:551 千字

2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷 印数:10 000 册

ISBN 978-7-5124-1348-1 定价:39.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

管理类数学备考丛书序列

- 序列 1:《数 学 高 分 指 南》
定位:第一轮复习,夯实基础
特色:考点、题型、点睛
- 序列 2:《数学真题名家详解》
定位:第二轮复习,强化拔高
特色:真题、考向、精练
- 序列 3:《数 学 考 前 冲 刺》
定位:最后一轮复习,决胜冲刺
特色:预测、技巧、模拟

本书特色

- 深度** 针对联考题型,深入分析探究,用“举题型讲方法”的格式,总结出解题方法、技巧,便于考生掌握和应用。
- 高度** 居高临下,逐题深度剖析,洞察命题新动向,指导考生把握命题脉搏,赢取高分。
- 精度** 精品模拟试卷,全真演练,提升实战技巧,便于考生有的放矢,查缺补漏,以求做到触类旁通,从容应考。
- 速度** 考试中取胜的关键是速度,提高速度依赖于技巧,通过举一反三阐明解题思路,全面展现题型变化,使考生掌握考试做题技巧。
- 角度** 针对考试题型,多角度把握命题思路、方法和原则,为考生提供准确领航和理性分析。

前言

为帮助报考管理类专业硕士学位的考生更好地做好考前冲刺，笔者按照最新考试大纲精心编写了本书。按照考试要求，本书分为考点题型预测、解题黄金技巧、全真模拟密训三部分。

· 考点题型预测部分将几十个考纲知识点归纳成百余种考试预测题型，对各类基本命题类型、考试经常出题点进行了系统的分析，使考生在最短的时间内对联考数学试题的形貌、内容、特点有充分的认识；精心挑选题目，逐题深度剖析，将知识点和解题方法无缝对接，建立了完整、科学的备考链条和考点层级网络体系。此外，在讲解时将题目涉及的知识点、考点和方法技巧有机联系，辅以一定的口诀记忆，以利于考生更系统、更宏观地掌握数学的本质，赢取高分。

解题黄金技巧部分是本书的最大特色。制约数学成绩的最大障碍不是难度，而是速度。本书以提升实战能力为宗旨，将历年试题解题中用到的技巧系统地总结为十大黄金技巧，涵盖了百余种方法和技巧，汇总了55种固定解题思维模式，又灵活演变成数十种做题模板和解题套路，让考生在上考场前对试卷便能了如指掌，无论基础怎样，在考场上都能做到游刃有余，所向披靡。

全真模拟密训部分根据最新考试动态，蕴含无数创新考题，不仅让考生能够找到身临其境的感觉，在有限的时间内抓住重点，而且通过全真演练，掌握考试的技巧和方法，有的放矢，查漏补缺，考场上从容应考，轻取高分。建议考生按规定在1个小时左右时间内完成全真模拟试题，然后对照答案，将自己做错的题再做一遍。尽管本书每题均有详尽的解析，但希望考生不要轻易去查看详解，先培养自己的独立思考能力，做完题目后，再去看详解，仔细回顾、研究一下自己的解答过程与书中有什么异同，如果存在疑问，应尽早查清原因。注意，归纳总结过程是必不可少的，是提高成绩的必经途径，其重要性远超过做题本身。

本书是《2015 MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学高分指南》（简称《数学高分指南》）的姊妹书，以实用性和技巧性为基点，以强调考试方法和做题技巧为宗旨，以快速提高能力和立竿见影为核心，达到在解题中总结套路，在套路中提高能力，最后形成一套灵活应试的战略战术的备考目标，对典型考

题从多侧面、多视角进行讲解,注重对多解法、多类型题目的训练,培养发散思维和技巧应用能力,实现学习效果的加倍提高和考分的快速突破,因而本书是数学考前过关冲刺的必备辅导书。

本书在编写过程中,得到了广大教师同仁的大力支持,特此感谢。同时参阅了众多有关的教材和复习指导书,引用了一些例子,恕不一一提及,谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。由于编者水平有限,兼之时间仓促,错误和疏漏之处难免,恳请读者批评指正。

欢迎大家通过作者博客(<http://www.chenjian.cc>,<http://chenjian.mba.net.cn>)、YY 万人学习群(7201531)、YY 在线学习频道(16386652)及邮箱(myofficer@sina.com)等网络平台在线交流,答疑解惑,获得最新信息,交流学习经验,最大程度地利用好本书。

编 者
2014 年 7 月

目 录

第一部分 考点题型预测

第 1 章 算术与代数	3
1.1 考纲要点梳理	3
1.2 重点题型预测	5
1.3 创新题型	13
第 2 章 应用题	21
2.1 考纲要点梳理	21
2.2 重点题型预测	25
2.3 创新题型	45
第 3 章 方程和不等式	57
3.1 考纲要点梳理	57
3.2 重点题型预测	61
3.3 创新题型	80
第 4 章 数 列	98
4.1 考纲要点梳理	98
4.2 重点题型预测	100
4.3 创新题型	113
第 5 章 几 何	123
5.1 考纲要点梳理	123
5.2 重点题型预测	127
5.3 创新题型	145
第 6 章 数据分析	161
6.1 考纲要点梳理	161
6.2 重点题型预测	164
6.3 创新题型	193

第二部分 解题黄金技巧

第 1 章 数学固定思维模式	201
1.1 初等数学	202
1.2 几 何	202
1.3 数据分析	203

第2章 核心专题	204
2.1 配方变形专题	204
2.2 换元专题	207
2.3 整体思想应用	209
2.4 绝对值图像汇总	213
2.5 杠杆原理(交叉法)	215
2.6 平均值定理专题	216
2.7 数列求和专题	218
2.8 概率做题模板	222
第3章 常用黄金技巧	226
3.1 巧用特值法	227
3.2 根据表达式符号定性判断	229
3.3 数字特征分析法	230
3.4 估算及经验分析法	231
3.5 比例统一法	233
3.6 几何中对称巧解	233
3.7 充分性判断题	234
第4章 考场增分策略	238
4.1 备考运筹帷幄	238
4.2 进考场	242
4.3 拆卷子	243
4.4 开始答题	243
4.5 难题及不会题	245
4.6 交卷前	246
4.7 答题经验教训	246
4.8 常见问题	248

第三部分 全真模拟密训

全真模拟一	253
全真模拟二	256
全真模拟三	259
全真模拟四	262
全真模拟五	265
全真模拟六	268
全真模拟七	271
全真模拟八	274
全真模拟九	277
全真模拟十	280
全真模拟十一	283

全真模拟十二	286
全真模拟十三	289
全真模拟十四	292
答案及详解	295
全真模拟一答案及详解	295
全真模拟二答案及详解	297
全真模拟三答案及详解	299
全真模拟四答案及详解	301
全真模拟五答案及详解	302
全真模拟六答案及详解	304
全真模拟七答案及详解	306
全真模拟八答案及详解	308
全真模拟九答案及详解	310
全真模拟十答案及详解	313
全真模拟十一答案及详解	315
全真模拟十二答案及详解	317
全真模拟十三答案及详解	321
全真模拟十四答案及详解	323

第一部分

考点题型预测

第1章 算术与代数

1.1 考纲要点梳理

1.1.1 重要的概念和性质

(1) 最小的自然数为 0, 最小的质数为 2, 最小的合数为 4. 1 既不是质数也不是合数.

(2) 常用 20 以内的质数: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. (2 为质数中唯一的偶数)

(3) 整除的特点:

能被 2 整除的数: 个位为 0, 2, 4, 6, 8;

能被 3 整除的数: 各数位数字之和必能被 3 整除;

能被 5 整除的数: 个位为 0 或 5;

能被 9 整除的数: 各数位数字之和必能被 9 整除.

(4) 公倍数与公约数.

对于两个正整数, 两数之积等于最小公倍数乘以最大公约数.

(5) 奇数与偶数.

相邻两整数必有一奇一偶. 在一个加(减)算式中, 判断其结果的奇偶性, 只取决于奇数的个数(奇数个奇数为奇, 其余均为偶).

1.1.2 重要的运算公式

$$(1) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

【扩展】 $\left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \pm 2$ 或 $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2 \mp 2$.

$$(2) (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

【注意】 $a^2 + b^2 + c^2 \pm ab \pm bc \pm ac = \frac{1}{2}(a \pm b)^2 + \frac{1}{2}(b \pm c)^2 + \frac{1}{2}(a \pm c)^2$.

$$(3) (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$(4) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

【扩展】 $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n} \mp \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})(\sqrt{n} \mp \sqrt{n-1})} = \sqrt{n} \mp \sqrt{n-1}.$

$$(5) a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

$$(6) a^0 = 1(a \neq 0), 1^x = 1(x \in \mathbf{R}), 0^x = 0(x > 0).$$

$$(7) a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

1.1.3 绝对值

(1) 定义:正数和零的绝对值还是其本身,负数的绝对值为其相反数.

(2) 本质:绝对值起着控制一个数符号的作用;绝对值对于正数和零没有影响;绝对值只对于负数起着改变符号的作用.

(3) 几何意义:

实数 a 的绝对值 $|a|$ 表示数轴上坐标为 a 的点 A 到坐标原点的距离,如图 1-1-1(a) 所示.

$|a-b|$ 的几何意义表示它们在数轴上对应的点之间的距离,如图 1-1-1(b) 所示.



图 1-1-1

1.1.4 平均值

(1) n 个数的算术平均值为 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

(2) n 个正数的几何平均值为 $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$.

(3) 平均值定理:

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正数时,算术平均值不小于几何平均值,即

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n > 0).$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时,等号成立.

【注意】对于两个数,有 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b > 0$) 和 $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ($a > 0$).

① $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, $a, b \in \mathbf{R}$ (当且仅当 $a = b$ 时等号成立).

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ (当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立).

③ $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq ab + bc + ca$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ (当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立).

④ $\left| \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right| \geq 2$ (当且仅当 $|a| = |b|$ 时取“=”号).

⑤ $a > 0, b > 0, a + b = 1$, 则 $ab \leq \frac{1}{4}$.

1.1.5 除法及因式定理

1. 除 法

设 $F(x)$ 除以 $f(x)$, 商为 $g(x)$, 余式为 $r(x)$, 则有 $F(x) = f(x)g(x) + r(x)$, 且 $r(x)$ 的最高次方数小于 $f(x)$ 的最高次方数. 若 $r(x) = 0$, 则 $F(x)$ 可以被 $f(x)$ 整除.

2. 因式定理

多项式 $f(x)$ 含有因式 $(ax - b) \Leftrightarrow f(x)$ 能被 $(ax - b)$ 整除 $\Leftrightarrow f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

【注意】多项式 $f(x)$ 含有因式 $(x - a) \Leftrightarrow f(x)$ 能被 $(x - a)$ 整除 $\Leftrightarrow f(a) = 0$.

1.2 重点题型预测

【预测 1】整除

【解题思路】首先要记住被常见数字(如 2, 3, 5, 9) 整除的特点; 另外, 整除经常与约数联合命题, 尤其寻找多个数的约数.

1. 设 a 为正整数, 且 $\frac{48}{a}, \frac{72}{a}$ 也为正整数, 则符合条件的 a 值有() 个.

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10 E. 12

【答案】C

【解析】48 与 72 的最大公约数为 24, 所以 24 是它们的一个因子, 故 24 可以整除它们; 又 24 的所有因子都可以整除 48 和 72, 所以可以整除它们的数为 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 共 8 个.

【点拨】如果一个分数为整数, 则分母是分子的约数.

2. 介于 300 到 400 之间, 恰有三个因数的整数, 共有() 个.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4 E. 7

【答案】B

【解析】每一个数都至少有两个因子(1 与它本身). 如果有三个因数的数, 则另外一个因数一定不能再分解, 所以应该是质数. 为了保证只有三个因数, 此数一定可以分解为某一个质数平方的形式. 在 300 ~ 400 间可以分解为某质数平方形式的数只有 $19^2 = 361$, 故只有 1 个数.

【点拨】本题结合因数来分析整除, 主要考查一个数的约数的个数.

【预测 2】公倍数与公约数

【解题思路】在处理涉及两数的最大公约数或者最小公倍数的很多问题中, 经常用到的基本关系是: 若两数为 a 和 b , 那么 $a = a_1d$, $b = b_1d$. 其中, $d = (a, b)$, $(a_1, b_1) = 1$, 因此, $[a, b] = da_1b_1$. 有时为了确定起见, 可设 $a \leq b$. 对于很多情形, 可以排除 $a = b$ 的情形, 而只假设 $a < b$, 其中 (a_1, b_1) 表示两数的最大公约数, $[a, b]$ 表示两数的最小公倍数.

1. 有一个三角形的公园, 各边的长分别是 150 m, 180 m, 300 m. 今在周围种树, 相邻两棵树之间的距离相等, 且在三角形的顶点各种一棵, 最少要种() 棵树.

A. 21 B. 22 C. 20 D. 19 E. 23

【答案】A

【解析】首先求出 (150, 180, 300) 的最大公约数, 为 30, 则每个边种树之和为 $5 + 6 + 10 = 21$.

【点拨】本题主要考查最大公约数的应用, 若出现等距离问题, 可采用最大公约数求解.

2. 老师将 100 名学生分别抽签编号, 依序分别是 1, 2, ..., 100, 已知编号为 5 或 7 的倍数者可以获得免费的图书礼券一张, 老师共送出() 张图书礼券.

A. 30

B. 31

C. 32

D. 33

E. 34

【答案】C

【解析】 $\frac{100}{5} = 20$, 故编号为 5 的倍数有 20 个, $\frac{100}{7} \approx 14.3$, 编号为 7 的倍数为 14 个; 共有 $20 + 14 = 34$, 又 5 和 7 共同的倍数有 35 和 70, 所以总共发出的礼券数为 $34 - 2 = 32$.

【点拨】分别求出 5 的倍数和 7 的倍数, 再减去 5 和 7 的共同倍数.

3. 甲数是 36, 甲、乙两数的最大公约数是 4, 最小公倍数是 288, 乙数的各个数位和为 ().

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

E. 5

【答案】E

【解析】方法一 由“甲数 $\times$ 乙数 = 甲、乙两数的最大公约数 $\times$ 两数的最小公倍数”可得 $36 \times$ 乙数 = 4×288 , 乙数 = $4 \times 288 \div 36$, 解出: 乙数 = 32.

方法二 因为甲、乙两数的最大公约数为 4, 所以甲数 = 4×9 . 设乙数 = $4 \times b_1$, 且 $(b_1, 9) = 1$. 因为甲、乙两数的最小公倍数是 288, 所以 $288 = 4 \times 9 \times b_1$, $b_1 = 288 \div 36$, 解出 $b_1 = 8$. 所以, 乙数 = $4 \times 8 = 32$.

【点拨】本题方法一采用定理求解, 方法二根据定义求解.

4. 已知两数的最大公约数是 21, 最小公倍数是 126, 这两个数的和有 () 种取值情况.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

【答案】B

【解析】要求这两个数的和, 可以先求出这两个数各是多少. 设这两个数为 a 和 b , 且 $a < b$. 因为这两个数的最大公约数是 21, 故设 $a = 21a_1$, $b = 21b_1$, 且 $(a_1, b_1) = 1$.

因为这两个数的最小公倍数是 126, 所以 $126 = 21 \times a_1 \times b_1$, 于是 $a_1 \times b_1 = 6$.

解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 3 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} a = 21 \times 1 = 21 \\ b = 21 \times 6 = 126 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 21 \times 2 = 42 \\ b = 21 \times 3 = 63 \end{cases}$.

因此, 这两个数的和为 $21 + 126 = 147$, 或 $42 + 63 = 105$, 有两种情况.

【点拨】本题主要考查已知最大公约数和最小公倍数, 反求两个数.

5. 已知两个自然数的和是 50, 它们的最大公约数是 5, 这两个自然数的乘积一定是 ().

A. 9 的倍数

B. 7 的倍数

C. 45 的倍数

D. 75 的倍数

E. 18 的倍数

【答案】D

【解析】设这两个自然数分别为 a 与 b , $a < b$.

因为这两个自然数的最大公约数是 5, 故设 $a = 5a_1$, $b = 5b_1$, 且 $(a_1, b_1) = 1$, $a_1 < b_1$.

因为 $a + b = 50$, 所以有 $5a_1 + 5b_1 = 50$, $a_1 + b_1 = 10$. 满足 $(a_1, b_1) = 1$, $a_1 < b_1$ 的解有:

解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ b_1 = 7 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} a = 5 \times 1 = 5 \\ b = 5 \times 9 = 45 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 5 \times 3 = 15 \\ b = 5 \times 7 = 35 \end{cases}$.

无论哪种情况, 这两个数的乘积一定是 75 的倍数.

【点拨】本题主要考查已知最大公约数与两数之和, 反求两数.

【预测 3】奇数与偶数

【解题思路】对于奇数、偶数问题, 要会借助性质反推数字的特点, 尤其要记住: 奇数 $\pm$ 奇数 = 偶数, 奇数 $\pm$ 偶数 = 奇数, 偶数 $\pm$ 偶数 = 偶数.

1. 书店有单价为 10 分、15 分、25 分、40 分的四种贺年片,小华花了几张一元钱,正好买了 30 张,其中某两种各 5 张,另两种各 10 张,问小华买贺年片花去()元钱.

- A. 5 B. 9 C. 6 D. 8 E. 7

【答案】E

【解析】设买的贺年片分别为 a, b, c, d (张), 用去 k 张 1 元的人民币, 依题意有 $10a + 15b + 25c + 40d = 100k$ (k 为正整数), 即 $2a + 3b + 5c + 8d = 20k$. 显然 b, c 有相同的奇偶性.

若同为偶数, $b = c = 10$ 和 $a = d = 5, k = \frac{13}{2}$ 不是整数;

若同为奇数, $b = c = 5$ 和 $a = d = 10, k = 7$. 满足题意, 故共花 7 元.

【点拨】本题也属于不定方程问题, 通过奇偶性与整除特点来寻找唯一解.

2. 某市举办小学生数学竞赛, 试卷上共有 30 道试题, 评分标准是: 基础分 15 分, 答对一题加 5 分, 未答一题加 1 分, 答错一题倒扣 1 分, 如果有 2015 个学生参赛, 问参赛同学的总分是().

- A. 偶数 B. 奇数 C. 质数 D. 合数 E. 无法确定

【答案】B

【解析】如果 30 道题都答对了, 则可得到的分数为 $15 + 5 \times 30 = 165$, 是个奇数. 如果答错一题, 就要从 165 分中减去 $5 + 1 = 6$ 分, 无论答错几个题, 都将从 165 分中减去 6 的倍数, 得分仍为奇数. 如果有一题未答, 就要从 165 分中减去 $5 - 1 = 4$ 分, 因而不论几道题未答, 都将从 165 中减去 4 的倍数, 得分也是奇数. 综上所述, 对每个参赛同学无论答得如何, 成绩都是 165 减去一个偶数, 其得分总是奇数.

因为有 2015 个人 (奇数个) 参赛, 奇数个奇数相加, 和仍为奇数, 所以参赛同学的总得分是奇数.

【点拨】本题关键在于说明每位参赛同学所得分数是奇数还是偶数, 再根据人数为奇数及奇偶性质得到最后得分的结果.

3. 在黑板上写上 $1, 2, 3, \dots, 100$, 按下列规定进行“操作”: 每次擦去其中的任意两个数 a 和 b , 然后写上它们的差 (大减小), 直到黑板上剩下一个数为止. 黑板上剩下的数是().

- A. 奇数 B. 偶数 C. 质数 D. 合数 E. 无法确定

【答案】B

【解析】黑板上开始时所有数的和为 $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$, 是一个偶数, 而每一次“操作”, 将 $(a+b)$ 变成了 $(a-b)$, 实际上减少了 $2b$, 即减少了一个偶数. 因为从整体上看, 总和减少了一个偶数, 其奇偶性不变, 所以最后黑板上剩下一个偶数.

【预测 4】质数与合数

【解题思路】质数、合数也是数的重要性质, 要记住最小的质数为 2, 最小的合数为 4. 除了 2 以外的质数都是奇数, 大于 2 的偶数都是合数.

1. 三个质数 a, b, c 的乘积等于这三个质数和的 5 倍, 则 $a^2 + b^2 + c^2 = ()$.

- A. 80 B. 71 C. 72 D. 78 E. 74

【答案】D

【解析】因为 $abc = 5(a+b+c)$, 所以在质数 a, b, c 中必有一个是 5.

不妨设 $a = 5$, 于是 $5bc = 5b + 5c + 25$, 即 $(b-1)(c-1) = 6$, 而 $6 = 2 \times 3 = 1 \times 6$, 则

$$\left. \begin{aligned} b-1 &= 2 \\ c-1 &= 3 \end{aligned} \right\} \quad \text{①}$$

或 $\left. \begin{aligned} b-1 &= 1 \\ c-1 &= 6 \end{aligned} \right\} \quad \text{②}$

由式 ① 得 $b=3, c=4$, 不合题意. 由式 ② 得 $b=2, c=7$, 符合题意.

所以所求的三个质数是 5, 2, 7. 于是 $a^2 + b^2 + c^2 = 78$.

【点拨】由题意得出 $abc = 5(a+b+c)$, 由此显然得质数 a, b, c 中必有一个是 5, 不妨设 $a=5$, 代入前式中再设法求 b, c , 质数问题常常通过分解质因数来解决.

2. 老师要琳琳列出 1 ~ 40 的所有整数, 然后依下列步骤进行:

步骤一, 删去 1.

步骤二, 保留 2, 删去 2 的倍数.

步骤三, 保留 3, 删去 3 的倍数.

步骤三, 保留 5, 删去 5 的倍数.

当四个步骤进行完之后, 则下列叙述中错误的有() 个.

(1) 最后剩下的数必为质数

(2) 最后剩下的数有 11 个

(3) 最后一个数为 37

(4) 剩下的数中, 只有 1 个数是偶数

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

【答案】B

【解析】剩下的是 1 ~ 40 间的所有质数: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 共 12 个数.

(2) 叙述错误, 其他叙述正确.

【点拨】本题主要考查质数的特点, 但是如果范围增大, 比如 1 ~ 50, 那么剩下的不一定是质数, 比如 49.

3. 三人分糖, 每人都得整数块, 乙比丙多得 13 块, 甲所得是乙的 2 倍, 已知糖的总块数是一个小于 50 的质数, 且它的各位数字之和为 11, 则三人得糖的块数之积为().

A. 900

B. 800

C. 840

D. 920

E. 960

【答案】A

【解析】设甲、乙、丙分别得糖 x, y, z 块, 依题意得

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = z + 13 \\ x + y + z < 50, \text{ 且 } x + y + z \text{ 为质数} \end{cases}$$

因为 $11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$, 故小于 50 且数字和为 11 的质数只可能是 29 和 47.

若 $x + y + z = 29$, 则可得 $4y = 42$, y 不是整数, 舍去.

若 $x + y + z = 47$, 则可得 $4y = 60$, $y = 15$, 从而 $x = 30, z = 2$.

所以甲、乙、丙分别得糖 30, 15, 2 块, 三人得糖的块数之积为 900.

【点拨】本题的关键是分析出小于 50 且数字和为 11 的质数只可能是 29 和 47. 这类问题通常利用质数的性质来分析求得所有的可能值, 再设法检验求得所要的解.

4. 若 x 为正整数, 且 $15x^2 - 82x - 17$ 为一个质数, 则此质数为().

A. 19

B. 23

C. 29

D. 31

E. 37

【答案】D

【解析】由于 $15x^2 - 82x - 17 = (5x + 1)(3x - 17)$ 为质数, 故只能分成 1 和它本身相乘, 且 x 为正整数, 故 $3x - 17 = 1$, 得到 $x = 6 \Rightarrow 15x^2 - 82x - 17 = 31$.