高等职业教育基础课程课改教材

高等数学应用教程习题集

胡　浩　张广龙◎主编

西北工業大學出版社

高等职业教育基础课程课改教材

高等数学应用教程习题集

主　编　胡　浩　张广龙
副主编　王元明　王　旭

西北工业大学出版社

【内容简介】 本习题集是与《高等数学应用教程》(西北工业大学出版社)教材相配套的,主要内容分为五大模块:一元函数微积分、多元函数微积分学、常微分方程与无穷级数、线性代数以及数学实验等.

本习题集的编者均是教学一线的教师,每个章节的内容采用从易到难的结构进行编写,一方面可以提高学生学习高等数学的兴趣,另一方面也为学有余力的学生提供了进一步提升的平台.

本书既可以作为高职高专的高等数学的补充教材,又可以供相关人员进行自学或参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学应用教程习题集/胡浩,张广龙主编.—西安:西北工业大学出版社,2012.7
ISBN 978-7-5612-3398-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①胡… ②张… Ⅲ.①高等数学—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 173075 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号　　邮编:710072
电　　话:(029)88493844　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西兴平报社印刷厂
开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张:10.5
字　　数:253 千字
版　　次:2012 年 8 月第 1 版　　2012 年 8 月第 1 次印刷
定　　价:22.80 元

前　言

高等数学是大学教育阶段一门重要的基础理论课，它是深入学习专业课程的必要基础，能够很好地培养学生的科学精神和创新能力以及运用数学思维解决问题的能力. 为了更好地学习并掌握高等数学的相关知识，与《高等数学应用教程》(张广龙，胡浩主编，西北工业大学出版社)相呼应，特组织编写了本书. 它是高等数学学习的同步辅导书. 本书的编写内容以《高等数学应用教程》为依据，是学生学习《高等数学应用教程》的配套用书. 通过对本书的学习，学生可以检验学习效果，找出差距，从而提高学习效率，找到真正掌握学习高等数学的金钥匙.

本书主要分为五大模块. 第一模块为一元函数微积分；第二模块为多元函数微积分学；第三模块为常微分方程与无穷级数；第四模块为线性代数；第五模块为数学实验. 每一模块的内容以项目进行分类，项目以下具体到各个任务. 带着任务学习，能够更好地激发学生学习的积极性. 在书后配有习题答案，有利于学生自检学习效果，同时也保证了图书体系的完整.

本书由滁州职业技术学院、安徽中澳科技职业学院、徽商职业技术学院、安徽涉外经济职业学院等组织编写. 参加编写的有胡浩、张广龙、王元明、王旭等，由王正萍担任主审，胡浩、张广龙担任主编，并负责全书书稿的总纂.

由于水平所限，难免有不足之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　　录

模块一　一元函数微积分

项目一　函数　极限　连续

任务一　函数

习　题　1-1-1

1.求下列函数的自然定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(2) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{3}}{\sqrt{x^2-x-6}}$；

(3) $y=\ln(-x^2+3x-2)$；

(4) $y=2^{\frac{1}{x^3-x}}$；

(5) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$；

(6) $y=\arctan\dfrac{1}{x}+\sqrt{3-x}$.

2.已知 $f(x)$ 定义域为 $[0,1]$，求 $f(x^2)$，$f(\sin x)$，$f(x+a)$，$f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域.

3.设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)$，其中 $a>0$，求函数值 $f(2a)$，$f(1)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=2^x$，求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$，并做出函数图形.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，试证：$f(f(x))=\begin{cases}2+x, & x<-1\\ 1, & x\geqslant -1\end{cases}$.

6. 下列各组函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否是同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+3}-x)$，$g(x)=-\ln(\sqrt{x^2+3}+3)$；

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^5-2x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x^2-2}$；

(3) $f(x)=2$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$；

(4) $f(x)=2\lg x$，$g(x)=\lg x^2$.

7. 确定下列函数在给定区间内的单调性.

(1) $y=3x+\ln x$，$x\in(0,+\infty)$；

(2) $y=\dfrac{-x}{1-x}$，$x\in(-\infty,1)$.

8. 判定下列函数的奇偶性.

(1) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$；

(2) $y=0$；

(3) $y=x^2+2\cos x+\sin x-1$；　　　　(4) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $[-l,l]$ 上的任意函数，证明：

(1) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数；

(2) $f(x)$ 可表示成偶函数与奇函数之和的形式.

10. 证明：函数在区间 I 上有界的充分必要条件是：函数在 I 上既有上界又有下界.

11. 下列函数是否是周期函数？对于周期函数指出其周期.

(1) $y=|\sin x|$；　(2) $y=1+\sin \pi x$；　(3) $y=x\tan x$；　(4) $y=\cos^2 x$.

12. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{3^x}{3^x-1}$；　　　　(2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad\neq bc)$；

(3) $y=\lg\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$；　　　　(4) $y=3\cos 2x\ \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$.

13. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求该函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值.

(1) $y=e^u, u=x^2+1, x_1=0, x_2=2$；

(2) $y=u^2+1, u=e^v-1, v=x+1, x_1=1, x_2=-1$.

14. 在一圆柱形容器内倒进某种溶液，该容器的底半径为 r，高为 H. 当倒进溶液后液面的高度为 h 时，溶液的体积为 V. 试把 h 表示为 V 的函数，并指出其定义区间.

15. 某城市的行政管理部门，在保证居民正常用水需要的前提下，为了节约用水，制定了如下收费方法：当每户居民每月用水量不超过 4.5t 时，水费按 0.64 元/t 计算. 超过部分每吨以 5 倍价格收费. 试建立每月用水费用与用水数量之间的函数关系. 并计算用水量分别为 3.5t，4.5t，5.5t 的用水费用.

任务二　极限概念　无穷小与无穷大

习　题　1-1-2

1. 当 $x\to 0$ 时，$x-2x^2$ 与 $3x^2-2x^3$ 相比，哪一个是高阶无穷小？

2. 证明：当 $x\to 0$ 时，$\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

3. 利用等价无穷小的性质，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan nx}{\sin mx}$ (m，n 为正整数)；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+2x^2}-1}{\sin 3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2)}{4x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\sin x}{3}}-1}{\arctan x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 3x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+5x^2-7x^3}{4x^3+2\tan x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin^2 x+\tan 3x}{\sin 5x+2x^2}$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$，其中 $a>0,b>0$，均为常数.

4. 当 $x\to0$ 时，若 $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，试求 a.

任务三　极限的四则运算法则

习　题　1-1-3

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+1}{n^3+4n^2-1}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+1}{x^2-5x+3}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$；

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+5x+3}$；

(9) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{5x^3-3x+1}$；

(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$；

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2x+1}$；

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-3x+6)$；

(15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+x^2+3x+27}{x-3}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ 2x+a, & x\geqslant 0\end{cases}$，问当 a 为何值时，极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

3. 求当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限.

4. 已知 $\lim\limits_{x \to +\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=1$，其中 a,b,c 为常数，求 a 和 b 的值.

5. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$；

(4) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

6. 试问函数 $f(x)=\begin{cases}5-x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 10, & x=0\\ 5+x^2, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限是否存在？当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

任务四　两个重要极限

习　题　1-1-4

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{-1}{x}}$；

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$；

(3) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$；

(4) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x-5}\right)^{x}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{5x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\cos x-1}{x^{\frac{3}{2}}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n}\sin\dfrac{x}{2^{n}}$（$x$ 为不等于零的常数）.

任务五　函数的连续性

习　题　1－1－5

1. 研究下列函数的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$；

(2) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in \mathbf{Q} \\ 0, & x\in \mathbf{Q}^{c} \end{cases}$.

2. 讨论下列函数的间断点，并指出其类型. 如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使其连续.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$；

(2) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^{2}-1}{x^{2}-3x+2}$；

(4) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$；

(5)$f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$；　　(6)$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 3\\ 4-x, & x<3\end{cases}$.

3. 讨论下列函数的连续性，若有间断点，判别其类型.

(1)$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}\quad(x\geqslant 0)$；　　(2)$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x^{2n})x}{1+x^{2n}}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0\\ x^2+a, & x\geqslant 0\end{cases}$，试确定 a 的值，使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin ax}, & x>0\\ bx+1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，求 a 和 b 的值.

6. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子：

(1)$x=0,\pm 1,\pm 2,\pm\dfrac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\dfrac{1}{n},\cdots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点，且它们都是无穷间断点；

(2)$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续，但 $|f(x)|$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续；

(3)$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处有定义，但仅在一点连续.

7. 研究下列函数的连续性.

(1) $f(x)=x^2\cos x+e^x$；

(2) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^3-27}$；

(3) $f(x)=\sqrt{-x^2-x+12}$.

8. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\left(\pi\sqrt{\dfrac{x+1}{5x+3}}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\ln(2-x)}{3\arctan x-\dfrac{\pi}{4}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln n-\ln(n+2)]$.

9. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$ 且 $a\neq 0$，求常数 a 的值.

10. 证明方程 $x\ln x=2$ 在$(1,\mathrm{e})$内至少有一实根.

11. 证明方程 $x^5+x=1$ 有正实根.

项目二　导数与微分

任务一　导数的概念

习　题　1-2-1

1. 设某产品的总成本 C 是产量 q 的函数:$C=q^2+1$,求:

(1) 当从 $q=100$ 到 $q=102$ 时,自变量的改变量 Δq;

(2) 当从 $q=100$ 到 $q=102$ 时,函数的改变量 ΔC;

(3) 当从 $q=100$ 到 $q=102$ 时,函数的平均变化率;

(4) 总成本在 $q=100$ 处的变化率.

2. 设 $f(x)=2\sqrt{x}$,根据导数定义求 $f'(4)$.

3. 根据函数导数定义,证明$(\cos x)'=-\sin x$.

4. 已知 $f'(a)=k$，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a-x)-f(a)}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$.

5. 已知 $f(0)=0, f'(0)=1$，计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}$.

6. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^5$；　　(2) $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$；

(3) $y=\mathrm{e}^{-x}$；　　(4) $y=2^x\cdot\mathrm{e}^x$；

(5) $y=\lg x$；　　(6) $y=\sin\dfrac{\pi}{4}$.

7. 问函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否可导？如可导，求其导数.

8. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ 2x, & 0<x<1\\ x^2+1, & \geqslant 1\end{cases}$$

在点 $x=0$ 和 $x=1$ 处的连续性与可导性.