经典译丛

PEARSON

信息网络技术与网络科学

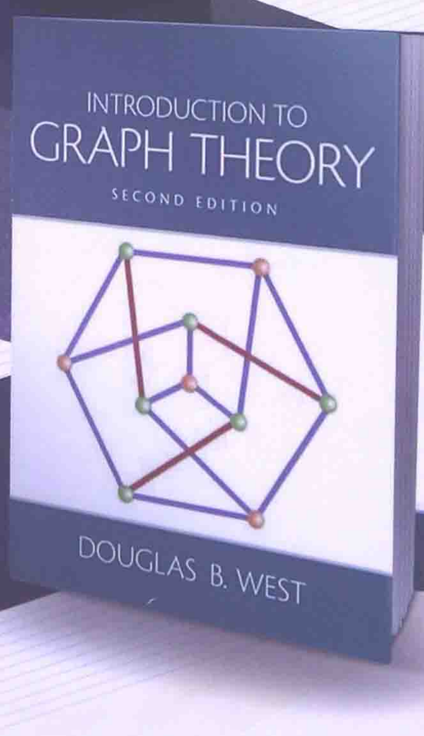
图论导引（第二版）

Introduction to Graph Theory
Second Edition

Introduction to Graph Theory
Second Edition

【美】Douglas B. West 著

骆吉洲 李建中 译



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

经典译丛·信息网络技术与网络科学

图论导引

（第二版）

Introduction to Graph Theory

Second Edition

［美］ Douglas B. West 著

骆吉洲 李建中 译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内容简介

本书系统地介绍了图论的基本概念、基本定理和算法，同时还介绍了一些悬而未决的图论问题和图论的新研究成果，旨在帮助读者理解并掌握图的结构和解决图论问题的技巧。全书包含 8 章和 7 个附录。第 1～4 章介绍图的概念、树和距离、匹配问题和图的分解问题、图的连通性等基本内容；第 5～8 章分别介绍了组合图论、拓扑图论的知识，图论中的边和环，以及图论的其他主题。书中配有大量例题和超过 1200 道习题，使读者容易理解书中的概念和定理，并掌握证明技巧。本书内容丰富，具有很多可选择阅读的章节，可以供不同层次的读者使用。

本书不仅可以作为从事图论及相关领域的研究人员、专业人员和技术人员必不可少的参考资料，还非常适合作为普通高等院校应用数学、计算机科学与技术、电子信息工程、通信工程、网络科学与技术、社会科学和管理科学等专业本科生及研究生课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

图论导引：第 2 版/(美)韦斯特(West, D. B.)著；骆吉洲，李建中译. —北京：电子工业出版社，2014. 10
(经典译丛·信息网络技术与网络科学)
书名原文：Introduction to Graph Theory, Second Edition
ISBN 978-7-121-23799-7

I. ①图…　II. ①韦…　②骆…　③李…　II. ①图论-高等学校-教材　IV. ①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 152632 号

策划编辑：张小乐
责任编辑：张小乐　　特约编辑：胡　雯
印　　刷：涿州市京南印刷厂
装　　订：涿州市京南印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：28.75　字数：736 千字
版　　次：2014 年 10 月第 1 版(原著第 2 版)
印　　次：2014 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：75.00 元

凡所购买电子工业出版社的图书有缺损问题，请向购买书店调换；若书店售缺，请与本社发行部联系。联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

译　者　序

1736 年，瑞士数学家 L. Euler 在他的一篇论文中讨论了 Knigsberg 七桥问题，由此产生了一个全新的数学分支——图论(graph theory)。在经历了 200 多年的发展之后，图论已经积累了大量的理论和结果，其应用领域也逐步扩大。最初，图论主要用来讨论游戏中遇到的问题；19 世纪晚期，图论已经被用来研究电网络方程组和有机化学中的分子结构；20 世纪中叶以后，借助于计算机，图论又被用来求解生产管理、军事、交通运输、计算机和通信网络等领域中的许多离散性问题，同时图论中一些著名问题也借助于计算机得到了证明。如今，图论本身及其在物理、化学、运筹学、计算机科学、电子学、信息论、控制论、网络理论、社会科学和管理科学等领域中的应用越来越受到人们的重视。因此，作为理工科相关专业的学生，全面系统地学习图论中的概念、基本定理和算法，并了解图论中一些悬而未决的问题是十分必要的。本书为学习和掌握这些知识提供了一部优秀的教科书。

本书由 Douglas B. West 教授所著。Douglas B. West 教授是 Illinois 大学数学系的资深教授，长期从事图论理论和组合优化方面的研究工作。他的其他著作，如 *Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs*，*Combinatorial Mathematics* 和 *The Art of Combinatorics*，也深受读者的喜爱。本书一直是 Illinois 大学数学系本科生和研究生图论课程的教科书。本书的翻译和出版，对于国内读者学习并应用图论知识具有重要意义。有幸承担该书的翻译工作，我们感到十分荣幸。

本书旨在介绍图论的基本概念、基本定理和算法，帮助读者理解掌握图的结构和解决图论问题的技巧。本书在系统介绍图论的基本概念、基本定理和算法的同时，还介绍了一些悬而未决的图论问题，并配置了大量的例题和习题。图论中许多问题都有多个证明，作者对这些证明进行了精心选择。纵观全书，作者深入浅出、全面地介绍了图论的证明技巧。证明与应用实例并举是本书的一个重要特点，使读者容易理解书中的概念和定理。该书配置了大量习题，总量超过 1200 道。通过这些习题，读者可以深刻理解图论的基本概念和证明技巧，并能够学习到正文未包括的知识。

与其他图论教材相比，本书包含了更多的基本内容，具有更多可供选择阅读的章节，包含了更多的新研究结果和悬而未决的问题，并且特别强调图论论证方法的学习和掌握。基本内容可以帮助读者建立图论的知识框架，掌握图论的基本证明方法。选读内容是对基本知识的有益补充和延伸，而最新的研究成果和悬而未决的问题则可以帮助读者接触图论研究的前沿。因此，本书可供不同层次的读者使用。它可以作为高等院校数学系本科生、研究生，计算机专业和其他专业研究生的图论课程教材，也可以作为有关教师和工程技术人员参考书。

本书由哈尔滨工业大学骆吉洲和李建中合作翻译完成。译者在深刻理解本书的基础上力求准确，对于发现的多处笔误和印刷错误，在翻译时进行了更正。在本书的翻译过程中，译者得到了多位同事和朋友的帮助，他们提出了很多中肯的意见和建议，使译者受益良多。在此一并致谢！同时也向提出宝贵意见的所有读者表示感谢。

限于水平，译文中疏漏和错误难免，敬请读者批评指正。如有任何建议，请发送邮件至 luojizhou@ hit. edu. cn。

前　　言

图论是训练离散数学证明技巧的乐园，其结果在计算科学、社会科学和自然科学等各个领域具有广泛应用。本书为本科生或研究生提供了一个或两个学期的图论课程内容。本书不要求任何图论的预备知识。尽管本书包含了许多算法和应用，但重点是理解图的结构和分析图论问题的技巧。

目前已经有许多图论的教科书。由 J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty 撰写的经典教材《图论及应用》(*Graph Theory with Applications*, Macmillan/North-Holland [1976]) 突出了证明和应用两个方面，故本书的原型参照了该书。图论至今仍是一个年轻的学科，应该如何介绍图论的知识，大家仍然没有一致的看法。内容的选择和顺序的安排，证明方法的选择，目标的选择，习题的选择等一直是有争议问题。对本书多次修改使我懂得了对于上述问题做出决策是多么得困难。本书是我对上述有争议问题的一点贡献。

关于第二版

第二版的修订采用了更简洁的行文方式，以方便学生学习和教师教学。全书总体内容没有太大变化，只是对内容的表述方式做了修改，使其更易理解，这一点在本书的前几部分尤其明显。有关第二版的变化，稍后将详细论述，在此仅做一个概述。

- 必修内容中出现的选修内容现在用“*”号区分。这些内容不会在后续内容中使用，因而可以跳过。忽略多数选修内容以后，本书可以作为一学期的图论教学内容。当某一小节被标记为“可选”时，该小节的全部内容都是选修的，这时不再标记该小节中的各个项。
- 对于缺乏基础知识的学生，附录 A 概述了有关集合、逻辑、归纳法、计数、二项式系数、关系和鸽巢原理等方面的相关知识。
- 重新叙述和分析了很多证明，并增加了更多的例子。
- 增加了 350 多道习题，其中多数是第 1 ~ 7 章中比较容易的题目。这样，本书的总习题量超过了 1200 道。
- 增加了 100 多幅插图。本书的插图总量超过了 400 幅。为区别插图中包括的几种类型的边框，本书把原有的实线和虚线改变为粗线和实线，提高了插图的清晰度。
- 相对简单的问题都集中放在各节习题的前面部分，用来作为热身练习。一些习题被改写，使其语义更清楚。
- 对习题的提示做了补充，增加了一个“部分习题提示”的附录。
- 为了易于查找，在附录 D 中给出了全书的术语表。
- 有关欧拉回路、有向图和 Turán 定理的内容被重新编排，以提高学习的效率。
- 第 6 章和第 7 章调换了顺序以便先介绍平面性的思想。与复杂性有关的部分改编为附录。
- 改正了专业术语中的错误，并更加强调与本书内容直接相关的术语。

本书特点

本书特点就是使学生能够深入理解本书的内容。本书包括对证明技巧的讨论、1200 多道习题、400 多幅插图以及许多例子。本书正文中出现的结论都有详细完整的证明。

很多本科学生在开始学习图论前都很少涉足证明技巧，附录 A 提供的背景阅读材料有助于初学者。如果初学者在理解和书写证明时有困难，应该结合第 1 章仔细阅读附录 A。虽然本书前面的一些章节仍然讨论了一些证明技巧(特别是归纳法)，但是更多的背景知识已经放到附录 A 中。

多数的习题需要证明。很多本科学生在论证问题方面的实践不足，这将影响他们对于图论和其他数学知识的兴趣。抛开数学而言，论证问题方面的智能训练也是极其重要的。我希望学生喜欢这种训练。学生在求解问题时，应该注意语言的使用("说出的即是你要表达的")，而且表达准确("表达的即是你要说出的")。

虽然图论中许多名词本身就表明了它们各自的定义，但太多的专业术语定义会阻碍阅读的流畅性。数学家喜欢一开始就给出一系列的定义。但学生们大都愿意在熟练掌握一个概念后再去接受下一个概念，这样他们会学得更好。学生的这个意愿和审稿者的建议使我推迟了很多定义的给出，直到需要的时候。例如，笛卡儿积的定义出现在 5.1 节的着色问题部分，线图的定义则分别出现在 4.2 节的 Menger 定理部分和 7.1 节的边着色部分，诱导子图的定义和连接的定义分别被推迟到 1.2 节和 3.1 节。

书中将有向图的介绍推迟到 1.4 节。如果在介绍图的同时介绍有向图，会使学生产生迷惑。在第 1 章的最后介绍有向图比较容易学习，能够在了解两种图的差别的同时加强对基本概念的理解。在连通性问题上，本书仍将这两个模型放在一起讨论。

本书比其他图论书籍包含了更多的内容。作为"其他主题"的可选择章节，最后一章聚集很多图论的新的研究结果，使得本书能供不同层次的读者使用。本科生的教学内容可以由前 7 章组成(去掉大部分选修内容)，第 8 章可作为有兴趣的学生的主题阅读材料。研究生的教学内容可以如下构成：第 1 章和第 2 章作为推荐阅读材料，在课堂上快速进入第 3 章，并讲授第 8 章的一些主题内容。第 8 章及前面章节的选修内容也可作为高级图论课程的基本内容。

图论中很多结果都存在多种证明，这将有助于提高学生采用多种方法处理问题的灵活性。对于同一个问题，本书可能在注记中谈及一些不同的证明方法，另外一些留作练习。

很多习题都有提示，一些提示在习题中直接给出，另一些在附录 C 中给出。标记了"－"的问题比较简单，标记了"＋"的问题将比较难。标记了"＋"的问题不应该作为本科学生的作业。标记了"！"的问题特别有价值和启发性。标记了"＊"的问题将涉及可选内容。

每组习题都以标记"－"的习题开始，根据相关章节内容的先后顺序排列。这些习题的结束由一组点标记。这部分习题要么是检查对概念的理解，要么是对这部分内容的结论的直接应用。作者在课堂上推荐做一些这样的练习作为热身，在完成主要作业题(多数这样的习题标记了"！")之前检查学生对基本概念的理解。多数标记"－"的问题是很好的考试题。如果在考试中使用其他习题，从附录 C 中提供一些提示是很好的做法。

涉及多个概念的习题出现在最后一个相关概念介绍完之后。正文中一个概念介绍完后有时会有指针指向与该概念相关的习题，全书有很多这样的指针。每小节对本节习题的引用仅由该习题的相应编号给出，对其他习题的交叉引用将通过其章、节和习题编号给出。

内容组织和修改

在第一版中，我力求内容的承接关系以及证明难度和算法复杂性循序渐进。

在第二版中，我继续保持这种风格。欧拉回路和哈密顿环仍在不同章节，并离得更远。欧拉回路的简单介绍在 1.2 节，其中包括了与之密切相关的材料。原来 2.4 节的部分内容被移到其他章节的相关部分，并删除了 Fleury 算法。

第 1 章被彻底改写。我继续避免使用术语“多重图”。它引起的问题比它能解决的问题要多，因为很多学生认为一个多重图必须有多条边。一般来说，只在需要的时候才在图的前面加上“简单”，而将“图”理解成普通的图。这样不会引起误解，因为只有在一些特定场合里考虑简单图才有意义。

第 1 章的定义被处理得更加容易理解和精确，特别是涉及路径、迹和通路等概念。原 1.1 节对于基本定义的非正式分组已经被一个“定义”部分取代。定义部分能够帮助学生更容易地找到他所需要的定义。

连同有关同构的内容，1.1 节对 Petersen 图有了更精确的介绍，对于分解和围长的概念也有清晰的阐述。这为以后的相关讨论提供了方便，同时也可以激发读者对图同构之外的其他问题感兴趣。

1.2 节至 1.4 节变得更加条理清晰。对欧拉回路的处理使 1.2 节变得更加完善。1.3 节的一些内容被删除了，使度和计数更加突出。这节还包含了原 1.4 节有关节点度的内容。1.4 节现在主要是对有向图进行介绍。

由于树和距离之间具有很多联系，第 2 章同时包含了这两部分内容。很多习题包含这些概念，计算距离的算法也会产生或用到树。

很多图论专家认为 König-Egerváry 定理需要一个与网络流无关的独立证明。学生在区分“k-连通”和“连通度 k”时遇到麻烦，而且“k-可着色”和“色数 k”也有同样的关系。因此，我首先介绍匹配，然后用匹配证明 Menger 定理。匹配和连通性都在着色问题中有所应用。

为了满足大量读者的要求，我在 3.1 节结尾增加了一个可选小节，介绍支配集。通过强调顶点覆盖而不是增广路径，并使用很多较好的例子，使得加权二分匹配的概念更加清晰易懂。

在第一版中，Turán 定理仅使用了顶点度和归纳的基本思想，因此这部分内容出现在第 1 章。这样的安排使学生感到 Turán 定理太抽象，难以理解。为此，考虑到与着色相关的极值问题，1.3 节仅保留了与简单三角形无关的情况(Mantel 定理)，而将完整的 Turán 定理移至 5.2 节。

关于平面性的章节现在移至“边和环”的前面。当课时不足时，平面性应优先讲授，因为它比可着色性和哈密顿环更重要。与平面性相关问题的可视性较强，易于被学生接受，而且许多学生在这之前已经遇到过这些问题。相对于本书前面的内容，平面图的一些想法似乎比证明着色问题和哈密顿环路问题使用的方法更易于接受和理解。

先讨论平面性问题将会使第 7 章的内容更加条理清晰。新的编排将会使平面性、边着色、哈密顿环路等问题之间关系的讨论更全面，并自然引出超出四色定理的新的选学内容。

当学生们发现着色和哈密顿环路问题缺乏好的算法时，很多人开始关心问题的 NP 完全性。附录 B 满足了他们的好奇心。使用形式语言来叙述 NP 完全性问题会使问题更抽象，故很多学生更喜欢用图论的术语来描述 NP 完全性问题。NP 完全性的证明也说明了“图变换”的多样性和有用性。

本书探讨了基本结果之间的关系。2-因子 Petersen 定理(见第 3 章)使用了欧拉回路和二

分匹配。对于 Menger 定理和最大流 - 最小割定理的等价关系比第一版有更深入的探讨。“棒球淘汰问题”的应用被论述得更加详尽。k-色临界图的 $k-1$-连通性用到了二分匹配(见第 5 章)。5.3 节对完美图做了简要的介绍，着重强调了弦图。与其他书相比，本书包括了 Vizing 定理的算法证明和使用 Thomassen 方法对 Kuratowski 定理的证明。

本书的前 7 章还有很多其他的增加和改进。第 6 章末尾对 Heawood 公式和 Robertson-Seymour 定理进行了简要的讨论。7.1 节增加了关于边-色数的 Shannon 界限的证明。5.3 节给出了一个有关单纯顶点的更强的结果，这使得弦图的性质变得更简单明了。6.3 节删掉了 Birkhoff 钻石可归约性证明，增加了有关卸载问题的讨论。定理证明的讨论是可选择的，目的在于在没有开始详细证明之前给出关于证明的思路。从这个观点出发，可归约性证明似乎不是重点。

第 8 章包含了一些图论的新内容，这些内容不适合作为本科生的教学内容。这一章比前几章的内容更复杂而且撰写得更简练。这一章的各节是独立的，每节都从一个大的主题中选择了最具吸引力的研究结果。某些小节越接近结尾越难理解。在讲授这部分内容时，教师应该选取某些节比较靠前的内容讲授，而不要讲授全部内容。

第 8 章和前 7 章的选学内容可能会偶尔相关，但一般均通过交叉引用指出这些联系。与第一版相比，第 8 章的内容没有太大变化，只是改正了错误并使得许多地方的叙述更加清晰。

The Art of Combinatorics 一书全面讨论了高级图论。其中，第Ⅰ卷介绍极值图论，第Ⅱ卷介绍图的结构，第Ⅲ卷讨论拟阵和整数规划(包括网络流)，第Ⅳ卷重点介绍组合学方法并讨论图特别是随机图的各个方面。

课程的设计

第 1 ~7 章的 22 节中，每节用两个学时来讲述，跳过其中大部分可选内容(被标注了星号或可选小节)。我讲课时，用 8 个学时讲解第 1 章;用 12 个学时讲解第 4 章和第 5 章，每章 6 个学时;用 20 个学时讲解第 2、3、6、7 章，每章 5 个学时。于是，本书的基本内容可以用 40 个学时讲授完毕。教师也可以在第 1 章花更多的时间，而删掉后面章节的部分内容。

对第 1 章之后的各章，最重要的内容都放在第 1 节。在一学期内只讲授这部分内容，也能使学生对图论有一个大致的了解。在第 2、4、5、6、7 章的第 2 节中，分别讲授 Cayley 公式、Menger 定理、Mycielski 构造、Kuratowski 定理和 Dirac 定理，对学生是有益的。

一些可选内容在课堂上讲授是很具有吸引力的。例如，我经常讲授 2.1 节的不相交生成树和 3.2 节的稳定匹配等内容。我也讲授 3.3 节有关 f-因子的可选小节。前 7 章的某些小节被标记为选学内容，是因为以后不再涉及这些内容，而且这些内容也不属于图论的基础部分。然而，这些内容是能够引起学生兴趣的很好的应用。对学生来说，选学内容在期末考试时不会出现。

研究生课程跳过前两章和如下的内容：图序列、有向图的核、Cayley 公式、矩阵树定理和 Kruskal 算法。

如果在每年四学期制的一个学期中讲述图论课程，需要突出重点。建议按照下面的大纲讲授。1.1 节：邻接矩阵、同构和 Petersen 图；1.2 节：全部；1.3 节：度-和公式和大二分子图；1.4 节：讲授到强连通分支，加上竞赛图；2.1 节：讲授到树中心；2.2 节：讲授到矩阵树定理；2.3 节：Kruskal 算法；3.1 节：几乎全部；3.2 节：不讲；3.3 节：Tutte 定理的叙述和 Petersen 结论的证明；4.1 节：讲授到块的定义，忽略 Harry 图；4.2 节：讲授到开耳分解，加上 Menger 定理；4.3 节：流和分割的对偶性并叙述最大流与最小割之间的相等关系；5.1 节：讲授到 Szekeres-Wilf 定理；5.2 节：Mycielski 构造和 Turán 定理；5.3 节：讲授到着色递归，加上

弦图的完美性；6.1 节：K_5 和 $K_{3,3}$ 的非平面性、对偶图的例子以及欧拉公式及其应用；6.2 节：Kuratowski 定理和 Tutte 定理的叙述和例子；6.3 节：5 色定理和交叉数的思想；7.1 节：讲授到 Vizing 定理；7.2 节：讲授到 Ore 条件和 Chvátal-Erdös 条件；7.3 节：Tait 定理和 Grinberg 定理。

教学方法的进一步说明

在这一版中，我强调可以自然地从相关材料中得到的那些结果，讲课时强调这些内容有助于内容的融会贯通。

更多地强调了 TONCAS 这一要点，即"显然的必要条件也是充分的"。书中明确指出，很多基础结果都可以用这种方式来理解。这既为本课程提供了一个主题，也使得等价关系中简单的一面和复杂的一面之间的区别更加明显。

另外，第 3 至 5 章至及 7.1 节中强调得较多的要点是最大、最小值问题间的对偶性。在图论课程中，没人想深入钻研线性优化问题中的对偶的本质。只需明白构成对偶对的两个问题具有如下性质即可：极大值问题的任意可行解的取值不超过极小值问题的任意可行解的取值。如果两个互为对偶的问题具有相同取值的可行解，则由对偶性可知这两个可行解都是最优的。有关线性规划的讨论放在 8.1 节中。

其他的要点均属于证明技巧。其一是用极端化方法来简化证明并避免使用归纳法。其二就是用归纳法证明条件性命题的方法，关于这一点在注记 1.3.25 中有明确的说明。

导出 Kuratowski 定理的过程有点长。尽管如此，最好在一个学时内完成其证明。为了节省时间，可以简单处理，将该问题归约到 3-连通情况的那些预备引理。注意，用归纳法可以很自然地用两个引理来证明 3-连通的情况。此外，还要注意到证明使用了 5.2 节中定义的 S-突起的概念。

第 6 章的第 1 个学时不要就作图和区域等技术定义做冗长的讨论。最好将这些概念当作直觉概念，除非有学生问起它们的细节。正文中有这些概念的精确叙述。

由于在后续的行文中不再涉及，1.4 节中启发得出有向图概念的那些例子被标记为选学内容。但这些例子可以使读者更清晰地认识到模型（图还是有向图）的选取取决于应用。

由于图论不强调数值计算而强调证明技巧和解释的清晰，这是用来培养学生书面和口头交流能力的一门很好的课程。除了布置一些书面作业并要求学生仔细书写其论述过程外，我发现举行一些"讨论式学习"的活动也是很有成效的，这时学生们讨论一些问题，而我则在教室巡视、听取同学的讨论并回答他们的问题。别忘了，考察一个人是否真正理解了证明过程的最好方法就是让他给别人解释这个证明。参与这种讨论的同学均受益匪浅。

致谢

本书得益于许多大学在课堂教学中对前一版教材的不断改进。按时间顺序排序，使用过这本教材的教师有：Ed Scheinerman（Johns Hopkins），Kathryn Fraughnaugh（Colorado-Denver），Paul Weichsel/Paul Schupp/Xiaoyun Lu（Illinois），Dean Hoffman/Pete Johnson/Chris Rodger（Auburn），Dan Ullman（George Washington），Zevi Miller/Dan Pritikin（Miami-Ohio），David Matula（Southern Methodist），Pavol Hell（Simon Fraser），Grzegorz Kubicki（Louisville），Jeff Smith（Purdue），Ann Trenk（Wellesley），Ken Bogart（Dartmouth），Kirk Tolman（Brigham Young），Roger Eggleton（Illinois State），Herb Kasube（Bradley）和 Jeff Dinitz（Vermont）。其中的很多人和他们的学生都对本书提出了宝贵的修改意见。

我要感谢 Prentice Hall 的 Geogre Lobell。感谢他长期的帮助并找到本教材的审阅人。审阅人 Paul Edelma, Renu Laskar, Gary MacGillivray, Joseph Neggers, Joseph Malkevitch, James Oxley, Sam Stueckle 和 Barry Tesman 提出了宝贵的意见。第 8 章的早期版本的审阅人包括 Mike Albertson, Sanjoy Barvah, Dan Kleitman, James Oxley, Chris Rodger 和 Alan Tucker。第二版的审阅人有 Nate Dean, Dalibor Froncek, Renu Laskar, Michael Molloy, David Sumner 和 Daniel Ullman。

从第一版到第二版的很多修改意见来自读者。这些修改包括从排版错误到简化证明、附加练习。这些贡献的累积效果对本书的完成是非常重要的。在这里我要感谢他们对本书的审阅和意见。这些人士包括 Troy Barcume, Stephan Brandt, Gerard Chang, Scott Clark, Dave Gunderson, Dean Hoffman, John D' Angelo, Charles Delzell, Thomas Emden-Weinert, Shimon Even, Fred Galvin, Alfio Giarlotta, Don Greenwell, Jing Huang, Garth Isaak, Steve Kilner, Alexandr Kostochka, Andre Kundgen, Peter Kwok, JeanMarc Lanlignel, Francois Margot, Alan Mehlenbacher, Joe Miller, Zevi Miller, Wendy Myrvold, Charles Parry, Robert Pratt, Dan Pritikin, Radhika Ramamurthi, Craig Rasmussen, Bruce Reznick, Jian Shen, Tom Shermer, Warren Shreve, Alexander Strehl, Tibor Szabo, Vitaly Voloshin 和 C. Q. Zhang。

特别感谢 John Ganci 对本书极其认真的阅读！

在第二版再版的时候，学生们发现了许多排版错误。这些学生包括 Jaspreet Bagga, Brandon Bowersox, Mark Chabura, John Chuang, Greg Harfst, Shalene Melo, Charlie Pikscher 和 Josh Reed。

第一版的封面绘画是由 Ed Scheinerman 使用美国军方 Ballistic 实验室的 BRL-CAD 完成的。第二版的封面绘画是由 Maria Muyot 使用 CorelDraw 完成的。

Chris Hartman 在为第一版参考文献的准备方面做了重要工作，新的参考文献现在已经加入。Ted Harding 帮助解决了第一版在排版方面的困难。

帮助建立第一版索引的学生包括 Maria Axenovich, Nicole Henley, Andre Kundgen, Peter Kwok, Kevin Leuthold, John Jozwiak, Radhika Ramamurthi 和 Karl Schmidt。用来构成第二版索引的原始数据是用 perl 脚本编辑起来的。Maria Muyot 和 Radhika Ramamurthi 帮助完成了索引和参考书目的编写工作。

我使用 TEX 完成了本书的第二版。TEX 中的科学排版系统归功于 Donald E. Knuth。书中的插图是使用 gpic 生成的，它是一种免费的软件。

反馈

我在这里欢迎大家对本书提出更正和建议，包括对本书主题的评论、结果的归属、更新、对练习的建议、排版错误、专业术语及索引的遗漏等。请将您的宝贵信息发送至

west@ math. uiuc. edu

如果在参考文献的引用上有所遗漏，我表示特别的抱歉，并请通知我。

我建立了一个 Web 站点，包括课程提纲、勘误表、更新和其他材料，恭请您访问！

http://www. math. uiuc. edu/ ~ west/igt

在印刷之前我已将我所知道的所有的排版和数学错误更正完毕。尽管如此，我相信还会存在一些错误。请您帮助找到并通知我，以便我能及时更正。

Douglas B. West
Urbana, Illinois

目　录

第1章　基本概念

1.1　什么是图

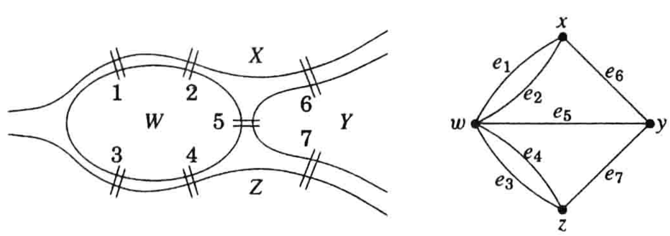
怎样布线才能使每部电话都互相连通，且花费最小？从首府到各州州府的最短路线是什么？n 项任务怎样才能最有效地被 n 个人完成？管道网络中从源点到汇集点的单位时间内的最大流是多少？一个计算机芯片需要多少层才能使同一层内线路互不相交？怎样安排一个体育联盟赛季的赛程才能使比赛在最短时间内完成？一位推销员要以怎样的顺序到达每一个城市才能使其行程时间最短？我们能用4种颜色为每张地图的各个区域着色使其相邻区域具有不同颜色吗？

这些问题以及其他的一些实际问题都涉及图论。本书将介绍图的一些理论并将其应用于这些问题。假定读者具有附录 A 提供的数学背景，即基本的数学对象和语言。

1.1.1　定义

下面例子中的问题启发我们给出图的基本定义，该问题也曾直接导致图论的诞生。

1.1.1　例　哥尼斯堡(Königsberg)桥问题。哥尼斯堡市座落于普鲁士的普莱格尔河畔。城区包括 Kneiphopf 岛和河的两岸区域。这4个区域由下图所示的7座桥连接。市民们想知道如果他们从家出发，经过每座桥恰好一次，能否返回家中。该问题被简化为遍历右侧的图，图中黑色顶点表示陆地，曲线表示桥。



由右侧的模型易知这种遍历是不存在的。每当我们到达并离开一块陆地时，要通过两座连接到该地区的桥。我们也可以把离开该地区的桥和到达该地区的桥配成一对。这样，我们寻找的遍历方法要求每块陆地与偶数座桥相连。这一必要条件在哥尼斯堡桥问题中是不能满足的。■

在1.2节当我们说明哪种结构具有可遍历性时，哥尼斯堡桥问题的意义更明确。同时，哥尼斯堡桥问题为讨论这种问题建立了一个通用模型。

1.1.2　定义　一个图 G 是由一个顶点集 $V(G)$、一个边集 $E(G)$ 和一个关系构成的三元组，其中的关系使得每一条边与两个顶点(不一定是不同的顶点)相关联，并将这两个顶点称为这条边的端点。

在纸上作图就是将每一个顶点定位到一个点上并将边用连接其端点的曲线来表示。

1.1.3 例 在例 1.1.1 的图中，顶点集为$\{x, y, z, w\}$，边集为$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$，每条边的端点如图所示。

注意 e_1 和 e_2 具有同样的端点，e_3 和 e_4 亦如此。如果在一个小水湾上有一座桥，那么桥的两端位于同一块陆地上，所以要画一条两个端点在同一点的曲线来表示它。有确切的术语来定义图中的这一类边。 ■

1.1.4 定义 一个圈是两个端点相同的一条边。重边是具有同一对端点的多条边。

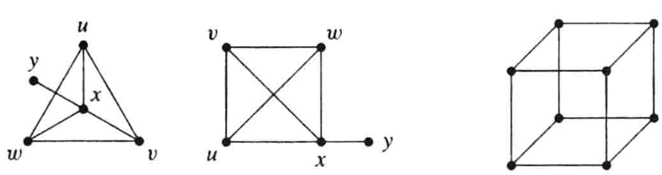
简单图是不含圈和重边的图。用点的集合和边的集合来描述一个简单图，边的集合被表示为一组无序点对的集合，用 $e = uv$（或 $e = vu$）来表示一条以 u、v 为端点的边 e。

如果 u 和 v 是一条边的两个端点，则它们是邻接的且互为邻居。用 $u \leftrightarrow v$ 来表示 u 和 v 是邻接的。

许多重要应用并不涉及圈和重边，所以本书只研究简单图。这样，一条边由它的端点来确定，进而可以用端点来命名边，正如定义 1.1.4 中所述。在简单图里把一条边视为一个无序点对并且忽略边和端点间的关联关系。本书着重于讲述简单图。

1.1.5 例 在下图中，左侧是同一个简单图的两个作图，该简单图的顶点集是$\{u, v, w, x, y\}$，边集是$\{uv, uw, ux, vx, vw, xw, xy\}$。

"顶点"和"边"这两个术语源自立体几何。一个立方体具有多个顶点和多条边，它们组成了一个图的顶点集和边集。这个图如右侧的图形所示，图中忽略了顶点和边的名称。 ■



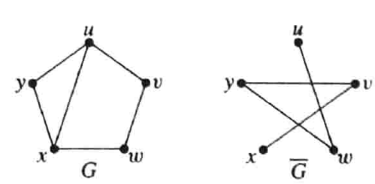
如果一个图的顶点集和边集都是有穷的，则该图是有穷的。除非明确指出，约定本书中的每一个图都是有穷的。

1.1.6 *注记 顶点集和边集是空集的图称为空图。将一般的定理推广到包含空图的情况只会引来不必要的烦琐，所以本书忽略它。所有讨论和习题均假定图的顶点集是非空的。 ■

1.1.2 图模型

图以多种形式出现。一些应用可直接得到与图的结构相关的有用概念和术语。

1.1.7 例 相识关系和子图．任意 6 个人中都有 3 个人相互认识或相互陌生吗？由于"认识"是对称的，可以用一个简单图来对该问题建模，图的每个顶点表示一个人，每条边表示一对互相认识的人。相同集合上的"不认识"关系产生另一个图，其边集是前一个图的边集的"补集"。下面来介绍这些概念的术语。 ■



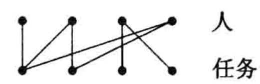
1.1.8 定义 一个简单图 G 的补图 $\overline{G}$ 也是一个简单图，其顶点集为 $V(G)$，且 $uv \in E(\overline{G})$ 当且仅当 $uv \notin E(G)$。团是图中两两相邻的顶点构成的集合。独立集(或稳定集)是图中由两两互不相邻的顶点构成的集合。

在例 1.1.7 的图 G 中，$\{u, x, y\}$ 是一个大小为 3 的团，$\{u, w\}$ 是一个大小为 2 的独立集，

它们分别是最大团和最大独立集。这两个值在 $\overline{G}$ 中正好调换，因为在补图的定义下团变成了独立集(反之亦然)。例 1.1.7 中的问题等价于是否任意 6 顶点图都有一个大小为 3 的团或独立集(见习题 1.1.29)。从 G 中删除 ux 就产生一个 5 顶点图，其中没有大小为 3 的团或独立集。

1.1.9　例　任务分派与二分图。有 m 项任务和 n 个人，但不是所有人都胜任所有任务，能为每个任务找到合适的人选吗？同样，用一个简单图 H 来对这个问题建模，其中的顶点表示任务和人。如果人 p 胜任任务 j，则令 j 与 p 相邻。

每一项任务正好由一个人完成，每一个人最多执行一项任务。这样需要在 H 中找到 m 条相互独立的边(将边视为顶点对)。第 3 章将讲解怎样对此进行测试。对下面的图来说，找不到这样的边。

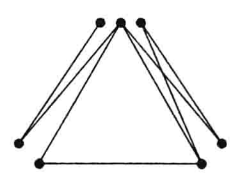


很多重要应用都可以用图来对两个互不相交的集合建模。在有些图中，顶点集可以被划分成两个独立集，需要给这些图起个名字。■

1.1.10　定义　图 G 称为二分图，如果 $V(G)$ 是两个互不相交的独立集(可以是空集)的并集，这两个集合称为图 G 的部集。

1.1.11　例　时刻表与图的着色。假设要安排参议院的会议日程表。如果两个委员会有相同成员，则不能将这两个委员会的会议安排在同一时间。那么需要多少个不同的时间段呢？

为每一个委员会构造一个顶点，如果两个委员会有公共成员，则相应的两个顶点是相邻的。要给这些顶点分配标识(时间段)使得每条边的端点都有不同的标识。下面的图有 3 个独立集，可以给每一个独立集分配一个标识。团中的所有成员必须被分配不同的标识，故这个例子至少需要 3 个时间段。



因为只对顶点集的划分感兴趣，且标记没有数值意义，故将标识称为颜色会更方便。■

1.1.12　定义　图 G 的色数，记为 $\chi(G)$，是使邻接顶点获得不同颜色的所需颜色的最小数目。如果 $V(G)$ 可以被表示为 k(可以为空)个独立集的并，则图 G 是 k-分的。

这就推广了二分图的思想——二分。具有相同颜色的顶点必构成一个独立集，所以 $\chi(G)$ 是分解 $V(G)$ 的所需独立集的最小数目。一个图是 k-分的当且仅当它的色数最多为 k。当提到分解成独立集的划分中的一个集合时，用“部集”来指代它。

将在第 5 章中学习色数和图的着色。图论中最著名(或最难处理)的问题就是地图的着色问题。

1.1.13　例　地图与着色。笼统地讲，一幅地图就是将一个平面分解成相连的区域。能否用最多 4 种颜色来为每幅地图着色，使得相邻区域具有不同颜色呢？

为了将地图着色与图的着色联系起来，用一个顶点来表示一个区域，用一条边来表示两个区域具有公共边界。四色问题即所得的图的色数是否至多为 4。这个图可以画在平面上而不产生互相交叉的边，这种图称为可平面图。定义 1.1.12 前面的那个图是平面图；它有一个交叉点，但另一种画法则没有交叉边。将在第 6 章中学习可平面图。■

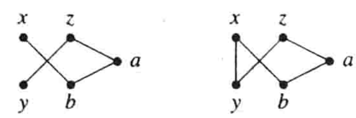
1.1.14　例　公路网中的路线问题。可以用图来表示一个公路网，图中的边表示交叉点间的一段路。可以通过给边加权来衡量距离或行进时间。在这里，边表示物理连接。怎样才能找到从 x 到 y 的最短路线？本书将在第 2 章中讲解这个问题。

如果图中的顶点表示我们的家和其他目的地，那么希望行走路线上每一个顶点恰好经过一次。本书将在第 7 章中研究这种路线是否存在。

本书需要一些术语来描述图中的这两种路线。■

1.1.15　定义　一条路径是一个简单图，其顶点可以排序，使得两个顶点是邻接的当且仅当它们在顶点的序列中是前后相继的。一个环是一个顶点数和边数相等的图，其顶点可以放置于一个圆周上，使得两个顶点是邻接的当且仅当它们在圆周上相继出现。

右图给出了一条路径和一个环，顶点序列是 x, b, a, z, y。从环中删除掉一条边会产生一条路径。在公路网中研究路线时，仅考虑含于图中的路径和环。同时，又希望交通网络中的每一个顶点都可以到达其他任何一个顶点。下面的定义精确地给出了这些概念。



1.1.16　定义　图 G 的子图是图 H，它满足 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$ 且 H 中边的端点的分配和 G 中的一样。用 $H\subseteq G$ 来表示“G 包含 H”。

如果 G 中的每一对顶点都属于某一条路径，则称图 G 是连通的；否则，称图 G 是非连通的。

定义 1.1.12 前面的那个图有 3 个子图是环，它是连通图。但例 1.1.9 中的图不是连通图。

1.1.3　矩阵与同构

如何描述一个图呢？可以列出所有的顶点和边(带上端点)，当然还有一些其他有用的描述方法。一个图是无圈的是指该图允许出现重边但不允许出现圈。

1.1.17　定义　令 G 是一个无圈图，其顶点集 $V(G)=\{v_1, \cdots, v_n\}$，边集 $E(G)=\{e_1, \cdots, e_m\}$。$G$ 的邻接矩阵记为 $A(G)$，是一个 $n\times n$ 的矩阵，元素 a_{ij}是以 v_i和 v_j为端点的边的数目。G 的关联矩阵 $M(G)$是一个 $n\times m$ 的矩阵，如果 v_i是 e_j的端点，则元素 m_{ij}是 1，否则为 0。

如果顶点 v 是边 e 的端点，则称 v 和 e 是关联的。顶点 v 的度(在无圈图中)是其关联边的数目。

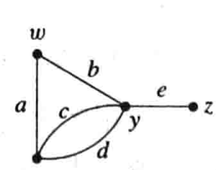
在带圈的图中，确切定义邻接矩阵，关联矩阵或顶点的度的方法依赖于具体的应用。1.2 节和 1.3 节会讨论到这个问题。

1.1.18　注记　邻接矩阵由顶点的顺序决定。任意邻接矩阵都是对称的(对于所有的 i, j, $a_{ij}=a_{ji}$)。简单图的邻接矩阵的元素是 0 或 1，对角线上的元素都是 0。v 的度是 $A(G)$或 $M(G)$中 v 相应的行中的元素之和。

1.1.19　例　对下面的无圈图 G，给出了邻接矩阵和关联矩阵，顶点序列是 w, x, y, z，边序列是 a, b, c, d, e。通过观察图 G 或把两个矩阵中对应 y 的行的元素求和，均可得 y 的度是 4。■

$$\begin{array}{c} \\ w\\ x\\ y\\ z\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$A(G)$



G

$$\begin{array}{c} \\ w\\ x\\ y\\ z\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$M(G)$