

高等学校教材

石油工程非牛顿流体力学

杨树人 崔海清 等编著

石油工业出版社
Petroleum Industry Press

高等学校教材

石油工程非牛顿流体力学

杨树人 崔海清 等编著

石油工业出版社

内 容 提 要

非牛顿流体力学是由流变学发展起来的研究非牛顿流体应力和应变的关系及非牛顿流体流动问题的分支学科。本书从非牛顿流体力学的研究内容和研究方法入手,采用张量分析的方法研究非牛顿流体力学的基本方程、非牛顿流体流动的规律、流变参数的测定等。本书逻辑清晰、层次性强、数学推导过程简明扼要。

本书可作为石油院校钻井工程和采油工程专业的教材,也可作为相关工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

石油工程非牛顿流体力学 / 杨树人, 崔海清等编著.
北京: 石油工业出版社, 2013.10

(高等学校教材)

ISBN 978-7-5021-9690-5

I. 石…

II. ①杨…②崔…

III. 非牛顿流体力学 - 应用 - 石油工程 - 高等学校 - 教材

IV. TE

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 165362 号

出版发行: 石油工业出版社

(北京安定门外安华里 2 区 1 号 100011)

网 址: <http://pip.cnpc.com.cn>

编辑部: (010) 64523574 发行部: (010) 64523620

经 销: 全国新华书店

印 刷: 北京中石油彩色印刷有限责任公司

2013 年 10 月第 1 版 2013 年 10 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 开本: 1/16 印张: 13.25

字数: 336 千字

定价: 27.00 元

(如出现印装质量问题, 我社发行部负责调换)

版权所有, 翻印必究

前 言

随着石油工业中新技术的不断涌现,在石油钻井、石油开采和油气地面集输过程中,经常遇到复杂混合物的流动问题,而这些流体的非牛顿性越来越明显,所涉及的非牛顿流体力学理论知识越来越多。因此,近年来各石油高校纷纷开设了非牛顿流体力学课程,但各高校采用的教材以及教学内容不尽相同。为了利于石油高校非牛顿流体力学的教学内容的规范统一和教学水平的提高,在总结了非牛顿流体力学本科和研究生教学工作经验的基础上,结合编著者近年来承担的国家自然科学基金项目“非牛顿流体在内管做行星运动的偏心环空中的流动”(批准文号 50374018)和“粘弹性流体在内管做轴向往复运动的偏心环空中的非定常流”(批准文号 50674019)等 20 余项课题的研究成果编写了本书。

在本书的内容编排上,注重理论体系的完整性,同时将基础理论与工程应用有机结合。首先,为使读者能够更好地学习和掌握非牛顿流体力学,引入了研究非牛顿流体力学所必需的矢量分析、场论和张量等工程数学方面的基础知识;其次,在介绍了牛顿流体和非牛顿流体等概念的基础上,运用流体力学的方法建立了非牛顿流体的本构方程和流动方程;再次,根据石油工程专业的特点,重点研究了非牛顿流体在圆管和环形空间中的轴向流动规律、非牛顿流体在偏心环空中的轴向层流流动规律、非牛顿流体在圆管和环形空间中的螺旋流动规律,以及非牛顿流体的紊流流动规律;最后,介绍了非牛顿流体流变参数的测定方法。

本书全部内容经编著者共同讨论,由杨树人统稿,具体分工如下:第一章、第五章、第七章由王春生编写;第二章由杨树人编写;第三章由杨晶编写;第四章由韩洪升编写;第六章由崔海清编写;第八章由刘丽丽编写。

在本书的编写过程中得到了东北石油大学流体力学教研室其他教师的大力支持和帮助,在此表示感谢。

由于受编著者学术水平的限制,书中难免有疏漏之处,敬请读者批评指正。

编著者

2013 年 7 月

目 录

第一章 场论及张量基础	(1)
第一节 场论	(1)
第二节 符号及求和约定	(17)
第三节 矢量的变换规律	(22)
第四节 笛卡儿张量	(27)
第五节 笛卡儿张量的代数运算	(32)
第六节 二阶张量的主轴和主值	(36)
第七节 笛卡儿张量的微分	(42)
第二章 非牛顿流体与非牛顿流体力学	(46)
第一节 非牛顿流体及其分类	(46)
第二节 非牛顿流体力学的研究内容和研究方法	(50)
第三章 非牛顿流体力学基本方程	(53)
第一节 连续介质力学的基本概念	(53)
第二节 应力张量	(54)
第三节 应变张量	(56)
第四节 连续性方程和运动方程	(59)
第五节 本构方程	(63)
第六节 初始条件和边界条件	(68)
第四章 非牛顿流体在圆管和环形空间中的轴向流动	(70)
第一节 均匀流动方程式	(70)
第二节 圆管和环形空间中牛顿流体的层流	(72)
第三节 圆管中黏性流体层流的基本方程	(75)
第四节 环形空间中黏性流体的基本方程	(77)
第五节 圆管和环形空间中幂律流体的层流	(79)
第六节 圆管和环形空间中宾汉流体的结构流	(84)
第七节 罗宾诺维奇—莫纳方程	(91)
第八节 非牛顿流体广义雷诺数的计算	(93)
第九节 非牛顿流体的黏度	(96)
第十节 非牛顿流体的圆管紊流压降计算	(98)
第十一节 非牛顿流体流态判别准则	(101)
第五章 非牛顿流体在偏心环空中的轴向层流流动	(107)
第一节 偏心环空中幂律流体的轴向层流	(107)
第二节 偏心环空中宾汉流体的轴向结构流	(118)

第六章 非牛顿流体在圆管和环形空间中的螺旋流动	(134)
第一节 螺旋流的基本概念	(134)
第二节 螺旋流的速度微分方程	(135)
第三节 广义稳定性参数	(140)
第四节 牛顿流体在圆管和环形空间中的螺旋流动	(141)
第五节 幂律流体在圆管和环形空间中的螺旋流动	(148)
第六节 宾汉流体在圆管和环形空间中的螺旋流动	(155)
第七章 非牛顿流体的紊流流动	(162)
第一节 稳定性参数	(162)
第二节 圆管中非牛顿流体紊流流动	(169)
第八章 流变参数测定	(179)
第一节 流变仪简介	(179)
第二节 毛细管流变仪	(180)
第三节 旋转黏度计	(186)
第四节 流变参数的回归	(195)
参考文献	(202)

第一章 场论及张量基础

第一节 场 论

一、场的定义及分类

设在空间中的某个区域内定义标量函数或矢量函数，则称定义在此空间区域内的函数为场。如果研究的是标量函数则称此场为标量场；如果研究的是矢量函数则称此场为矢量场。在场内定义的函数可以随时间改变，此时时间作为参数出现。设 \mathbf{r} 是空间点的矢径， x, y, z 是 \mathbf{r} 的直角坐标， t 是时间，则标量场和矢量场内的函数 φ 和 \mathbf{a} 可分别表示为

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x, y, z, t)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(x, y, z, t)$$

在物理及力学中，经常碰到各种不同的标量场及矢量场：温度场、压力场、密度场等都是标量场，而速度场、力场、电磁场等都是矢量场。流体力学中研究的对象就是这些标量和矢量场，因此场论的知识对于学习流体力学是必不可少的。

如果同一时刻场内各点函数的值都相等，则称此场为均匀场；反之称为不均匀场。如果场内函数值不依赖于时间，即不随时间 t 改变，则称此场为定常场；反之称为不定常场。均匀场和定常场可分别表示为

$$\varphi(t), \mathbf{a}(t)$$

及

$$\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{a}(\mathbf{r})$$

场论是研究标量场及矢量场数学性质的一门数学分支，本章只研究场的部分性质。

二、场的几何表示

用几何方法，即用图形表示一个场有助于直观地理解问题，并且具有实用意义。

先来研究如何用几何方法表示一个标量场 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ 。如果在每一时刻，场的几何表示都已经知道，则整个场的几何表示也就可以知道（如果研究的场是定常的，那么只须研究 $\varphi(\mathbf{r})$ 的本身即可）。因此，只须取任一固定时刻 t_0 研究场 $\varphi(\mathbf{r}, t_0)$ 的几何表示，令

$$\varphi(\mathbf{r}, t_0) = \text{常数} = \varphi_0$$

得到与之对应的曲面称之为等位面。在等位面上 φ 的值都相等。取一系列不同的 φ_0 值，得到空间中一组与之对应的等位面，于是整个标量场被等位面分成很多区域（图 1-1）。

作出等位面后，可以从等位面的相互位置、疏密程度看出标量函数的变化状况。例如，等位面靠得近的地方函数变化快，靠得远的地方函数变化得慢；函数值的变化主要在等位面的法线方向发生；沿等位面切线方向移动时，函数值不改变，等等。

等位面在气象学上有重要应用，例如气候图上的等压线、等温线等都是标量场的等位面。

现在研究矢量场的几何表示。矢量场的几何表示较标量场复杂，因为矢量是一个有大小及方向的量，须要分别对大小及方向作几何表示。由于矢量的大小是一个标量，所以可以用上述等位面的概念来几何地表示它。至于矢量的方向则采用矢量线来几何地表示它。所谓矢量线就是这样的线，线上每一点的切线方向与该点的矢量方向重合。可以用下面的方法作出同一时刻通过该场内任一点 M 的矢量线。如图 1-2 所示，过 M 点作该点的矢量 \mathbf{a} ，在 \mathbf{a} 上取一与 M 邻近的点 M' ，过 M' 作其上的矢量 \mathbf{a}' ，然后再在 \mathbf{a}' 上取一与 M' 相邻的点 M'' ，如此继续下去就得到一个折线 $MM'M''\dots$ ，折线上每一小段的方向和该段起点上矢量的方向重合。令 MM' 、 $M'M''$ 、 \dots 趋于零，可得一条极限曲线，显然极限曲线上每一点的切线方向与该点的切向方向重合。按照定义，他就是矢量线。下面写出确定矢量线的方程。设 $d\mathbf{r}$ 是矢量线的切向元素，则根据矢量线定义有

$$\mathbf{a} \times d\mathbf{r} = 0$$

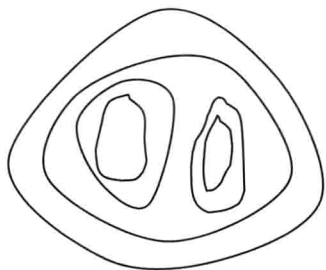


图 1-1 等位面

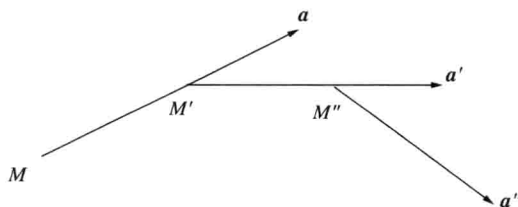


图 1-2 矢量线

写成直角坐标分量形式则为

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z, t)}$$

其中 t 是一个参数。 a_x 、 a_y 、 a_z 是矢量 \mathbf{a} 在坐标轴上的三个分量。这就是确定矢量线的微分方程。积分方程，在积分时将 t 看成参数，即得矢量线的分析表达式。

有了矢量线后，场内每一点的矢量方向可由矢量线的切向方向定出。

有时，可以从矢量线的疏密程度估计矢量在各点的大小。

在场内任取一非矢量的封闭曲线 C ，通过 C 上每一点作矢量线，则这些矢量线所包围的区域称为矢量管。

上面研究了标量场和矢量场的几何表示。下面将阐述如何表征任一时刻场内每一点邻域内的函数变化情况。换句话说，研究每一点由于场的不均匀性而引起的函数变化。

三、梯度—标量场不均匀性的量度

给定一标量场 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ (以后为了讲述方便，将场内的函数简称为场)，任务是在任一时刻描写标量场中每点邻域内的函数变化。

和以往一样，在某一固定时刻 $t=t_0$ 研究标量场 $\varphi(\mathbf{r}, t_0)$ (为了方便起见今后将 t_0 省略)。在场内任取一点 M ，过 M 点作曲线 s ，用下列极限值

$$\lim_{MM' \rightarrow 0} = \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} \quad (1-1)$$

表征标量函数 φ 在 M 点上沿曲线 s 方向的函数变化, 其中 M' 是在 s 上与 M 无限邻近的点, $\varphi(M')$ 是 M' 点上的函数值 (图 1-3)。以符号 $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ 表示式 (1-1) 中的极限值, 称为函数在 M 点上沿曲线 s 方向的方向导数, 于是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{MM' \rightarrow 0} = \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} \quad (1-2)$$

过 M 点可以作无穷多个方向, 每个方向都有对应的方向导数, 如果所有方向上方向导数都已经知道, 那么函数 φ 在 M 点邻域内的变化状况便完全清楚了。研究表明, 各个方向上的方向导数并不是相互独立的。事实上只要知道过 M 点的等位面法向方向 \mathbf{n} 上的方向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 后, 所有其他方向 s 上的方向导数都可以通过 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 及方向 \mathbf{n} , s 表示出来, 这样矢量 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n}$ 已完全扫描了 M 点邻域函数 φ 的变化状况。下面证明上述事实。

过 M 点作等位面

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(M) = C$$

及等位面的法线方向 \mathbf{n} , \mathbf{n} 指向 φ 增长的方向。在法线 \mathbf{n} 上取一与 M 点无限邻近的点 M_1 , 过 M_1 点作等位面

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(M_1) = C_1$$

过 M 点做任一方向 s , 它和等位面 $\varphi=C_1$ 交于 M' 点。显然

$$\varphi(M') = \varphi(M_1) = C_1$$

根据方向导数的定义, \mathbf{n} 方向和曲线 s 方向的方向导数是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lim_{MM_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1} \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} \quad (1-4)$$

从图 1-4 上可以看出, MM' 和 MM_1 之间存在着下列关系

$$MM_1 = MM' \cos(n, s) \quad (1-5)$$

将式 (1-5) 代入式 (1-4), 并考虑到式 (1-3) 及

$$\varphi(M') = \varphi(M_1)$$

有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} \\
 &= \cos(n, s) \lim_{MM_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1} \\
 &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cos(n, s)
 \end{aligned} \tag{1-6}$$

上式表明， s 方向上的方向导数可以通过 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 及 s 与 n 两方向之间夹角的余弦表示出来。也就是说，知道等位面 $\varphi=C$ 的法线方向 n 及其上的方向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 后，则任一方向 s 上的方向导数即可按式 (1-6) 求出。

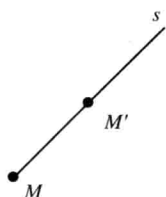


图 1-3 过 M 点的曲线

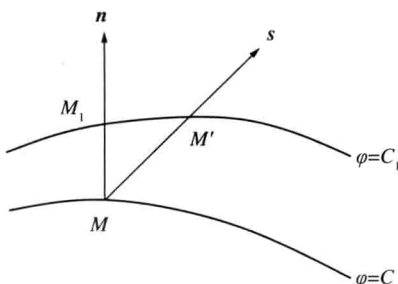


图 1-4 函数 φ 在 M 点邻域内的变化

大小为 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ，方向为 n 的矢量称为标量函数 φ 的梯度，以

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n} \tag{1-7}$$

表之，它描写了 M 点邻域内函数 φ 的变化状况，是标量场不均匀性的量度。考虑到式 (1-7)，式 (1-6) 可以改写为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = |\text{grad } \varphi| \cos(n, s) = \mathbf{s}_0 \cdot \text{grad } \varphi \tag{1-8}$$

其中 \mathbf{s}_0 是 s 方向的单位矢量。于是 s 方向的方向导数等于梯度矢量在 s 方向的投影。此外，无论从式 (1-6) 或图 1-4 中都可以看出

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right| \leq \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| \tag{1-9}$$

即函数 φ 在 n 方向的方向导数值最大， φ 在 n 方向变化最快。而在等位面切线方向的方向导数等于零，因此沿等位面方向 φ 全然不改变。

根据式 (1-8) 梯度 $\text{grad } \varphi$ 在 x, y, z 轴方向上的投影分别等于 x, y, z 轴上的方向导数

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

于是梯度 $\text{grad}\varphi$ 在直角坐标系中表达式为

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (1-10)$$

式中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ —— x, y, z 轴上的单位矢量。

总结起来, 梯度的主要性质是:

(1) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 描写了场内任一点 M 邻域内函数 φ 的变化状况, 它是标量场不均匀性的量度;

(2) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 的方向与等位面的法线重合, 且指向 φ 增大的方向, 大小是 \mathbf{n} 方向上的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$;

(3) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 在任一方向 s 上的投影等于该方向的方向导数;

(4) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 的方向, 即等位面的法线方向是函数 φ 变化最快的方向;

(5) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 在直角坐标系中的表达式是

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$$

下面证明两个实际上常常采用的梯度 $\text{grad}\varphi$ 的性质。

定理 1 梯度 $\text{grad}\varphi$ 满足关系式

$$d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \text{grad}\varphi$$

反之, 若 $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$, 则 \mathbf{a} 必为 $\text{grad}\varphi$ 。

证: 标量函数 φ 的全微分是

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

考虑

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

得到

$$d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \text{grad}\varphi$$

即 $\text{grad}\varphi$ 满足关系式 $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \text{grad}\varphi$ 。反之, 若 $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$, 另一方面 $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \text{grad}\varphi$, 两式相减后得

$$d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} - \text{grad}\varphi) = 0$$

但因 $d\mathbf{r}$ 是任意选取的方向, 故有

$$\mathbf{a} = \text{grad}\varphi$$

即得证明。

定理 2 若 $\mathbf{a}=\text{grad}\varphi$ ，且 φ 是矢径 \mathbf{r} 的单值函数，沿任一封闭曲线 L 的线积分

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

反之，若矢量 \mathbf{a} 沿任一封闭曲线 L 的线积分

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

则矢量 \mathbf{a} 必为某一标量函数 φ 的梯度，即 $\mathbf{a}=\text{grad}\varphi$ 。

证：若 $\mathbf{a}=\text{grad}\varphi$ ，则

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_L \text{grad}\varphi \cdot d\mathbf{r}$$

由上一定理知

$$d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \text{grad}\varphi$$

于是

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_L d\varphi$$

因 φ 是 \mathbf{r} 的单值函数， L 是封闭曲线，故

$$\int_L d\varphi = 0$$

得到

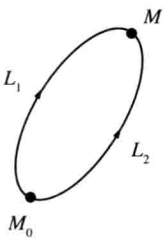
$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

反之，若矢量 \mathbf{a} 沿任一封闭曲线 L 的线积分

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

现证 \mathbf{a} 必为 $\text{grad}\varphi$ 。

首先证明，从某一定点 M_0 到任一变动点 $M(\mathbf{r})$ 的线积分与积分路线无关。为此任取两个从 M_0 到 M 的积分曲线 L_1 及 L_2 组成一封闭曲线，如图 1-5 所示。根据假定，沿此封闭曲线的线积分为零，即



即

$$\int_{M_0(L_1)}^M \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{M_0(L_2)}^{M_0} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$\int_{M_0(L_1)}^M \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{M_0(L_2)}^{M_0} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

因此从 M_0 到 $M(\mathbf{r})$ 的线积分与积分路线无关，因此积分值只是 \mathbf{r} 的函数，以 $\varphi(\mathbf{r})$ 表之，于是

图 1-5 封闭曲线 L

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{M_0}^M \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

由此得

$$d\varphi = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

根据上一定理的结果推出

$$\mathbf{a} = \text{grad}\varphi$$

定理证毕。

定理 1 及定理 2 反映了梯度的同一个性质。定理 1 是微分形式，而定理 2 是积分形式。

定理 1 和定理 2 将单值函数 φ 的梯度和 φ 的全微分以及线积分联系起来，根据全微分及线积分的运算性质，就有可能利用定理 1 和定理 2，通过全微分和线积分求函数 φ 的梯度及研究梯度的某些性质。

下面举例说明如何利用梯度的性质求某给定函数的梯度。

【例 1-1】 计算仅与矢径大小 r 有关的标量 $\varphi(\mathbf{r})$ 的梯度 $\text{grad}\varphi$ 。

下面利用梯度的不同性质求 $\varphi(\mathbf{r})$ 的梯度。

利用性质 (2)，标量函数 $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ 的等位面是以坐标原点为中心的球面，而球面的法线方向，即矢径 \mathbf{r} 的方向，故 $\text{grad}\varphi$ 的方向就是矢径 \mathbf{r} 的方向；其次 $\text{grad}\varphi$ 的大小是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \varphi'(r)$$

于是

$$\text{grad}\varphi = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

利用性质 (5)，显然

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial z}$$

因

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

故

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

于是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{d\varphi}{dr}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{d\varphi}{dr}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{d\varphi}{dr}$$

而

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\varphi &= i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{xi + yj + zk}{r} \frac{d\varphi}{dr} \\ &= \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}\end{aligned}$$

利用定理 1, 有

$$d\varphi(r) = \varphi'(r) dr = \frac{\varphi'(r)}{r} r dr$$

因

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$$

微分而得

$$2\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 2r dr$$

即

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$$

于是

$$d\varphi = \frac{\varphi'(r)}{r} r dr$$

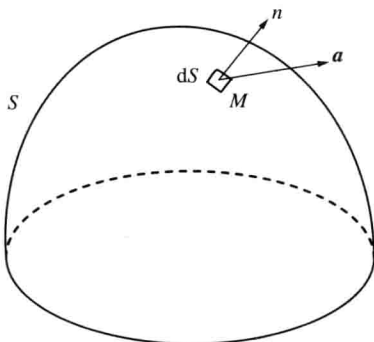
根据定理 1

$$\operatorname{grad}(\varphi) = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

最后指出, 写成 $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$ 的矢量场也称位势场, φ 称为位势函数。

四、矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量、矢量 \mathbf{a} 的散度、奥高定理

给定一矢量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ 。在场内取一曲面 S (图 1-6), 它可以是封闭的也可以是不封闭的。在 S 面上取一面积元素 dS , 在 dS 上任取一点 M , 作 S 面在 M 点的法线。若曲面是封闭的, 则通常取外法线为正方向; 若曲面是不封闭, 则可约定取某一方向为法线正方向。



令 \mathbf{n} 表示 S 面上法线方向的单位矢量, \mathbf{a} 表 M 点上的矢量函数的值, 则

$$a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a_x \cos(n, x) + a_y \cos(n, y) + a_z \cos(n, z) \quad (1-11)$$

代表矢量 \mathbf{a} 在法线方向的投影。定义

$$a_n dS$$

为矢量 \mathbf{a} 通过面积元 dS 的通量, 将之沿曲面 S 积分得

图 1-6 矢量场内一曲面

$$\int_s a_n dS \quad (1-12)$$

称为矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量。定义面积矢量 $d\mathbf{S}$ 是大小为 dS ，方向为法线正方向的量，即

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$$

考虑

$$dS \cos(n, x) = dydz$$

$$dS \cos(n, y) = dzdx$$

$$dS \cos(n, z) = dxdy$$

及式 (1-11)，矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量还可以写成下列几种形式

$$\begin{aligned} \int_s a_n dS &= \int_s \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \int_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_s [a_x \cos(n, x) + a_y \cos(n, y) + a_z \cos(n, z)] dS \\ &= \int_s (a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy) \end{aligned} \quad (1-13)$$

当 S 面是封闭曲面时，采用积分号上加一小圆圈表示矢量 \mathbf{a} 通量 S 面的通量

$$\oint_s a_n dS$$

在场内任取一点 M ，以体积 V 包之。若 V 的界面为 S ，作矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量，然后用体积 V 除之。令体积 V 向 M 点无限收缩，得极限

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_s a_n dS}{V}$$

设此极限值存在，将其定义为矢量 \mathbf{a} 的散度，以 $\text{div} \mathbf{a}$ 表示，于是

$$\text{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_s a_n dS}{V} \quad (1-14)$$

由此可见，矢量 \mathbf{a} 的散度是对单位体积而言矢量 \mathbf{a} 通过体积元 V 的界面 S 的通量。从散度的定义可以看出，它是一个不依赖于坐标系选取的数量，是一个标量。散度 $\text{div} \mathbf{a}$ 组成一标量场。

设矢量函数 \mathbf{a} 的三个分量函数 a_x 、 a_y 、 a_z 具有连续的一阶偏导数，现证此时由式 (1-14) 决定的极限值是存在的。在证明的过程中，还得到了散度 $\text{div} \mathbf{a}$ 在直角坐标系中的具体表达式。

利用数学分析中的奥高定理，有

$$\begin{aligned} \oint_s a_n dS &= \oint_s [a_x \cos(n, x) + a_y \cos(n, y) + a_z \cos(n, z)] dS \\ &= \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV \end{aligned} \quad (1-15)$$