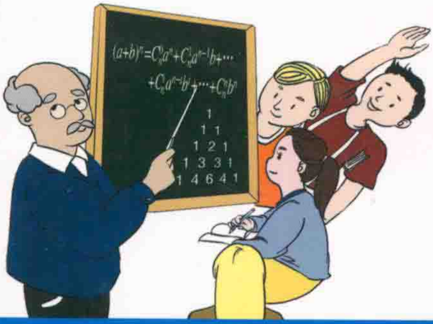


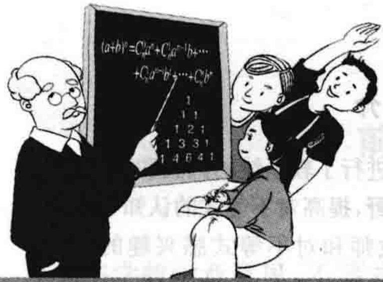
数林外传系列

跟大学名师学中学数学

凸函数与琴生不等式

◎黄宣国　编著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

凸函数与琴生不等式

黄宣国　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书将中学阶段的大量初等不等式进行了较系统的归类和介绍.阅读本书可以开拓读者在不等式方面的视野,提高对不等式的认知和解决同类问题的能力.本书适合中学数学教师和对不等式感兴趣的高中学生.

图书在版编目(CIP)数据

凸函数与琴生不等式/黄国宣编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2014.6

ISBN 978-7-312-03423-7

Ⅰ.凸… Ⅱ.黄… Ⅲ.中学数学课—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 078193 号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn
安徽江淮印务有限责任公司印刷
全国新华书店经销

开本:880 mm×1230 mm 1/32 印张:10.75 字数:319 千
2014 年 6 月第 1 版 2014 年 6 月第 1 次印刷
定价:26.00 元

前　　言

在中学数学竞赛里，不等式是一个重要的内容，怎样来学习这一内容呢？

读者知道二次函数、正弦和余弦函数、正切和余切函数，在各自满足相应条件时，它们都是凸函数(见第一节).在现实世界中，凹凸现象是层出不穷的：高山凹凸起伏，蜿蜒连绵；大海波澜壮阔，峰谷(即凹凸)迭起；在机械工业中，凸轮的应用非常广泛.用数学的语言来讲，凸函数是数学中一个值得研究的分支，它包括中学数学中大多数重要的函数.

韩愈在《进学解》里说："记事者必提其要，纂言者必钩其玄."万山磅礴，必有主峰；龙衮九章，但挈一领.不等式题目成百上千，把凸函数和不等式结合起来，从凸函数的基本不等式(琴生不等式)学起，有条不紊和较有系统地领略千姿百态的不等式领域，对提高读者的数学水平是有益的.

约一年前，得知二十多年前我写的中等数学小册子《凸函数与琴生不等式》一书难求，在市场上已是数百元一本.今年，我花了三个多月时间，将历年来我在上海、杭州、北京、天津、重庆等地讲课的不等式材料加以挑选，并查阅了 2001 年至 2010 年加拿大中等数学杂志《Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem》和近年来的《美国数学》月刊(英文版)，从中选择了部分题目，将《凸函数与琴生不等式》一书进行扩充，增加了一倍以上的内容.

在本书中，许多题目的解答都是经过改写的，目的是尽可能降低阅读门槛，使高一读者都能读懂.另外，我还自编了部分例题.

近年来，有不少数学类专业的硕士研究生、博士研究生进入中学数学教师队伍，我希望这本书能作为中等数学的不等式材料给他们一

定的帮助.

最后,感谢中国科学技术大学出版社为本书出版所做的工作.

复旦大学数学科学学院

黄宣国

2014 年 4 月

目　录

1　琴生不等式的证明

我们都知道下面一些不等式：

(1) 当 x_1, x_2 全是正实数时，有

$$\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \tag{1.1}$$

将式(1.1)两边取对数，并且两端乘以 -1，有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\lg x_1 + \lg x_2) &= -\lg \sqrt{x_1 x_2} \\ &\geqslant -\lg \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \end{aligned} \tag{1.2}$$

(2) 当 p 是正整数，$x_1>0$ 和 $x_2>0$ 时，有

$$\frac{1}{2}(x_1^p + x_2^p) \geqslant \left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right]^p. \tag{1.3}$$

式(1.3)的一个简单的证明是对 p 用数学归纳法. 当 $p=1,2$ 时，请读者自己验证式(1.3). 假设当 $p=k$ 时，式(1.3)成立，那么

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_1^{k+1} + x_2^{k+1}) &= \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k)(x_1 + x_2) \\ &\quad + \frac{1}{4}(x_1^k - x_2^k)(x_1 - x_2) \\ &\geqslant \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k)(x_1 + x_2) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right]^k (x_1 + x_2) \\ &= \left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right]^{k+1}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

所以，不等式(1.3)的确成立.

(3) 当 h 是一个正常数，x_1, x_2 是实数时，有

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{h^2 + x_1^2} + \sqrt{h^2 + x_2^2}\right)^2 - \left[h^2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2h^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{(h^2 + x_1^2)(h^2 + x_2^2)}\right]$$

$$- \left[h^2 + \frac{1}{4}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(h^2 + x_1^2)(h^2 + x_2^2)} - \frac{1}{2}(h^2 + x_1x_2). \tag{1.5}$$

利用式(1.1)(显然式(1.1)对非负实数也成立),有

$$\begin{aligned}(h^2 + x_1^2)(h^2 + x_2^2) &= h^4 + h^2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2x_2^2 \\ &\geqslant h^4 + 2h^2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 \\ &= (h^2 + x_1x_2)^2.\end{aligned} \tag{1.6}$$

利用式(1.6),知道式(1.5)的右端非负.那么

$$\frac{1}{4}(\sqrt{h^2 + x_1^2} + \sqrt{h^2 + x_2^2})^2 \geqslant h^2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2. \tag{1.7}$$

将式(1.7)两边开方,有

$$\frac{1}{2}(\sqrt{h^2 + x_1^2} + \sqrt{h^2 + x_2^2}) \geqslant \sqrt{h^2 + \left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right]^2}. \tag{1.8}$$

(4) 当 x_1, x_2 全是正实数时,利用不等式(1.1),有

$$\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{1}{4}(x_1 + x_2). \tag{1.9}$$

于是

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})\right]^2 &= \frac{1}{4}(x_1 + 2\sqrt{x_1x_2} + x_2) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(x_1 + x_2).\end{aligned} \tag{1.10}$$

将式(1.10)两边开方,并且两端乘以 -1,有

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) \geqslant -\sqrt{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}. \tag{1.11}$$

(5) 当 x_1, x_2 全是正实数时,有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}}\left[(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})\sqrt{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}\right.$$

$$-2\sqrt{x_1x_2}\Big]. \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}-2\sqrt{x_1x_2}\\
&=\sqrt{x_1}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}-\sqrt{x_2}\right]+\sqrt{x_2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}-\sqrt{x_1}\right]\\
&=\frac{\sqrt{x_1}\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_2\right]}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_1\right]}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_1}}\\
&=\frac{1}{2}(x_1-x_2)\left[\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_2}}-\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_1}}\right]\\
&=\frac{1}{2}(x_1-x_2)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_1}}\\
&\quad\times\left\{\sqrt{x_1}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_1}\right]-\sqrt{x_2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_2}\right]\right\}.
\end{aligned}\tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x_1}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_1}\right]-\sqrt{x_2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_2}\right]\\
&=(x_1-x_2)+\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\\
&=(x_1-x_2)+\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\\
&=(x_1-x_2)\left[1+\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right].
\end{aligned}\tag{1.14}$$

由式(1.13)和式(1.14)，有

$$(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}-2\sqrt{x_1x_2}\geqslant 0. \tag{1.15}$$

由式(1.12)和式(1.15)，有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}}. \tag{1.16}$$

(6) 当 $0\leqslant x_1, x_2\leqslant\pi$ 时(这表明 x_1, x_2 两个实数都大于等于 0,而小于等于 π),有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)&=\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)\\&\leqslant\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2).\end{aligned} \tag{1.17}$$

因而

$$-\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)\geqslant-\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.18}$$

(7) 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x_1, x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时(这表明实数 x_1, x_2 都大于等于 $-\frac{\pi}{2}$,而且小于等于$\frac{\pi}{2}$.下面类似情况不再说明),有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\cos x_1+\cos x_2)&=\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)\\&\leqslant\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2).\end{aligned} \tag{1.19}$$

因而

$$-\frac{1}{2}(\cos x_1+\cos x_2)\geqslant-\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.20}$$

(8) 当 $0\leqslant x_1, x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\begin{aligned}\tan x_1+\tan x_2&=\frac{\sin x_1}{\cos x_1}+\frac{\sin x_2}{\cos x_2}=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}\\&=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

而

$$\cos x_1\cos x_2=\frac{1}{2}[\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[1+\cos(x_1+x_2)]$$

$$=\cos^2\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.22}$$

利用式(1.21)和式(1.22),得

$$\tan x_1+\tan x_2 \geqslant \frac{2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}=2\tan\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.23}$$

(9) 当 $0<x_1, x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\cot x_1+\cot x_2=\frac{\cos x_1}{\sin x_1}+\frac{\cos x_2}{\sin x_2}=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\sin x_1\sin x_2}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\sin x_1\sin x_2}. \tag{1.24}$$

而

$$\sin x_1\sin x_2=\frac{1}{2}[-\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[1-\cos(x_1+x_2)]$$

$$=\sin^2\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.25}$$

由式(1.24)和式(1.25),得

$$\cot x_1+\cot x_2\geqslant\frac{2\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}=2\cot\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.26}$$

(10) 当 $0\leqslant x_1, x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\frac{1}{2}[(\tan x_1+\sin x_1)+(\tan x_2+\sin x_2)]$$

$$
\begin{aligned}
&-\left[\tan \frac{1}{2}(x_1+x_2)+\sin \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right] \\
=&\ \frac{1}{2}\left[(\tan x_1+\tan x_2)-2\tan \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right] \\
&+\frac{1}{2}\left[(\sin x_1+\sin x_2)-2\sin \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right] \\
=&\ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}-\frac{2\sin \frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos \frac{1}{2}(x_1+x_2)}\right] \quad (\text{利用式}(1.21)) \\
&+\sin \frac{1}{2}(x_1+x_2)\left[\cos \frac{1}{2}(x_1-x_2)-1\right] \\
=&\ \sin \frac{1}{2}(x_1+x_2)\left\{\left[\frac{\cos \frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}-\frac{1}{\cos \frac{1}{2}(x_1+x_2)}\right]\right. \\
&\left.-\left[1-\cos \frac{1}{2}(x_1-x_2)\right]\right\}. \qquad (1.27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\cos \frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}-\frac{1}{\cos \frac{1}{2}(x_1+x_2)}\right]-\left[1-\cos \frac{1}{2}(x_1-x_2)\right] \\
=&\ \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(x_1+x_2)-\cos x_1\cos x_2}{\cos x_1\cos x_2\cos \frac{1}{2}(x_1+x_2)}-2\sin^2 \frac{1}{4}(x_1-x_2). \qquad (1.28)
\end{aligned}
$$

明显地,可以得到

$$
\begin{aligned}
&\cos^2 \frac{1}{2}(x_1+x_2)-\cos x_1\cos x_2 \\
=&\ \frac{1}{2}[1+\cos(x_1+x_2)]-\frac{1}{2}[\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)] \\
=&\ \frac{1}{2}[1-\cos(x_1-x_2)] \\
=&\ \sin^2 \frac{1}{2}(x_1-x_2)
\end{aligned}
$$

$$= 4\sin^2 \frac{1}{4}(x_1 - x_2)\cos^2 \frac{1}{4}(x_1 - x_2). \tag{1.29}$$

将式(1.29)代入式(1.28),有

$$\left[\frac{\cos \frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\cos x_1 \cos x_2} - \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(x_1 + x_2)}\right] - \left[1 - \cos \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\right]$$

$$= 2\sin^2 \frac{1}{4}(x_1 - x_2)\left[\frac{2\cos^2 \frac{1}{4}(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cos x_2 \cos \frac{1}{2}(x_1 + x_2)} - 1\right]$$

$$\geqslant 0. \tag{1.30}$$

这里利用 $0 \leqslant |x_1 - x_2| \leqslant \max\{x_1, x_2\}$ 及 $\frac{1}{4}|x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$,以及余弦函数在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减,且在(0,1)内,知上式右端中括号内部分大于零,从而有不等式(1.30).

由式(1.27)和式(1.30),得

$$\frac{1}{2}[(\tan x_1 + \sin x_1) + (\tan x_2 + \sin x_2)]$$

$$\geqslant \tan \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \sin \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \tag{1.31}$$

上面已经举了 10 个不等式的例子.现在,我们静心分析一下,立刻发现一个规律:

在(1)中,令 $f(x) = -\lg x$($0 < x < \infty$,这表明 $x > 0$,“∞”称为无穷大),当 $x_1 > 0$ 和 $x_2 > 0$ 时,有

$$\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] \geqslant f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right). \tag{1.32}$$

在(2)中,令 $f(x) = x^p$($x \in (0, \infty)$,p 是一个正整数),也有不等式(1.32).在(3)到(10)中,分别令 $f(x) = \sqrt{h^2 + x^2}$(h 是一个正常数,x 是实数,即 $x \in (-\infty, \infty)$);$f(x) = -\sqrt{x}$($x \in (0, \infty)$);$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$($x \in (0, \infty)$);$f(x) = -\sin x$($0 \leqslant x \leqslant \pi$);$f(x) = -\cos x$

$\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$；$f(x)=\tan x\ \left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$；$f(x)=\cot x\ \left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$；$f(x)=\tan x+\sin x\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$. 同样有不等式(1.32)，只不过 x_1,x_2 的变化范围有所不同. 从(1)～(10)还可以看出，当且仅当 $x_1=x_2$ 时，(1.32)变为等式. 这就是我们的发现.

许多函数满足不等式(1.32)，当然自变量的定义域可能各不相同，在这个基础上加以抽象，就得到了本书所要介绍的凸函数不等式. 它是丹麦数学家琴生(Jensen，1859～1925)在1905年和1906年所建立的，所以又称这些不等式为琴生不等式. 我们把满足不等式(1.32)(等号成立当且仅当 $x_1=x_2$)的函数 $f(x)$ 称为某个定义域区间内的凸函数. 例如，对于(1)，我们就讲 $f(x)=-\lg x$ 是开区间$(0,\infty)$内的凸函数. 对于(2)，我们讲 $f(x)=x^p$ 是$(0,\infty)$内的凸函数，这里 p 是一个正整数，等等.

下面我们再举若干凸函数的例子.

(11) $f(x)=\lg\left(\frac{1}{x}-1\right),0<x\leqslant\frac{1}{2}$.

当 $0<x_1,x_2\leqslant\frac{1}{2}$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)-\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2\\
&=\frac{1}{x_1x_2}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}-\frac{4}{(x_1+x_2)^2}+\frac{4}{x_1+x_2}\\
&=\frac{1}{x_1x_2(x_1+x_2)^2}(x_1-x_2)^2(1-x_1-x_2)\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

将式(1.33)移项后，两边取对数，有

$$
\frac{1}{2}\left[\lg\left(\frac{1}{x_1}-1\right)+\lg\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\right]\geqslant\lg\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right).
\tag{1.34}
$$

所以 $f(x)=\lg\left(\frac{1}{x}-1\right)$是半开半闭区间$\left(0,\frac{1}{2}\right]$内的凸函数(式(1.34)等号成立，当且仅当 $x_1=x_2$).

(12) $f(x)=-\lg\frac{x^n}{1+Ax}$，这里 A 是一个正常数，n 是一个正整

数，$x\in(0,\infty)$.

对于正实数 x_1,x_2，有

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)$$

$$=\lg\frac{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n}{1+\frac{1}{2}A(x_1+x_2)}-\frac{1}{2}\left(\lg\frac{x_1^n}{1+Ax_1}+\lg\frac{x_2^n}{1+Ax_2}\right).\tag{1.35}$$

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n}{1+\frac{1}{2}A(x_1+x_2)}\right]^2-\frac{x_1^n}{1+Ax_1}\frac{x_2^n}{1+Ax_2}$$

$$=\frac{1}{\left[1+\frac{1}{2}A(x_1+x_2)\right]^2}\frac{1}{1+Ax_1}\frac{1}{1+Ax_2}$$

$$\times\left\{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2n}(1+Ax_1)(1+Ax_2)\right.$$

$$\left.-x_1^nx_2^n\left[1+\frac{1}{2}A(x_1+x_2)\right]^2\right\}.\tag{1.36}$$

可以看到

$$\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2n}(1+Ax_1)(1+Ax_2)-x_1^nx_2^n\left[1+\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2n}[1+A(x_1+x_2)+A^2x_1x_2]$$

$$-x_1^nx_2^n\left[1+A(x_1+x_2)+\frac{1}{4}A^2(x_1+x_2)^2\right]$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2n}-x_1^nx_2^n\right]$$

$$+A(x_1+x_2)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2n}-x_1^nx_2^n\right]$$

$$+\frac{1}{4}A^2(x_1+x_2)^2x_1x_2\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2n-2}-x_1^{n-1}x_2^{n-1}\right].\tag{1.37}$$

由于 x_1,x_2 都是正数，有

$$\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^2 \geqslant x_1x_2,$$

$$\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2n} \geqslant x_1^n x_2^n,$$

$$\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2(n-1)} \geqslant x_1^{n-1} x_2^{n-1}. \tag{1.38}$$

利用式(1.38),知道式(1.37)的右端整体是非负的,且等于零当且仅当 $x_1=x_2$.再由式(1.36),知道

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n}{1+\frac{1}{2}A(x_1+x_2)}\right]^2 \geqslant \frac{x_1^n}{1+Ax_1}\frac{x_2^n}{1+Ax^2}. \tag{1.39}$$

上式两端取对数,再由式(1.35),知道 $f(x)=-\lg\frac{x^n}{1+Ax}$是$(0,\infty)$内的一个凸函数.

(13) $f(x)=-\lg(x^n-1)$,$x\in(1,\infty)$,n 是正整数.

$\forall x_1,x_2\in(1,\infty)$,有

$$\begin{aligned}
&(x_1^n-1)(x_2^n-1)-\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n-1\right]^2\\
&=(x_1^nx_2^n-x_1^n-x_2^n+1)\\
&\quad-\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2n}-2\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n+1\right]\\
&=\left[x_1^nx_2^n-\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2n}\right]+\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n-x_1^n\right]\\
&\quad+\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n-x_2^n\right].
\end{aligned} \tag{1.40}$$

由(1.38)的第二个不等式,知道上式右端第一个中括号内部分是小于等于零的.另外,可以看到

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n-x_1^n\right]+\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n-x_2^n\right]\\
&=\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_1\right]\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{n-1}\right.\\
&\quad+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{n-2}x_1+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{n-3}x_1^2
\end{aligned}$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)x_1^{n-2}+x_1^{n-1}\Big]$$

$$+\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_2\right]\Big[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{n-1}$$

$$+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{n-2}x_2+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{n-3}x_2^2$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)x_2^{n-2}+x_2^{n-1}\Big]$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\Big[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{n-2}(x_1-x_2)$$

$$+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{n-3}(x_1^2-x_2^2)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)(x_1^{n-2}-x_2^{n-2})\quad+(x_1^{n-1}-x_2^{n-1})\Big]$$

$\leqslant 0$(当 $n=1$ 时,显然等于零). (1.41)

由上面叙述,$\forall\, x_1,x_2\in(1,\infty)$,有

$$(x_1^n-1)(x_2^n-1)\leqslant\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n-1\right]^2. \tag{1.42}$$

且上式等号成立当且仅当 $x_1=x_2$.

将式(1.42)两端取对数且乘以 -1,有

$$-\frac{1}{2}\left[\lg(x_1^n-1)+\lg(x_2^n-1)\right]\geqslant-\lg\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^n-1\right]. \tag{1.43}$$

于是,函数 $f(x)=-\lg(x^n-1)$ 是 $(1,\infty)$ 内的一个凸函数.

(14) x_1,x_2 是任意实数,利用不等式(1.1),有

$$10^{x_1}+10^{x_2}\geqslant 2\cdot 10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}. \tag{1.44}$$

于是

$$\begin{aligned}(1+10^{x_1})(1+10^{x_2})&=1+(10^{x_1}+10^{x_2})+10^{x_1+x_2}\\&\geqslant 1+2\cdot 10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+10^{x_1+x_2}\\&=\left[1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}\right]^2.\end{aligned} \tag{1.45}$$

对式(1.45)两端取对数,有

$$\frac{1}{2}\left[\lg(1+10^{x_1})+\lg(1+10^{x_2})\right]\geqslant\lg(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}). \tag{1.46}$$