

好玩的

数学

修订版

张景中 主编

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

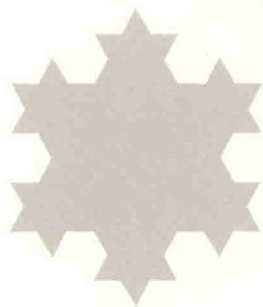
总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

数学演义

王树和 著

大事趣事困难事
古今数学辉煌史
抽象严密准确性
精华尽在笑谈中



科学出版社

好玩的

数学

(修订版)

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书
总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”
科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

张景中 主编

数学演义



王树和 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书对古今中外著名的数学故事用演义文体进行通而不俗、深入浅出的论述。例如十进制和二进制的故事和游戏,《九章算术》寓理于算的高招,三次方程与四次方程求根公式的演绎,兔子序列与优选法,笛卡儿之梦,油漆匠悖论,人口论中的数学,太和殿的屋顶是什么形状?怎样对图进行计算?防空导弹需要多少枚?如何算出系统工程的竣工日期?你想做数学家吗?等等。行文流畅生动,推理严格简洁,是一部雅俗共赏的科普著作。本书只要求读者具有2003年教育部制订的高中《数学课程标准》中规定的基础知识。

现将本书献给广大中学师生、大学师生和数学工作者。

图书在版编目(CIP)数据

数学演义/王树和著. —修订本. —北京:科学出版社, 2015. 3
(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 978-7-03-043578-1

I. ①数… II. ①王… III. ①数学—普及读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第044257号

责任编辑:李 敏 霍羽升 / 责任校对:张怡君

责任印制:张 倩 / 整体设计:黄华斌

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年4月第 三 版 开本:720×1000 1/16

2015年4月第一次印刷 印张:16 1/2

字数:262 000

定价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

丛书修订版前言

“好玩的数学”丛书自2004年10月出版以来，受到广大读者欢迎和社会各界的广泛好评，各分册先后重印10余次，平均发行量近45 000套，被认为是一套叫好又叫座的科普图书。丛书致力于多个角度展示了数学的“好玩”，将现代数学和经典数学中许多看似古怪、实则富有深刻哲理的内容最大限度地通俗化，努力使读者“知其然”并“知其所以然”；尽可能地把数学的好玩提升到了更为高雅的层次，让一般读者也能领略数学的博大精深。

丛书于2004年获科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”，2006年又被国家新闻出版总署列为“向全国青少年推荐的百种优秀图书”之一，2009年荣获“国家科学技术进步奖二等奖”。但对于作者和编者来说，最高的奖励莫过于广大读者的喜爱关心。十年来，收到不少热心读者提出的意见和修改建议，数学研究领域和科普领域也都有了新的发展，大家感到有必要对书中的内容进行更新和补充。要感谢各位在耄耋之年仍俯首案牍、献身科普事业的作者，他们热心负责地对自己的作品进一步加工，在“好玩的数学（普及版）”的基础上进行了修订和完善。出版社借此机会将丛书改为B5开本，以方便读者阅读。

感谢多年来关心本套丛书的广大读者和各界人士，欢迎大家提出批评建议，共同促进科普事业繁荣发展。

编者
2015年3月

第一版总序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传。”不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，

它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》（此二书尚无学生版——编者注），分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清

楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树和教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树和教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》（此次学生版出版时，王教授对原《数学聊斋》一书进行了仔细修订后，将其拆分为《数学聊斋》与《数学志异》二书——编者注），把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师伽德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀

德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x+4)/5$$

$$b = 4(x+4)/25$$

$$c=16(x+4)/125$$

$$d=64(x+4)/625$$

$$e=256(x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $x+4$ 应是 3125 的倍数，所以

$$x+4=3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时， $x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射 - 反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 $355/113$ 。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 $355/113$ 。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 $355/113$ 。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 $355/113$ ，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897 \dots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$ ，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。

但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

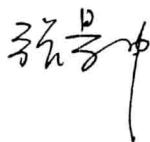
数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目

都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

A handwritten signature in black ink, appearing to be '张中' (Zhang Zhong) with a stylized flourish at the end.

2004年9月9日

前言

数学，如果你正确地看待它，则会发现它具有
一种至高无上的美，一种冷色而严肃的美，这种美
没有音乐或绘画那般华丽的装饰，它纯洁到崇高的
地步，达到了只有最伟大的艺术才能显示的那种完
美的境界。

——罗素（Russell，1872～1970，英国
数学家，诺贝尔文学奖得主）

元末明初，文豪罗贯中著《三国演义》，把西晋学者陈寿的史书《三国志》通俗化，使本来仅少数文人学士读得懂的雅文典籍变成大众人人爱看的文学名著。董卓的罪孽、曹操的奸凶、刘备的虚伪、孙权的狡诈和孔明的智慧，历史故事讲得娓娓动听，历史人物写得栩栩如生。百姓们“看三国掉眼泪”，或同情黎民或痛恨恶者，《三国演义》是世界文学史上的极品之一。

数学史上重大事件的意义和众多数学家的伟业与《三国志》所述的人与事相比有过之而无不及。例如中国古代的著名数学家刘徽、祖冲之、祖暅、张遂、秦九韶、杨辉、李冶和朱世杰等，他们对世界数学的贡献诸如 π 的近似值、中国剩余定理、杨辉三角与幻方、堆垛与天元术等等；古希腊数学四巨头毕达哥拉斯、欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯的光辉成就，例如百牛定理、第一次数学危机、无理数的发现、欧几里得公理几何系统的问世、阿基米德利用穷竭法与切片法求圆面积与球体积、“ $\frac{2}{3}$ 定理”系列、圆锥曲线的发

现、三大作图题的提出等等；文艺复兴之后，意大利数学家卡丹对三次与四次方程的求根和发现复数，皮亚诺回答了什么是自然数等等；17世纪法国笛卡儿发明解析几何，英国大数学家牛顿和德国大数学家莱布尼兹创立了微积分；18~19世纪，法国著名数学家柯西和德国著名数学家魏尔斯特拉斯等人把微积分严格化，克服了第二次数学危机；19世纪德国数学家戴德金回答了什么是无理数和实数，康托尔创造了离奇的无穷集合，德国伟大数学家高斯、匈牙利数学家波尔约和俄国数学家罗巴切夫斯基创立了非欧几里得几何；20世纪初，英国大数学家罗素挑起了第三次数学危机，等等。古今数学的人和事，实为人类文化的精华和瑰宝。

我们效法罗贯中，把数学史上的若干大事编纂成演义体的一册科普著作，把数学史上的人和事努力写得通俗动听、引人入胜；数学内容努力写得严密准确、津津有味，进行深入浅出的研讨；载入史册的数学家则写得平易近人、如师如长、可学可敬。由于本书的读者定位，所以对一些太专门的现代数学内容只能割爱。但是，正如《三国演义》并不是专门供一般老百姓欣赏的作品，几乎所有的近现代文学家也都认真研读过，我们期望大学师生乃至数学界同仁会认为此书似应一读，做到雅俗共赏。

本书是王树和著《数学聊斋》《数学志异》两书的姊妹篇，《数学聊斋》《数学志异》中的有关内容，本书不再收入，读者可以三册书互补地阅读。

感谢科学出版社对本书出版的重视和支持。也要感谢我的父母，孩提时代听他们讲《三国演义》的故事，诸葛亮舌战群儒、弹琴却敌，关云长单刀赴会、刮骨疗毒，等等，情节惊心动魄，启迪智勇，激起正义、胆识和智慧的共鸣。本书作者的文笔比不上罗贯中，只是东施效颦，奢望这本小书成为读者们的好朋友，让我们从这些动人的数学故事当中

得到做科学、做人的正确方向。还要感谢我的学长和同事张景中院士，他为本书的写作贡献了深刻的意见，为之增色不少。

小书一本喜相逢，数学多少事，尽在笑谈中。

本书第一版已发行两万多册，深受数学爱好者的厚爱，今做普及版，根据读者与科学出版社的意见，进行了全面修正、润色、精炼。

王树和

2008年1月

于中国科学技术大学

目 录

丛书修订版前言

第一版总序

前言

第一回	手指脚趾计数自然 二进十进游戏高雅	1
第二回	测天度地作周髀 弄巧动智证勾股	4
第三回	欲知何谓无理数 应寻谁是戴德金	11
第四回	诡辩派胡适规尺作图题 众后生高谈扩域超越数	16
第五回	数学之神巧施反证定圆亩 阿基米德切片秤量度球积	23
第六回	引葭赴岸刘徽设计公式解 玉枝倾倒天竺学吟莲花诗	28
第七回	刘徽首创等幂等积定理 祖暅巧算牟合方盖体积	32
第八回	五家共井刘徽解法不俗 大竹小竹九章招数真绝	37
第九回	莞蒲生叶引发指数方程 两鼠穿墙呼唤对数解法	42
第十回	五湖四海能者细算圆周率 古今中外何人通晓实数 π	46
第十一回	痴迷数学张遂剃度天台山 创立天元李冶隐居封龙谷	51
第十二回	杨辉三角藏数理 华老觚板揭玄机	56

第十三回	天地人物汉卿著《四元玉鉴》 堆垛岚峰松庭作《算学启蒙》	61
第十四回	神农幻方杨辉献艺 忧郁图版丢勒作秀	68
第十五回	三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量	72
第十六回	严刑逼供伽利略违心交出悔过书 死不悔改保释犯巧手发明扇形规	80
第十七回	比萨才子宠养兔子成序列 斐波那契应试宫廷得满分	85
第十八回	给我两个互素自然数 送君一枚正星多边形	91
第十九回	豪华广场追求地面别致 美丽石砖讲究边角适度	93
第二十回	欧拉函数奇妙无穷 费马定理难度有限	96
第二十一回	算术游戏岂止诙谐惬意 数学小品绝非粗俗作秀	101
第二十二回	帕普斯五线一点求轨迹 笛卡儿一夜三梦得魔钥	104
第二十三回	牛顿求导表述欠妥 牧师发难搬弄是非	110
第二十四回	伯克莱悖论一波未平 油漆匠谬言惊澜再起	113
第二十五回	欧拉柯西众贤加固微积分 外尔斯特拉斯力驳伯克莱	116
第二十六回	伯努利摆擂征解速降线 牛莱欧应战创立变分法	127
第二十七回	帕斯卡费马分赌本 伯努利卡丹论概率	140
第二十八回	投针求 π 数理不凡 随机画弦悖论真刁	146