上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 72

无界区域问题的球面调和-广义Laguerre混合谱方法

● 作者：张小勇

● 专业：计算数学

● 导师：郭本瑜

上海大学出版社
2005年上海大学博士学位论文 72

无界区域问题的球面调和－广义Laguerre混合谱方法

● 作者：张小勇
● 专业：计算数学
● 导师：郭本瑜

图书在版编目(CIP)数据

2005年上海大学博士学位论文．第2辑/博士论文编辑部编．—上海：上海大学出版社，2009.6
ISBN 978-7-81118-367-2

Ⅰ.2…　Ⅱ.博…　Ⅲ.博士—学位论文—汇编—上海市—2005　Ⅳ.G643.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第180878号

2005年上海大学博士学位论文

——第2辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路99号　邮政编码200444)

(http://www.shangdapress.com　发行热线66135110)

出版人：姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷　　各地新华书店经销

开本890×1240　1/32　印张274.25　字数7641千

2009年6月第1版　2009年6月第1次印刷

印数：1～400

ISBN 978-7-81118-367-2/G·490　定价：980.00元(49册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2005)

Spherical Harmonic-Generalized Laguerre Mixed Spectral Methods in Unbounded Domains

Candidate: Zhang xiao-yong
Major: Computational Mathematics
Supervisor: Guo Ben-yu

Shanghai University Press
· Shanghai ·

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：邰嘉裕　教授，同济大学

委员：郭本瑜　教授，上海师范大学

　　　马和平　教授，上海大学

　　　王翼飞　教授，上海大学

　　　杨忠华　教授，上海师范大学

　　　田红炯　副教授，上海师范大学

评阅人名单：

马和平　教授，上海大学

扬忠华　教授，上海师范大学

徐承龙　副教授，同济大学

答辩委员会对论文的评语

张小勇同学的博士学位论文研究高维无界区域的球面调和-广义 Laguerre 混合谱方法及其应用，在理论和实际应用中都有重要意义。

论文的主要创新之处是：

(1) 研究了一类新的广义 Laguerre 多项式正交系，建立了相应的逼近理论，它比经典的 Laguerre 多项式正交系更能拟合解的性态。

(2) 引入了一类新的广义 Laguerre 正交函数系，建立了相应的逼近理论有关结果，更适用于具守恒律的方程，以及非线性 in-gordon 方程，Black-seholes 方程等。

(3) 把上述两件方法应用于三维空间的偏微分方程及外部问题的数值解，计算结果表明这些方法具有谱精度。

本文所得的结果是系统的也是比较深刻的，表明作者具有较扎实的理论基础，熟悉有关的知识，并具有较强的科学研究能力。这是一篇优秀的博士学位论文。

答辩委员会表决结果

答辩委员会一致同意通过论文答辩,建议授予张小勇同学理学博士学位。

答辩委员会主任签名：邵嘉裕

2004 年 6 月 8 日

摘　要

谱方法是求解微分方程的重要数值方法之一. Fourier 谱方法的思想起源于 19 世纪. 但各类谱方法真正成为一门理论体系比较完整的计算数学分支则是近三十多年的事. 谱方法的主要优点是高精度. 正因为如此, 谱方法已经成功地应用到科学、技术、经济中的许多问题的数值计算. 例如热传导、流体动力学、量子力学、金融数学等领域的有关问题的数值模拟.

本文主要研究无界区域问题的一类新的广义 Laguerre 谱方法和三维空间中的球面调和-广义 Laguerre 混合谱方法及其应用.

在第二章中, 我们提出了一类新的广义 Laguerre 多项式正交逼近, 其特点是适用于更多问题并能更好地拟合解在无穷远处的性态, 从而提高计算精度. 然后, 我们发展了球面调和-广义 Laguerre 多项式混合谱方法, 并成功地应用到全空间问题、三维外部问题以及非线性问题的计算.

在第三章中, 我们提出了一类新的广义 Laguerre 函数正交逼近, 其特点是数值解保持原问题的权函数, 从而更好地模拟原问题的解的整体性质, 同时也简化了实际计算与数值分析.

我们进行了大量的计算实验包括并行计算. 计算结果表明本文提出的多种新方法具有谱精度,并且计算相当稳定.

关键词 新广义 Laguerre 多项式,新广义 Laguerre 函数,球面调和-广义 Laguerre 混合谱方法,三维问题,外部问题,谱精度,守恒性,计算稳定性,收敛性,数值结果

Abstract

Spectral method is one of important numerical method for solving differential equations. The basic idea of Fourier spectral methods stems from 19th. But only in the past three decades, various spectral methods formed a branch of computational mathematics with strict theoretical analysis. The fascinating merit of spectral method is its high accuracy. Because of this, spectral method has been applied successfully to computation of many problems arising in science, technology and economy, such as numercal simulations of many problems in heat conduction, fluid dynamics, quantum mechanics and financial mathematics and so on.

In this paper, we investigate mainly a new generalized Laguerre spectral method and spherical harmonic-generalized Laguerre mixed spectral method for three dimensional unbounded domains and their applications.

First, we propose a new generalized Laguerre polynomial orthogonal approximation which can be used for more practical problems. Moreover, the numerical solutions fit the exact solutions better so that it raises the numercal accuracy. We also develope the corresponding spherical harmonic-generalized Laguerre polynomial mixed spectral method and apply them successfully to computation of three dimensional

problems, exterior problems and nonlinear problems.

Next, we focus on new generalized Laguerre function orthogonal approximation. In this case, the numerical solution possess the same weight function as those of original problem. Therefore they simulate the global properties of solutions of original problems very well. This technique also simplifies actual calculation and numerical analysis.

We carry out many calculation including parallel computation. The numerical results demonstrate the spectral accuracy of proposed methods and the stability of longtime calculation.

Key words new generalized Laguerre polynomial, new generalized Laguerre function, spectral methods, three dimensional problems, unbounded domains, Klein-Gordon equation, exterior problems, spectral accuracy, stability of calculation, conservation, mixed spherical harmonic-generalized Laguerre polynomial approximation, convergence, numercial results

目　录

第一章 引 言

偏微分方程的数值求解一直是计算数学的一个主要研究方向之一，也是大规模科学计算的重要组成部分. 而谱方法则是偏微分方程数值求解的重要方法之一.

Fourier 谱方法的思想源于 1820 年 Navier 运用双重三角级数数值求解弹性薄板问题. 但是因为该方法计算量大而受当时计算条件的限制，没有受到人们的重视. 20 世纪 70 年代以来，由于计算机的飞速进步，机器已能够代替人进行繁重的计算. 从而为谱方法的进一步发展提供了强大的物质条件. 经过 30 多年的发展，人们已经建立了比较完整的谱方法理论，提出了各种有效的计算方法，并成功地应用于各种线性与非线性问题. 例如，周期问题的 Fourier 谱方法. 对于有界区域上的微分方程的 Chebyshev 谱方法或 Legender 谱方法. 对于全直线或半直线等无界区间，建立了 Hermite 谱方法和 Laguerre 谱方法等. 谱方法最大的优点在于它的高精度，即只要方程的真解越光滑，其对应的数值解也就越精确. 正因为如此，谱方法被广泛应用到计算流体力学、计算量子力学和数值天气预报等众多领域. 可见 Bernardi，Maday[7]，Canuto，Hussaini，Quarteroni，Zage[8]，Gottlieb，Orszag[13]，Guo[16] 和 Funaro[11].

本文主要研究无界区域问题的新的广义 Laguerre 谱方法及其应用.

我们知道，科学和工程中的许多问题都可以归结为在无界区域上的偏微分方程，例如在海洋工程、大气科学、矿山开采等领域中的某些问题. 近几年来，随着科学技术的发展，无界区域问题的数值求解越来越受到人们的关注. 目前解决此类问题的方法有：

一、通过设置人工边界条件把无界区域变为有界区域问题，参见

Clayton, Engquist, Majda[41], Engquist, Majda[2,3]. 不过,通常这种方法会带来额外的误差. 为此,一些作者研究了各种精确的人工边界条件,例如:Hagstrom 和 Keller[43, 44]研究了圆柱体区域的偏微分方程的精确人工边界条件;而 Han 和 Wu[30]则探索了 Laplace 方程某些定解条件的精确人工边界条件,并成功地应用于某些无界区域上的线性弹性方程.

二、通过某些变量变换把无界区域问题变为有界区域上的奇异问题,然后用 Jacobi 谱方法进行数值逼近. 参见 Guo[19-23]以及 Guo 和 Wang[26].

三、有理谱逼近的方法. 通过某种有理变换把有界区域变到无界区域,相应的把有界区域上的基函数变到无界区域上的基函数,然后用这些无界区域上的基函数去逼近偏微分方程的解. 见 Bory[34,47], Mastroianni, Monegato[15], Guo, Shen[4], Guo, Shen, Wang[5, 25], Wang, Guo[45], Weideman[32].

四、以某些无界区域上的正交多项式或函数系作基函数直接计算无界区域上的微分方程. 有关工作可见 Guo, Shen, Wang[25], Funaro, Kavian[12], Guo[18], Guo, Shen[24], Guo, Xu[27], Christov[9], Maday, Pernaud-Thomas, Vandeven[49], Xu, Guo[47], Shen[36].

我们的工作主要是改进和推广了上述第四种方法. 在已有的文献中,人们都以 Laguerre 多项式为基函数逼近半直线上的偏微分方程的解. 而本文中以一类新的广义 Laguerre 多项式为基函数,它不仅推广了谱方法的应用范围,而且能更好地拟合微分方程真解在无穷远处的性态,从而提高了计算精度. 我们建立了球面调和-广义 Laguerre 多项式混合逼近,并应用于全空间问题、球外问题以及非线性问题. 数值计算证明了新方法的优越性.

我们的另一部分工作是提出了一类新的广义 Laguerre 函数为基函数的谱方法,并建立了球面调和-广义 Laguerre 函数混合逼近理论. 其特点是数值解保持原问题的权函数,从而更好地模拟原问题的

解的整体性质，同时也简化了实际计算与理论分析. 我们应用广义 Laguerre 函数逼近计算 Black-scholes 方程和非线性 Klein-Gordon 方程，分析了谱格式的收敛性. 数值结果也表明了有关新方法的优越性.

最后我们要指出：三维空间中基于球面调和函数-广义 Laguerre 多项式(函数)混合逼近的谱方法开始于本文的工作，它为计算三维全空间问题和外部问题等提供了新的方便的工具，丰富了谱方法的理论，扩大了谱方法的应用范围.