Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题全解

1

毛　磊　滕兴虎　寇冰煜
张　燕　李　静　毛自森　编著

经典名著最新版本　全书增补数百新题
题型最全题量最大　数学名家详细解析

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

Б. П. 吉米多维奇

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解 1

编著 毛 磊 滕兴虎 寇冰煜
张 燕 李 静 毛自森

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解.1/毛磊等编著.
—南京:东南大学出版社,2014.7
ISBN 978-7-5641-4987-1

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①毛… Ⅲ.①数学分析—高
等学校—题解 Ⅳ.①O17—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 112519 号

吉米多维奇数学分析习题全解 1

编　　著	毛　磊　滕兴虎　寇冰煜 张　燕　李　静　毛自森	责任编辑	戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
特约编辑	李　香		

出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	电子邮件	press@seu.edu.cn

经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880mm×1230mm　1/32	印　　张	13.25　**字数** 340 千
版　　次	2014 年 7 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-4987-1		
定　　价	20.00 元		

前　言

《数学分析》是数学学科中一门重要的基础课，同时也是学习时间跨度大、理论体系严谨、内容极其丰富、学习难度很高的一门课程。学好《数学分析》既可以为后续专业课程奠定必备的数学基础，同时也培养了学生抽象的逻辑思维能力，提高了学生的创新意识、开拓精神和实际应用能力。

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作。该书内容丰富，由浅入深，涉及的内容涵盖了《数学分析》的全部命题。同时，该书难题多，许多题目的难度已经超出对同学们的要求，以至于许多同学望而却步。为了帮助广大同学更好地掌握《数学分析》的基本概念，综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们以俄文第 13 版为基础，对习题集中的 5000 道习题逐一进行了解答。

众所周知，学习数学，做练习题是很重要的。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力、逻辑推理能力和综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

本书可作为数学专业同学学习《数学分析》的参考书，又可以作为其他理工科同学学习《高等数学》、《微积分》的参考书，同时也可以作为各专业同学考研复习时的参考书。

由于我们水平有限，本书不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　分析引论

§1. 实数

1. 数学归纳法　为了证明某定理对任意自然数 n 是正确的，只须证明以下两点：

(1) 该定理对 $n = 1$ 为真；(2) 若该定理对任何一个自然数 n 为真，则它对其后的一个自然数 $n+1$ 也为真.

2. 分割　若把有理数分为 A、B 两类，使其满足下列条件：(1) 两类均非空集；(2) 每个有理数必属于一类，且仅属于一类；(3) 属于 A 类(下类)的任何数都小于属于 B 类(上类)的任意数，此分类法被称之为分割. (a) 若或者下类 A 有最大数，或者上类 B 有最小数，则分割 A/B 确定一个有理数；(b) 若 A 类没有最大数，而 B 类没有最小数，则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数①.

3. 绝对值　若 x 为实数，则由下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值：

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{若 } x < 0; \\ x, & \text{若 } x \geqslant 0. \end{cases}$$

对于任意实数 x 和 y，下列不等式成立

$$|x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

4. 上确界和下确界　设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集，若：

(1) 每一个 $x \in X$② 满足不等式

$$x \geqslant m,$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$，存在有 $x' \in X$，使得

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

---

① 今后如没有相反的说明，我们把所研究的数都理解为实数.

② 符号 $x \in X$ 表示数字 x 属于集合 X.

同样,若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leqslant M,$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$,存在有 $x'' \in X$,使得

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界,则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty,$$

若集合 X 上方无界,则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差 假设 $a(a \neq 0)$ 是被测量的准确值,而 x 是这个量的近似值,则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差,而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的相对误差.

如果 x 的绝对误差不超过其第 n 个有效数字的单位的一半,则说明 x 有 n 位准确的数字.

运用数学归纳法证明下列等式对任何自然数 n 都成立.

【1】 证明 $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

证 当 $n = 1$ 时,等式显然成立.

设当 $n = k$ 时等式成立,即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

则当 $n = k + 1$ 时,有

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) \\ & = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ & = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}, \end{aligned}$$

即对 $n = k + 1$ 等式也成立.

于是由数学归纳法知，对任何自然数 n，有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【2】 证明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]\\&=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1],\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是由数学归纳法可知，对任何自然数 n，有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

【3】 证明 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证 当 $n=1$ 时，等式显然成立.

设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2,$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3\\&=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3\\&=\frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}\\&=[1+2+\cdots+k+(k+1)]^2,\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

【4】 证明 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当 $n=1$ 时,等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}&1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k\\&=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是,对任何自然数 n,有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

【5】 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 和 $a^{[0]}=1$,

证明:$(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$,式中 C_n^m 为由 n 个元素中选取 m 个元素的组合数,由此推导出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时,有 $(a+b)^{[1]}=a+b$,

$$\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立. 即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]},$$

则对于 $n=k+1$,有

$$\begin{aligned}&(a+b)^{[k+1]}\\&=(a+b)^{[k]}(a+b-kh)\\&=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}\\&=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}\\&=\{(a-kh)+b\}C_k^0a^{[k]}b^{[0]}\\&\quad+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots\\&\quad+\{a+(b-kh)\}C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_k^0 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k]} b^{[1]} \\
&\quad + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]} + \cdots + C_k^k a^{[1]} b^{[k]} + C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + (C_k^0 + C_k^1) a^{[k]} b^{[1]} + \cdots \\
&\quad + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_{k+1}^1 a^{[k]} b^{[1]} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},
\end{aligned}
$$

即对 $n = k+1$ 时,等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}, \qquad ①$$

令 $h = 0$,则有 $a^{[n]} = a^n$. ②

将 ② 式代入 ① 式,得牛顿二项式公式 $(a+b)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$.

【6】 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证　当 $n = 1$ 时,不等式显然成立.

设 $n = k$ 时,不等式成立,即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k,$$

则当 $n = k+1$ 时,由于

$$x_i > -1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k+1),$$

所以 $1 + x_i > 0$,因此有

$$
\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \\
&\geqslant (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(1+x_{k+1}) \\
&= (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}) \\
&\quad + (x_1 x_{k+1} + x_2 x_{k+1} + \cdots + x_k x_{k+1}).
\end{aligned}
$$

又由于 $x_i x_j \geqslant 0 \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, k+1)$,

所以

$$
\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \\
&\geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1},
\end{aligned}
$$

即当 $n = k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$

【7】 证明:如果 $x>-1$,则不等式

$(1+x)^n\geqslant 1+nx(n>1)$ 成立,且仅当 $x=0$ 时,等号成立.

证 当 $n=2$ 时,

$$(1+x)^2=1+2x+x^2\geqslant 1+2x.$$

即不等式成立,当等号成立时,有 $x=0$.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即 $(1+x)^k\geqslant 1+kx$ 且等号仅当 $x=0$ 时才成立.

则当 $n=k+1$ 时,由于 $1+x\geqslant 0$,有

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)^k(1+x)\\&\geqslant(1+kx)(1+x)\\&=1+(k+1)x+kx^2\geqslant 1+(k+1)x,\end{aligned}$$

且等号仅当 $x=0$ 时,才成立.

于是,由数学归纳法,对任何自然数 $n(n>1)$,不等式

$(1+x)^n\geqslant 1+nx$

成立,且仅当 $x=0$ 时等号成立.

【8】 证明:当 $n>1$ 时,$n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

提示:利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2\qquad(n=1,2,\cdots).$$

证 当 $n=2$ 时,因为

$$\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!.$$

故不等式成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

而 $$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2\qquad(k=1,2,\cdots),$$

从而 $\quad (k+1)! < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1} = \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 $n(n>1)$,有 $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

【9】 证明:当 $n>1$ 时,$2!\cdot 4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n$.

证 当 $n=2$ 时,显然有 $2!4! = 48 > [(2+1)!]^2 = 36$.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$2!4!\cdots(2k)! > [(k+1)!]^k.$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned} & 2!4!\cdots(2k)!(2k+2)! \\ & > [(k+1)!]^k(2k+2)! \\ & = [(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2) \\ & > [(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1} \\ & = [(k+2)!]^{k+1}, \end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

因此对任何大于 1 的自然数 n,有

$$2!4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n.$$

【10】 证明下列不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时,显然有$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$,不等式成立.

设当 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} \\ & < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}, \end{aligned}$$

而 $$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

事实上，我们有 $4k^2+8k+3<4k^2+8k+4$，

即 $$(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2,$$

从而我们有$\dfrac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\dfrac{1}{\sqrt{2k+3}}$，

因此

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}.$$

即当 $n=k+1$ 时，不等式成立.

由数学归纳法，命题证毕.

【10.1】 证明下列不等式：

(1) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\qquad(n\geqslant 2)$；

(2) $n^{n+1}>(n+1)^n\qquad(n\geqslant 3)$；

(3) $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k\,(0\leqslant x_k\leqslant\pi,k=1,2,\cdots,n)$；

(4) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$.

证 (1) 当 $k=2$ 时，因为

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}>2=(\sqrt{2})^2,$$

所以不等式成立.

设当 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k},$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

而当 $k\geqslant 2$ 时，$2\sqrt{k}\geqslant\sqrt{k+1}$，所以有

$$\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2=k+2\sqrt{k}\,\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\geqslant k+1.$$

因此 $$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式成立. 由数学归纳法,命题证毕.

(2) 事实上,我们只需证明

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}<n \qquad (n\geqslant 3),$$

而 $$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

而当 $k>2$ 时,$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$,$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}$,

所以 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3\leqslant n.$$

因此 $$(n+1)^n<n^{n+1}.$$

(3) 因为当 $0\leqslant x_k\leqslant\pi$ 时,$\sin x_k\geqslant 0$,

所以当 $n=1$ 时,不等式显然成立.

设当 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sin x_i,$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right)\right|$$

$$=\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\cdot\cos x_{k+1}+\cos\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\sin x_{k+1}\right|$$

$$\leqslant\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right|\cdot\left|\cos x_{k+1}\right|+\left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right|\left|\sin x_{k+1}\right|$$

$$\leqslant \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right|+\sin x_{k+1}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k+1}\sin x_i,$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式成立. 由数学归纳法,命题证毕.

(4) $$(2n)!=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)\times2\times4\times\cdots\times(2n)$$
$$<(2\times4\times\cdots\times2n)^2$$
$$=2^{2n}(n!)^2.$$

【11】 设 c 为正整数,且不是整数的平方,$\dfrac{A}{B}$ 为确定实数$\sqrt{c}$ 的分割,其中 B 类包含 $b^2>c$ 这样的所有正有理数 b,而 A 类包含其余的所有有理数,证明:A 类中无最大数,而 B 类中无最小数.

证 我们要证明对任意 $a\in A$,存在 a' 使得 $a'>a$ 且 $a'\in A$.

若 $a\leqslant0$,则显然存在 $a'>0\geqslant a$ 且 $a'\in A$. 故不妨设 $a>0$,于是 $a^2\leqslant c$ 但 $a^2\neq c$,倘若不然,$a^2=c$. 设 $a=\dfrac{p}{q}$,其中 p,q 为互质的正整数,则$\dfrac{p^2}{q^2}=c$. 由于 c 是正整数,而 p^2 与 q^2 也是互质的,故必有 $q=1$,从而 $c=p^2$,这与题设矛盾. 因此 $a^2<c$. 下面我们证明,当 n 充分大时,$\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2<c$,即

$$a+\frac{1}{n}\in A,$$

上述不等式等价于$\dfrac{2a}{n}+\dfrac{1}{n^2}<c-a^2$,

而 $$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<\frac{2a+1}{n},$$

故只需取 n 使得$\dfrac{2a+1}{n}<c-a^2$,

为此只需取 $n>\dfrac{2a+1}{c-a^2}$,

因此当 $n>\dfrac{2a+1}{c-a^2}$ 时,$a+\dfrac{1}{n}\in A$.

故 A 类中无最大数.

应用相同的方法，可证明 B 类中无最小数，实质上，此分割 $\dfrac{A}{B}$ 确定一个无理数 $\sqrt{c}$.

【12】 用下列方法建立确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 $\dfrac{A}{B}$：A 类包含满足 $a^3<2$ 条件的所有有理数 a；而 B 类含有其他的所有有理数，证明 A 类中无最大数，而 B 类中无最小数.

证 设 $a\in A$，即 $a^3<2$，下面我们证明存在正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事实上，上式等价于 $\dfrac{3a^2}{n}+\dfrac{3a}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}<2-a^3$.

若 $a\leqslant 0$，取 $n=1$ 即可. 不妨设 $a>0$.

由于 $\dfrac{3a^2}{n}+\dfrac{3a}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{3a^2+3a+1}{n}$，故只需取 n 使得

$$\frac{3a^2+3a+1}{n}<2-a^3,$$

即
$$n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}\text{ 即可.}$$

当 $n>\dfrac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$ 时，$a+\dfrac{1}{n}\in A$.

故 A 类中无最大数.

下面证明 B 类中无最小数，设 $b\in B$，则 $b^3\geqslant 2$. 首先证明 $b^3\neq 2$. 若 $b^3=2$，设 $b=\dfrac{p}{q}$，p 与 q 为互质的正整数，则 $\dfrac{p^3}{q^3}=2$，$p^3=2q^3$，从而 p^3 为偶数，因此 p 必为偶数。设 $p=2r$，r 为正整数，由于 $(p,q)=1$，故 q 必为奇数，从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3=4r^3$，矛盾. 因此 $b^3>2$. 下面证明存在充分大的正整数 n，使得 $\left(b-\dfrac{1}{n}\right)^3>2$。事实上，上式等价于

$$\frac{3b^2}{n}-\frac{3b}{n^2}+\frac{1}{n^3}<b^3-2,$$

而
$$\frac{3b^2}{n}-\frac{3b}{n^2}+\frac{1}{n^3}<\frac{3b^2+1}{n},$$

因此，取 $n>\dfrac{3b^2+1}{b^3-2}$，

则 $$\frac{3b^2}{n}-\frac{3b}{n^2}+\frac{1}{n^3}<\frac{3b^2+1}{n}<b^3-2.$$

从而 $$\left(b-\frac{1}{n}\right)^3>2,$$

即 $$b-\frac{1}{n}\in B.$$

因此,B 类中无最小数. 事实上,此分割$\frac{A}{B}$确定了一个无理数$\sqrt[3]{2}$.

【13】 作出适当的分割,证明等式

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$;

(2) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

证 (1) 作确定$\sqrt{2}$的分割$\frac{A}{B}$:其中 B 类包含所有满足条件$b^2>2$的正有理数,而其余有理数归入 A 类. 再作确定$\sqrt{8}$ 的分割$\frac{A'}{B'}$:B' 类包含所有满足条件$b'^2>8$的正有理数,而其余有理数归入A'类. 根据实数加法的定义,满足不等式$a+a'<c<b+b'$(对任何 $a\in A,b\in B$, $a'\in A',b'\in B'$)的唯一实数c就是$\sqrt{2}+\sqrt{8}$. 因此要证$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$,我们只需证明$(b+b')>18(\forall b\in B,b'\in B')$及$(a+a')^2<18(\forall a\in A,a'\in A'$且$a+a'>0)$.

因为 $b^2>2,b'^2>8,b>0,b'>0$,故 $b^2b'^2>16,bb'>4$,从而

$$\begin{aligned}(b+b')^2&=b^2+b'^2+2bb'\\&>2+8+8=18.\end{aligned}$$

又 $$a+a'>0,$$

则a与a'中至少有一个为正,从而由$a^2a'^2<2\times8=16$,知$aa'<4$.

因此$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18$,证毕.

(2) $\sqrt{2}$ 的分割$\frac{A}{B}$如(1) 中所示,再作确定$\sqrt{3}$ 的分割$\frac{A^*}{B^*}$:其中 B^*类中包含所有满足条件 $b^{*2}>3$ 的正有理数,而其余有理数 a^* 归入A^* 类. 根据实数乘法的定义,满足$aa^*<c<bb^*$(对任何$a\in A,a>0,a^*\in A^*,a^*>0,b\in B,b^*\in B^*$)的实数$c$唯一存在且$c=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

但由于$a\in A,a>0,a^*\in A^*,a^*>0$,从而$a^2<2,a^{*2}<3$所