经济数学基础

微积分（第4版）

韩玉良 于永胜 郭 林 编著

清华大学出版社

经济数学基础

微积分（第4版）

韩玉良 于永胜 郭 林 编著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书根据教育部高等学校财经类专业微积分教学大纲的要求编写而成.全书分为11章,内容包括:准备知识、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程初步、级数、多元函数的微分学、重积分.

本书可作为高等学校经济、管理类各专业的教材.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/韩玉良,于永胜,郭林编著.--4版.--北京:清华大学出版社,2015
(经济数学基础)
ISBN 978-7-302-38595-0

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①韩…　②于…　③郭…　Ⅲ.①微积分－高等学校－教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第311529号

责任编辑:刘　颖
封面设计:常雪影
责任校对:刘玉霞
责任印制:王静怡

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:河北新华第一印刷有限责任公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×230mm　**印　　张**:22.25　**字　　数**:456千字
版　　次:2000年6月第1版　2015年1月第4版　**印　　次**:2015年1月第1次印刷
印　　数:1～3000
定　　价:39.00元

产品编号:058630-01

编委会

主　编　韩玉良

编　委（按姓氏笔画为序）

于永胜　曲子芳　李宏艳　陈卫星

郭　林　崔书英　隋亚莉

序

“经济数学基础”是高等学校经济类和管理类专业的核心课程之一.该课程不仅为后继课程提供必备的数学工具,而且是培养经济管理类大学生数学素养和理性思维能力的最重要途径.作为山东省高等学校面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的项目,中国煤炭经济学院和烟台大学的部分老师组成课题组,详细研究了国内外一些有关的资料,根据经济管理专业的特点和教学大纲的要求,并结合自己的教学经验,编写了这套“经济数学基础”教材,包括《微积分》、《线性代数》、《概率统计》和《数学实验》.经过了一年多的试用,在充分听取校内外专家意见的基础上,课题组对教材进行了全面的修改和完善,使之达到了较高的水平.这套教材有以下特点:

第一,在加强基础知识的同时,注意把数学知识与解决经济问题结合起来.在教材各部分都安排了经济应用的内容,同时在例题、习题中增加了相当数量的经济应用问题,这有助于培养学生应用数学知识解决实际问题,特别是经济问题的能力.

第二,增加了数学实验的内容.其中一部分是与教学内容相关的演示与实验,借助于这些演示和实验,可以帮助学生更直观地理解和掌握所学的知识;另一部分是提供一些研究型问题(其中有相当一部分是经济方面的),让学生参与运用所学的数学知识建立模型,再通过上机实验来解决实际问题.应该说,这是对传统教学方法和教学过程较大的改革.

第三,为了解决低年级大学生普遍感到高等数学课抽象难学、不易掌握的问题,对一些重要的概念和定理尽可能从实际问题出发,从几何、物理或经济的直观背景出发,提出问题,然后再进行分析和论证,最后得到结论.对一些比较难的定理,则注重

运用从特殊到一般的归纳推理方式. 这样由浅入深使学生易于接受和掌握,同时在学习中领略了数学概念、数学理论的发现和发展过程,这对培养学生创造性思维能力是有帮助的.

相信这套教材的出版,对经济和管理类专业大学生的学习及综合素质的提高,定会起到积极的作用.

郭大钧

于山东大学南院

2000 年 6 月 16 日

第4版前言

随着以计算机为代表的现代技术的发展及市场经济对多元化人才的需求，我国人才培养的策略和规模都发生了巨大的变化，相应的教学理念和教学模式也在不断的调整之中，作为传统教育科目的大学数学受到了很大的冲击，改革与探索势在必行.在此背景下，1998 年我们承担了山东省高等学校面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划的一个项目，编写了一套适合财经类专业使用的“经济数学基础”系列教材. 这套系列教材包括《微积分》、《微积分学习指导》、《线性代数》、《线性代数学习指导》、《概率统计》、《概率统计学习指导》、《数学实验》7 本书，于 2000 年 8 月出版. 这套系列教材 2001 年获得山东省优秀教学成果奖. 结合教学实际，2004 年、2007 年教材分别出版了第 2 版和第 3 版.

随着我国高等教育改革的深入进行，大多数普通本科院校将培养适应社会需要的应用型人才作为主要的人才培养模式，因此基础课的课时被大量压缩. 这对经济管理类专业大学数学基础课的教学提出了新的更高的要求：在大幅度减少课时的同时，一方面要满足为后继课程提供数学基础知识与基本技能的需要，另一方面还要兼顾研究生入学考试大纲中对于数学知识与技能的要求，同时还要保证课程的教学质量. 正是在这一背景下我们对“经济数学基础”系列教材进行了新的修订.

本次修订基于以下原则：一是覆盖研究生入学考试大纲中数学 3 的全部内容；二是保证知识的系统性、连贯性. 在上述原则的基础上，对一些不是必要的内容进行了适当的精简，对一些比较重要但可以精简的内容加了“ * ”号，供教师在教学中根据课时及学生学习情况进行适当的取舍.

高等教育的发展使得教学环境和教学对象都发生了非常大

的变化，为了适应学生个性化发展的需求，很多学校都实行了分层次教学．本套教材通过辅助图书——学习指导的配合，可以灵活地实现这一教学实践的实施．

在本书的修订过程中，许多使用本教材的老师提出了宝贵的建议，我们在此致谢．同时我们诚恳希望广大师生在今后的使用过程中能继续提出宝贵意见，以便将来作进一步修改．最后感谢清华大学出版社对本系列教材的再版给予的大力支持．

编　者

2014 年 8 月

目录

第 1 章

准 备 知 识

本章为课程的学习做准备，先介绍一些在数学中广泛应用的术语和记号，然后介绍函数的概念及一些常用函数.

1.1　集合与符号

1. 集合

集合这一概念描述如下：一个集合是由确定的一些对象汇集的总体. 组成集合的这些对象被称为集合的**元素**. 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

x 是集合 E 的元素这件事记为 $x\in E$（读作 x 属于 E）；

y 不是集合 E 的元素这件事记为 $y\notin E$（读作 y 不属于 E）.

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，则称 E 是 F 的**子集合**，简称为**子集**，记为

$$E\subset F（读作 E 包含于 F），$$

或者

$$F\supset E（读作 F 包含 E）.$$

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素（即 $E\subset F$ 并且 $F\subset E$），则称集合 E 与集合 F **相等**，记为

$$E=F.$$

为了方便起见，引入一个不含任何元素的集合——空集合$\varnothing$. 另外还约定：空集合$\varnothing$是任何集合 E 的子集，即$\varnothing\subset E$.

2. 数集

全体整数的集合、全体有理数的集合、全体实数的集合和全体复数的集合都是经常遇到的集合，约定分别用字母$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 和$\mathbb{C}$ 来表示这些集合，即

$\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合;

$\mathbb{Q}$ 表示全体有理数的集合;

$\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合;

$\mathbb{C}$ 表示全体复数的集合.

另外,将非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为$\mathbb{Z}_+$,$\mathbb{Q}_+$和$\mathbb{R}_+$,显然有

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

和

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+.$$

集合可以通过罗列其元素或指出其元素应满足的条件等办法来给出. 例如

$$\{1,2,3,4,5\}$$

表示由 1,2,3,4,5 这 5 个数字组成的集合,而$\{x\in\mathbb{R}\mid x>3\}$表示大于 3 的实数组成的集合. 又如: 2 的平方根的集合可以记为 $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2=2\}$或$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

在本课程中经常遇到以下形式的实数集的子集.

(1) 区间

为了书写简练,将各种**区间**的符号、名称、定义列成表格,如表 1.1 所示($a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$).

表 1.1 区间的记法及含义

符 号	名 称		定 义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid x>a\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid x\geqslant a\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$

(2) 邻域

设 $a\in\mathbb{R}$,$\delta>0$. 数集$\{x\mid |x-a|<\delta\}$表示为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称为 a 的 δ **邻域**. 当不需要注明邻域的半径 δ 时,常把它表示为 $U(a)$,简称 a 的邻域.

数集$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$表示为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a,称为 a 的 δ **去心邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时,常将它表示为 $\mathring{U}(a)$,简称 a 的去心邻域.

3. 逻辑符号

微积分的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的，其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号，使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

（1）连词符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“推得”，或“若……，则……”.

符号“$\Leftrightarrow$”表示“必要充分”，或“等价”，或“当且仅当”.

例如：设 A,B 是两个陈述句，可以是条件，也可以是命题，则 $A\Rightarrow B$ 表示若命题 A 成立，则命题 B 成立；或命题 A 蕴涵命题 B；称 A 是 B 的充分条件，同时也称 B 是 A 的必要条件. 如，n 是整数$\Rightarrow n$ 是有理数. $A\Leftrightarrow B$ 表示命题 A 与命题 B 等价；或命题 A 蕴涵命题$B(A\Rightarrow B)$，同时命题 B 也蕴涵命题$A(B\Rightarrow A)$；或 $A(B)$是$B(A)$的必要充分条件. 再如，$A\subset B\Leftrightarrow$任意 $x\in A$，有 $x\in B$.

（2）量词符号

符号“$\forall$”表示“对任意”，或“对任意一个”.

符号“$\exists$”表示“存在”，或“能找到”.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确. 例如，数集 A 有上界、有下界和有界的定义：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界}\Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R}, \forall x\in A, \text{有 } x\leqslant b.$$

$$\text{数集 } A \text{ 有下界}\Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R}, \forall x\in A, \text{有 } a\leqslant x.$$

$$\text{数集 } A \text{ 有界}\Leftrightarrow \exists M>0, \forall x\in A, \text{有 } |x|\leqslant M.$$

设有命题“集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$”，用符号表示为

$$\forall a \in A, \text{有 } P(a).$$

显然，这个命题的否命题是“集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$”，用符号表示为

$$\exists a_0 \in A, \text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题. 由此可见，否定一个命题，要将原命题中的“$\forall$”改为“$\exists$”，将“$\exists$”改为“$\forall$”，并将性质 P 否定. 例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界}\Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R}, \forall x\in A, \text{有 } x\leqslant b.$$

$$\text{数集 } A \text{ 无上界}\Leftrightarrow \forall b\in\mathbb{R}, \exists x_0\in A, \text{有 } b< x_0.$$

4. 其他符号

（1）max 与 min

符号“max”表示“最大”（它是 maximum（最大）的缩写）；符号“min”表示“最小”（它是 minimum（最小）的缩写）. 例如，设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个数. 则：

$$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最大数；

$$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小数.

(2) $n!$ 与 $n!!$

符号"$n!$"表示"不超过 n(正整数)的所有正整数的连乘积",读作"n 的阶乘"即

$$n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

符号"$n!!$"表示"不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的正整数的连乘积",读作"n 的双阶乘",即

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1,$$

$$(2k-2)!! = (2k-2)(2k-4)\cdots 6 \cdot 4 \cdot 2,$$

$$9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1, \quad 12!! = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

规定：$0! = 1$.

(3) 连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$

在数学中,常遇到一连串的数相加或一连串的数相乘,例如 $1+2+\cdots+n$ 或者 $m(m-1)\cdots(m-k+1)$等.为简便起见,人们引入连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

这里的指标 i 仅仅用以表示求和或求乘积的范围,把 i 换成别的符号 j, k 等,也同样表示同一和或同一乘积,例如

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

人们通常把这样的指标称为"哑指标".

下面举几个例子说明连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$ 的应用.

例 1.1 阶乘 $n!$ 的定义可以写成

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j.$$

例 1.2 二项式定理可以表示为

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j a^j b^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k,$$

其中

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

习题 1.1

1. 写出集合 $A=\{0,1,2\}$ 的一切子集.

2. 如果 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2\}$，下列各种写法，哪些正确？哪些不正确？

$$1\in A,\quad 0\notin B,\quad \{1\}\in A,\quad 1\subset A,\quad \{1\}\subset A,\quad 0\subset A,$$
$$\{0\}\subset A,\quad \{0\}\subset B,\quad A=B,\quad A\supset B,\quad \varnothing\subset A,\quad A\subset A.$$

3. 设 $A=\{(x,y)\mid x-y+2\geqslant 0\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x+3y-6\geqslant 0\}$，$C=\{(x,y)\mid x-4\leqslant 0\}$，在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$，$(A\cup B)\cap C$.

4. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 3$；　(2) $|x-2|\leqslant 1$；　(3) $|x-a|<\varepsilon$ (a 为常数，$\varepsilon>0$)；

(4) $|x-3|<\dfrac{1}{10}$；　(5) $0<|x-1|<0.01$；　(6) $|x|>M$ ($M>0$).

5. 求邻域半径 δ，使 $x\in U(1,\delta)$ 时，$|2x-2|<\varepsilon$. 又若 ε 分别为 0.1，0.001 时，上述 δ 各等于多少？

1.2　函数

在自然科学、工程技术和某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一，其重要意义远远超出了数学范围. 在数学中函数处于基础的核心地位. 函数是微积分的研究对象.

1. 函数概念

在一个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，它们的变化并非彼此无关，而是互相联系着，这是物质世界的一个普遍规律.

例 2.1　真空中自由落体，物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着. 如果物体距地面的高度为 h，$\forall t\in\left[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$①，都对应一个距离 s. 已知 t 与 s 之间的对应关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度，是常数.

例 2.2　球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着：$\forall r\in[0,\infty)$ 都对应一个球的体积 V. 已知 r 与 V 的对应关系是

① 当 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ 时，由 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 有 $s=h$，即物体下落到地面.

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率,是常数.

例 2.3 某地某日时间 t 与气温 T 互相联系着(如图 1.1),对 13 时至 23 时内任意时间 t 都对应着一个气温 T. 已知 t 与 T 的对应关系用图 1.1 中的气温曲线表示. 横坐标表示时间 t,纵坐标表示气温 T,曲线上任意点 $P(t,T)$ 表示在时间 t 对应着的气温 T.

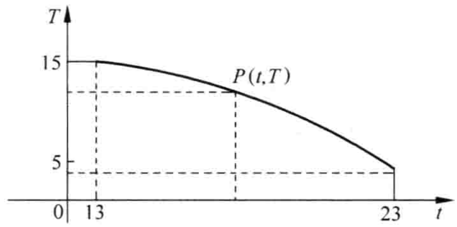

图 1.1

例 2.4 在标准大气压下,温度 T 与水的体积 V 互相联系着. 实测如表 1.2,对于数集{0,2,4,6,8,10,12,14}中每个温度 T 都对应一个体积 V,已知 T 与 V 的对应关系用表 1.2 来表示.

表 1.2

温度/℃	0	2	4	6	8	10	12	14
体积/cm^3	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

上述 4 个实例,分属于不同的学科,实际意义完全不同. 但是,从数学角度看,它们有一个共同的特征:都有一个数集和一个对应关系,对于数集中任意数 x,按照对应关系都对应$\mathbb{R}$中惟一一个数. 于是有如下的函数概念.

定义 1.1 设 A 是非空数集. 若存在对应关系 f,对 A 中任意数 $x(\forall x\in A)$,按照对应关系 f,对应惟一一个 $y\in\mathbb{R}$,则称 f 是定义在 A 上的**函数**,表示为

$$f:A\to\mathbb{R},$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**,表示为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**. 数集 A 称为函数 f 的**定义域**,函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数 f 的**值域**.

根据函数定义不难看到,上述例题皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明:

(1) 用符号"$f:A\to\mathbb{R}$"表示 f 是定义在数集 A 上的函数,十分清楚、明确. 在本书中,为方便起见,约定将"f 是定义在数集 A 上的函数",用符号"$y=f(x),x\in A$"表示. 当不需要指明函数 f 的定义域时,又可简写为"$y=f(x)$",有时甚至笼统地说"$f(x)$是 x 的函数(值)".

(2) 根据函数定义,虽然函数都存在定义域,但常常并不明确指出函数 $y=f(x)$的定义