高等学校教材

高等数学（上册）

重庆大学数学与统计学院
张良才　李江涛　方延洪　主编

高等教育出版社

◉高等学校教材

高等数学（上册）

重庆大学数学与统计学院
张良才　李江涛　方延洪　主编

GAODENG SHUXUE

高等教育出版社·北京

内容简介

本教材是以经典微积分为主要内容，凸显了工科专业需求，系统地介绍了微积分的基本理论和基本方法，并密切联系工科各专业背景，有针对性地编写了相应的例题和习题.

本教材分上、下两册，上册主要包括数列与函数的极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程等内容；下册主要包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、级数等内容；书末附有部分习题答案或提示.

本教材可作为高等学校非数学类理工科各专业高等数学课程的教材，也可供具有一定数学基础的读者自学.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 张良才，李江涛，方延洪主编
. -- 北京 ：高等教育出版社，2014.8
ISBN 978-7-04-040628-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… ②李… ③方… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 151745 号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 兰莹莹　封面设计 姜 磊　版式设计 马敬茹
插图绘制 郝 林　责任校对 陈 杨　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	21.5	版　　次	2014 年 8 月第 1 版
字　　数	390 千字	印　　次	2014 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	31.40 元

物 料 号 40628-00

前　言

本教材是以经典微积分为主要内容，为高等学校工科类各专业本科生编写的．教材吸收了国内外相关优秀教材的优点，系统地介绍了微积分的基本理论和基本方法，并密切联系工科各专业背景，有针对性地编写了相应的例题和习题，以帮助学生提高数学素养、培养创新意识、掌握运用数学工具解决实际问题的能力．本教材结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多、可读性强，既可作为高等学校非数学类理工科各专业高等数学课程的教材，也可供具有一定数学基础的读者自学．

本教材是重庆大学“高等数学”大类课程教学改革中“工科模块”的配套教材，遵照了**“模块教学、培养素质、强调实例、凸显专业”**的十六字方针，主要体现了以下特点：

1. 特别注重基本概念、基本思想和基本方法的阐述，尽可能从多角度阐释各部分内容的背景、内涵以及它们之间的有机联系，着力于数学素质与能力的培养．

2. 对各部分内容进行了优化组合，凸显工科相关专业背景及需求，选编了大量的应用实例．

3. 注重教学实用性，针对性强，力求使本教材既符合工科类本科数学基础课程教学基本要求，又与当前的教学现状相适应．

本教材由重庆大学数学与统计学院张良才、李江涛、方延洪主编；肖志祥和邵红亮参与了本教材的编写；重庆大学数学与统计学院教学院长穆春来教授审阅了全书，并提出了许多十分宝贵的意见与建议．

本教材在编写过程中得到了重庆大学教务处和数学与统计学院的大力支持，也得到了高等教育出版社数学分社的帮助，编者在此表示衷心的感谢！同时，重庆大学数学与统计学院张心明老师对初稿进行了审阅，并提出了许多宝贵的意见和建议；重庆大学数学与统计学院研究生聂文敏、张苗、刘红军、李平同学参与了部分校对工作，在此一并表示衷心的感谢！

限于编者水平，书中难免有不妥甚至错误之处，敬请读者批评指正，使之在教学实践中日臻完善.

编者

2014 年 4 月于重庆大学

目　　录

引　　言

高等数学(微积分学)是理、工科院校一门重要的基础学科.

微积分的基本思想在远古时代就已经产生，而近代的微积分则酝酿于17世纪上半叶. 自然科学，特别是天文学、力学等领域在此期间发生的一系列重大事件，昭示着自文艺复兴以来在资本主义生产力刺激下蓬勃发展的自然科学开始迈入综合与突破的阶段. 而这种综合与突破所面临的数学困难，使亟待解决的一些基本问题成为人们空前关注的焦点. 同时这些问题也成为促使微积分产生的因素. 这个时期几乎所有的科学大师都在致力于寻求解决这些问题的新的数学工具，特别是描述运动与变化的无穷小算法. 17世纪的许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述问题作了大量的研究工作，如法国的费马、笛卡儿、罗伯瓦、笛沙格；英国的巴罗、瓦里士；德国的开普勒；意大利的卡瓦列里等人都提出许多很有建树的理论，他们为微积分的创立做出了贡献.

虽然17世纪上半叶的一系列前驱工作沿不同方向朝着微积分的大门踏近，但是它们仍不足以表示微积分作为一门独立学科的诞生，这是因为它们在方法上还缺乏一般性. 微分与积分的基本问题，在当时是被看作不同的问题来处理的. 虽然也有人注意到了某些联系，但未能将这些联系作为一般规律明确提出. 因此，站在更高的高度将以往个别的贡献和分散的努力综合为统一的理论，成为17世纪中叶的数学家们所面临的艰巨任务.

经过了半个世纪的酝酿，牛顿和莱布尼茨出场了. 时代的需要与个人的才识，使他们完成了微积分创立过程中最后也是最关键的一步. 他们将积分和微分真正沟通起来，明确地找到了两者内在的基本关系，并在此基础上构建了系统的微积分学.

牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现代数学中分析学这一大分支名称的来源. 牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑，莱布尼茨却是侧重于从几何学来考虑.

作为一门科学，高等数学(微积分学)有其固有的特点，这就是高度的抽象性、严密的逻辑性、复杂的计算性和广泛的应用性. 抽象性是数学最基本、最显著的特点——有了高度抽象和统一，我们才能深入地揭示其本质规律，才能使之得到更广泛的应用. 严密的逻辑性是指在对数学理论的归纳和整理过程

中，无论是概念和表述，还是判断和推理，都要运用逻辑的规则，遵循思维的规律. 复杂的计算性是指高等数学有繁多的计算对象、众多的定理、多样的计算和证明方法、实际应用中复杂的计算量. 所以说，数学也是一种思想方法，学习数学的过程就是思维训练的过程. 人类社会的进步，与数学这门科学的广泛应用是分不开的. 尤其是到了现代，电子计算机的出现和普及使数学的应用领域更拓宽了，现代数学正成为科技发展的强大动力，同时也广泛和深入地渗透到了社会科学领域.

第一章　数列与函数的极限

极限的朴素思想古已有之．早在公元前5世纪，古希腊数学家就利用多边形的面积来近似计算圆的面积．三国时代中国数学家刘徽也曾利用割圆术来计算圆的周长：“……割之弥细，所失弥少．割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”．自牛顿和莱布尼茨创立了微积分学之后，极限的概念才逐渐变得清晰严密．直到19世纪，由于柯西、魏尔斯特拉斯等人的工作，极限的概念才被置于严密的理论基础之上，从而得到举世的公认．

现在，极限已经成为数学分析中最基本的概念之一．极限的概念是微积分的理论基础，它描述了变量在某一变化过程中的终极状态．

第一节　准备知识

一、集合

1. 集合的概念

一般地，我们称所研究的对象为**元素**，称具有某种属性的元素构成的全体为**集合**(简称**集**)．集合具有**确定性**(给定集合的元素必须是确定的)和**互异性**(给定集合中的元素是互不相同的)．比如“身材较高的人”不能构成一个集合，因为它的元素不是确定的．但是“身高大于1.78 m的人”则可以构成一个集合，因为其中的元素是确定的．通常地，集合用$A,B,C,\cdots$来表示，集合中的元素用$a,b,c,\cdots$来表示．如果a是集合A中的元素，就称a属于A，记作：$a\in A$，否则就称a不属于A，记作：$a\notin A$.

一般地，集合的表示方法有列举法和描述法两种.

列举法是把集合的元素一一列举出来，并用“$\{\}$”括起来表示集合．如

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

描述法是用集合所有元素的共同属性来表示集合．如

$$\mathbf{N}=\{\text{非负整数}\}.$$

由数组成的集合称为**数集**．对于一些特殊的数集，有约定俗成的记号：

全体非负整数组成的集合称为**非负整数集**(或**自然数集**)，记作 $\mathbf{N}$.

所有正整数组成的集合称为**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{N}_+$.

全体整数组成的集合称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$.

全体有理数组成的集合称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$.

全体实数组成的集合称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

特别地，本书还将用到以下两个记号：“$\forall$” 和 “$\exists$”. 前者表示“对任意的”，或“对每一个”，或“对所有”；后者表示“存在”.

2. 集合的基本关系

一般地，对于两个集合 A 与 B，若 $\forall a \in A$，都有 $a \in B$，则称集合 A **包含于** B，或 B 包含 A. 此时集合 A 称为集合 B 的**子集**，记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$). 特别地，若 $A \subseteq B$，且 $\exists a \in B$，但 $a \notin A$，则称集合 A 为集合 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$.

设 A，B 是两个集合．若 $A \subseteq B$ 且 $B \supseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$. 例如，若 $A = \{1,2,3,4\}$ 且 $B = \{4,1,3,2\}$，则 $A = B$.

我们称不含任何元素的集合为**空集**，记作 $\varnothing$. 同时规定，空集是任何集合的子集. 如果一个集合含有有限个元素，则称该集合为**有限集**；若一个集合含有无限个元素，则称为**无限集**.

由上述集合之间的基本关系可知集合的包含关系具有如下性质：

(1) 任何集合 A 是它本身的子集，即 $A \subseteq A$.

(2) 设 A，B，C 是三个集合．若 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

(3) 集合之间的相等关系是一种等价关系，即具有自反性、对称性和传递性.

3. 集合的基本运算

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 或同时属于两者的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**．记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

注 在求并集时，A 与 B 的公共元素在并集中只能出现一次.

一般地，由所有属于集合 A 且同时属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**. 记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

一般地，如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，那么就称该集合为**全集**，通常记作 U.

对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的**补集**，简称为集合 A 的补集. 记作 $C_U A$ 或 $\overline{A}$，即

$$C_U A = \{x \mid x \in U, \text{且 } x \notin A\}.$$

例 1.1　设 U 为自然数全体，$A = \{0,1,2,3,5\}$，$B = \{1,4,5,6\}$，求 $A \cup B$，$A \cap B$，$C_U A$.

解　$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$；　$A \cap B = \{1,5\}$；　$C_U A = \{x \in \mathbf{N} \mid x > 5$ 或 $x = 4\}$.

设 A 与 B 是两个非空集合．若 $x \in A$，$y \in B$，则称有顺序的一对元素 (x,y) 为一个**序偶**．由 A 与 B 中所有元素组成的序偶构成的集合，称为 A 与 B 的**直积**，记作 $A \times B$，即

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

例如，$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 表示平面 Oxy 上所有点的集合，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

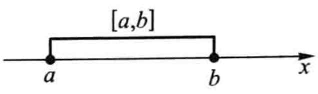
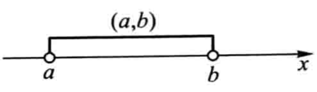
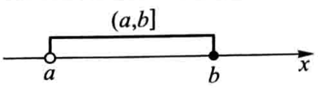
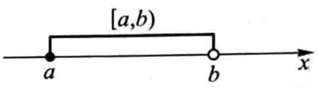
二、常量与变量　区间与邻域

我们在观察某一现象或研究某些问题的过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在这个过程中保持不变，我们称之为**常量**；有的量在这个过程中是变化的，我们称之为**变量**．例如一个运动的物体，其质量为常量，而速度则为变量．

注　在某些过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的，我们把这种量亦看作常量．

对于实数轴上的点来说，**区间(有限区间)**是指介于某两点之间的线段上的点的全体．数轴上的有限区间可以由表 1－1 给出：

表 1－1

区间名称	区间满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a < x < b$	(a,b)	
半开区间	$a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$	$(a,b]$ 或 $[a,b)$	 

此外，还可以规定如下无限区间：