



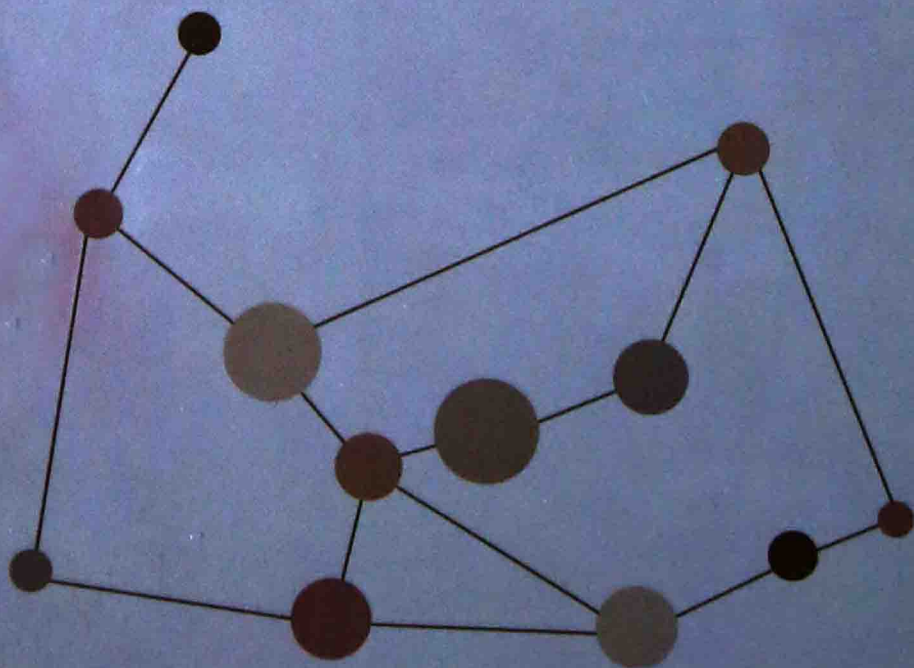
中国科学技术大学学术丛书

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

量子力学 算符Hermite多项式论

Theory of Operator Hermite Polynomials
in Quantum Mechanics

范洪义 楼森岳 著



中国科学技术大学出版社
University of Science and Technology of China Press



中国科学技术大学学术丛书

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

量子力学 算符Hermite多项式论

Theory of Operator Hermite Polynomials
in Quantum Mechanics

范洪义 楼森岳 著

中国科学技术大学出版社
University of Science and Technology of China Press

内 容 简 介

数学物理方法是探索新物理学的基础,也是促进工程技术进展的理论工具.以往有关数学物理方法的教材的主要内容是特殊函数与偏微分方程,本书则另辟蹊径,别开生面,提出将常用的特殊函数(尤其是 Hermite 多项式、Laguerre 多项式)推广到以量子力学算符为自变量的算符特殊函数,结合作者发明的有序算符内的积分(IWOP)技术和处理算符编序的理论来审视与发展数学物理的内容,导出许多新的特殊函数公式和相应的算符恒等式,发展了 Hermite 多项式、Legendre 多项式、Jacobi 多项式、Bessel 函数、Hankel 变换理论,并给出其物理应用.书中还用 IWOP 技术指出了发展积分学的一个新方向.

本书适合于从事物理和数学教学与科研工作的人员阅读,对于工程技术人员也有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

量子力学算符 Hermite 多项式论/范洪义,楼森岳著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2015.1

(中国科学技术大学学术丛书)

ISBN 978-7-312-03362-9

I. 量… II. ①范… ②楼… III. 量子力学—算符—研究 IV. O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 240564 号

出版 中国科学技术大学出版社

安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

<http://press.ustc.edu.cn>

印刷 安徽省瑞隆印务有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×1000 mm 1/16

印张 13.5

字数 246 千

版次 2015 年 1 月第 1 版

印次 2015 年 1 月第 1 次印刷

定价 32.00 元

序

自 1900 年 Planck 发现能量子后, 量子力学经 Bohr 的老式量子论发展为 Heisenberg、Schrödinger 和 Dirac 为主创的新量子论, 其间经历了二十多年的时间, Heisenberg 与 Schrödinger 分别用矩阵力学与波动力学描述量子力学, 他们从各自的角度看到了量子力学的曙光. 这使人想起唐诗“大漠孤烟直, 长河落日圆”, “欲穷千里目, 更上一层楼”, 这更上一层楼的历史使命由 Dirac 承担了. Dirac 认为, 既然矩阵力学与波动力学处理同一问题有等价的结果, 就应该可以找到单一的、更优美的、更抽象的方法来统一它们. 1926 年, 他提出了优于矩阵力学与波动力学的数学形式, 即符号法 (或称为变换论), 其基本符号是 ket 和 bra, 代表互为共轭的态矢量, Heisenberg 的跃迁矩阵元写为 $\langle A \rangle$, Schrödinger 的波函数写为 $\langle | \rangle$, 使对量子力学的描述可以从一个样本自然地转向另一个样本. Dirac 从数学上演绎了量子力学的逻辑, 首创了表象, 也为量子力学的数理打下了简洁优美的符号基础. 1927 年 10 月, 在比利时首都布鲁塞尔召开的第 5 届索尔维会议上, Heisenberg 和 Born 当众宣布: “我们认为量子力学是一个完备的理论, 其基本的物理和数学假设不再容许修正.”

20 世纪 30 年代, Dirac 的名著《量子力学原理》独领风骚, Dirac 创立的态矢 ket-bra 奠定了量子力学的语言, 极大地丰富了量子力学的内容, 并且简化了量子力学运算的难度, 更便于人们去理解和运用量子力学的有关理论. 其中, 他发明的表象理论是变换理论的基础, 例如坐标表象的完备性 $\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x| dx = 1$ 是在全空间找到粒子概率为 1 的简洁表示. 那么 $\int_{-\infty}^{\infty} |x/\mu\rangle \langle x| dx / \sqrt{\mu}$ 这个积分是什么? 它又代表什么呢? 这是中国学者范洪义 20 世纪 60 年代提出的问题. 我们知道 $|x/\mu\rangle$ 仍是坐标算符的本征态, 本征值 (经典量) $x \mapsto x/\mu$ 表示坐标的压缩, 但是现有的微积分理论对于 $\int_{-\infty}^{\infty} |x/\mu\rangle \langle x| dx / \sqrt{\mu}$ 束手无策, 原因是 $|x/\mu\rangle \langle x|$ 暗含了一些不可对易的算符,

所以我们暂时只能猜测该算符应该是经典压缩 $x \mapsto x/\mu$ 的量子映射. 随后, 范洪义在 70 年代后期发明了有序算符内的积分 (IWOP) 技术并实现了这类积分运算, 发展了 Dirac 的量子力学符号法, 并不断丰富其内容, 展现了 Newton-Leibniz 积分的无限风光. 这方面的研究也充分体现了 Einstein 所说的: “人类的头脑必须独立地构思形式, 然后我们才能在事物中找到形式.”

人们对于物理的理解会随着数学能力的提高而深化. 例如, 量子谐振子既可以用波动力学求解 Hermite 方程的方法研究, 也可以用 Dirac 符号法研究. 前者可以直接求出本征函数——Hermite 多项式, 而用 Dirac 符号法容易给出量子谐振子的 Fock 表象描述. Hermite 多项式是一种特殊函数, 特殊函数之谓是因为它们有其特殊性质. 本书提出把常见的特殊函数 (尤其是 Hermite 多项式) 的自变量 (宗量) 以量子力学的算符 (坐标算符、动量算符或粒子数算符等) 来代替, 别开生面地研究算符特殊函数的各种形式, 可以称为算符 Hermite 多项式方法. 由于量子力学的算符一般是不对易的, 算符特殊函数的编序问题是一个全新的数理问题, 结合 IWOP 技术, 我们将导出很多新的特殊函数的恒等式及母函数公式, 它们的用途是:

- (1) 从算符特殊函数的新公式过渡到经典情形, 可导出很多特殊函数新的母函数公式;
- (2) 借助算符特殊函数的新公式, 可找出沟通各种特殊函数的新关系;
- (3) 比较算符特殊函数的各种编序形式及量子表象完备性, 可以导出许多有用的新积分公式 (而并不需要真正地做积分运算);
- (4) 可用算符特殊函数恒等式丰富量子论的表象论与变换论;
- (5) 发现若干特殊函数新的级数展开及其倒易关系;
- (6) 对量子算符特殊函数实行量子变换, 可导出新的算符恒等式;
- (7) 可以更深刻地建立经典函数的量子对应, 有助于量子相空间理论的进展;
- (8) 可以方便而直接地计算各种物理量, 如矩函数、累积函数等.

Einstein 说: “任何人一旦掌握了他所从事学科的基础理论, 并且学会了独立思考和工作, 他必定能找到自己的前进之路, 并且与那些以获得知识细节为主要目的的人相比, 他必定能更好地适应进步和变化.” 以这一思想为指导, 本书将体现发展数学物理独特的前进之路.

在写作过程中, 作者之一范洪义得到了中国科学技术大学校长侯建国, 副校长张淑林, 研究生院屠兢、古继宝、倪瑞和万洪英的支持和有益帮助, 谨致谢意. 作者范洪义也感谢曾在门下求学的本科生和研究生, 他们是: 陈俊华、胡利云、袁洪春、何锐、王帅、王震、唐绪兵、笪诚、程千帆、任益充和周

军等。后生可畏对于师长也是一种鞭策。每当夜深人静，身心疲倦想偷点儿懒时，范洪义脑子里就会闪现慈母毛婉珍六十多年前在灯下为小学生批阅作文时边读边改的情景，她那清瘦的脸庞和慈祥的目光浮现在儿子眼前，鞭策着他再打起精神，坚持工作一会儿。

清代学者袁枚曾写道：“名须没世称才好，书到今生读已迟。”他又写道：“才欲其大，志欲其小。才大则任事有余；志小，则愿无不足。”如今作者之一范洪义已年过六旬，无有大志，但仍然有追求学术境界、补充优美知识得以滋润身心的上进心和迫切性，故写出此书与本科生、研究生交流，有误之处，望四方读者不吝指教。

作 者

2014 年 9 月

目 次

序	i
第 1 章 正规乘积编序算符内的积分技术	1
1.1 对 ket-bra 算符实现积分的需求和现实意义	1
1.2 如何实现对 $ \rangle$ 与 $\langle $ 组成的投影算符积分的思路	3
1.3 算符正规乘积的性质	4
1.4 坐标、动量表象完备性的正规乘积内的高斯积分形式	6
1.5 相干态表象完备性的高斯积分形式	7
1.6 算符 $\int_{-\infty}^{\infty} dx/\sqrt{\mu} x/\mu\rangle\langle x $ 的积分	8
第 2 章 广义 Weyl 编序算符内的积分技术	10
2.1 算符 Weyl 编序的引入	10
2.2 三种积分核统一为广义 Wigner 算符 $\Omega_k(p, q)$	11
2.3 $\Omega_k(p, q)$ 的二维正态分布形式	12
2.4 广义 Weyl 编序和广义 Weyl 对应	13
2.5 压缩算符的经典广义 Weyl 对应	17
2.6 密度矩阵的 Weyl 编序展开公式	18
第 3 章 算符 Hermite 多项式 (单变量) 和算符 Hermite 多项式方法	22
3.1 范氏公式 $H_n(Q) =: (2Q)^n :$ 及其推广	22
3.2 用范氏公式求粒子态波函数	24
3.3 用范氏公式给出 Hermite 多项式的递推关系和 Hermite 方程	29
3.4 范氏公式的二维推广	30
3.5 算符恒等式 $Q^n = (2i)^{-n} : H_n(iQ) :$	32
3.6 从算符恒等式 (3.5) 和式 (3.62) 导出 Hermite 多项式的级数展开 及其逆关系	33

3.7	算符恒等式 $H_n(fX) = (1 - f^2)^{\frac{n}{2}} :H_n(fX/1 - \sqrt{f^2}) :$	39
3.8	算符 $1/X$ 的 Hermite 多项式展开: 量子 Hilbert 变换	41
3.9	新 Hermite 多项式算符恒等式与压缩数态的导出	42
3.10	用算符 Hermite 多项式方法推导含 $H_n(q)$ 的新二项式定理	45
3.11	用算符 Hermite 多项式方法推导 $H_n(X_1)H_n(X_2)$ 的母函数	47
3.12	再论算符 Hermite 多项式乘积公式 $H_p(X)H_q(X)$	47
3.13	跃迁矩阵元 $\langle m X^k n\rangle$ 和矩的计算	51
3.14	$\langle m e^{fX} n\rangle$ 和累积矩的计算	52
3.15	$\langle m e^{fX^2} n\rangle$ 的计算	53
3.16	$f(X) \mapsto f(X)$: 的微分运算	54
3.17	算符恒等式 $(fa + ga^\dagger)^n = (-i\sqrt{fg/2})^n \times :H_n(i(fa + ga^\dagger)/\sqrt{2fg}) :$ 及其倒易关系	57
3.18	径向坐标算符 Hermite 多项式的正规乘积展开	59
第 4 章	算符 Hermite 多项式的反正规乘积展开	67
4.1	反正规乘积展开 $H_n(iX) = (2i)^n :X^n :$ 和 $X^n = (2i)^{-n} :H_n(X) :$	67
4.2	化算符为反正规乘积的范氏公式	70
4.3	光子调控热光场的密度算符的 $\mathcal{P}$ 表示	71
4.4	应用于推导量子力学光子计数分布的新公式	73
第 5 章	算符 Laguerre 多项式	75
5.1	用算符 Hermite 多项式导出 Laguerre 多项式	75
5.2	Laguerre 多项式的逆展开 (倒易公式)	77
5.3	伴随 Laguerre 多项式	79
5.4	$X^m 0\rangle$ 归一化为 Laguerre 多项式	80
第 6 章	算符 Hermite 多项式函数 (双变量) 和算符 Hermite 多项式方法	83
6.1	从相干态表象到双变量 Hermite 多项式	83
6.2	两个有序的双模算符 Hermite 多项式的乘积	88
6.3	由双模算符 Hermite 多项式导出 $H_{m,n}$ 的递推关系	89
第 7 章	双模 Hermite 多项式的物理解释	92
第 8 章	纠缠态表象与双模 Hermite 多项式	96
8.1	纠缠态表象的引入	96
8.2	纠缠态表象和双模 Hermite 多项式	101

8.3	若干双模算符 Hermite 多项式的恒等式	102
8.4	两个 $H_{m,n}$ 的乘积公式	104
8.5	双变量 Hermite 多项式的重要母函数公式 (I)	106
8.6	负二项式态的耗散公式	110
8.7	描述相干态的扩散过程的量子主方程	114
8.8	双变量 Hermite 多项式的重要母函数公式 (II)	117
8.9	双变量 Hermite 多项式的重要母函数公式 (III)	120
第 9 章	作为 Fock 空间 $m\rangle\langle n$ 的 Weyl 编序展开的双变量 Hermite 多项式	123
9.1	$ m\rangle\langle n $ 的 Weyl 编序展开及应用	123
9.2	算符 $a^{\dagger k} a^l$ 的新展开式	126
9.3	光场算符 $a^k a^{\dagger l}$ 的新展开式	127
第 10 章	双变量 Hermite 多项式作为范氏变换中的积分核	129
10.1	范氏积分变换的定义	129
10.2	$\delta(p-P)\delta(q-Q)$ 的 Weyl 编序作为核	132
10.3	从 Weyl 编序转化到 $P-Q$ 编序和 $Q-P$ 编序	133
10.4	$Q-P$ 编序与 $P-Q$ 编序的互换	135
10.5	$(P+Q)^n$ 的 $P-Q$ 编序或 $Q-P$ 编序展开	136
10.6	范氏积分变换的定义 (复的情形)	136
第 11 章	用量子力学方法导出 Legendre 多项式的新形式和新母函数	138
11.1	减光子压缩态的归一化系数	138
11.2	Legendre 多项式的新形式和新母函数	141
11.3	从增光子压缩态的归一化求 Legendre 多项式的新形式和新母函数	143
11.4	关于 Legendre 多项式的二项式定理	145
11.5	单模压缩态光子数的累积量公式	147
第 12 章	用量子力学方法导出 Jacobi 多项式的新母函数公式	149
12.1	从求双模减光子压缩态的归一化系数导出 Jacobi 多项式的新母函数公式	149
12.2	从求双模增光子压缩态的归一化系数导出 Jacobi 多项式的新母函数公式	153
12.3	双模压缩态光子数的累积量公式	155

第 13 章 原子相干态中的 Hermite 多项式	157
13.1 原子相干态在 Fock 空间中的表示与产生	157
13.2 原子相干态 $ \tau\rangle$ 在纠缠态 $ \xi\rangle$ 表象中的波函数 (新函数空间) ...	161
13.3 关于双变量 Hermite 多项式的一个新二项式定理	163
13.4 新函数空间的正交完备性及相应的积分变换	165
13.5 原子相干态 $ \tau\rangle$ 在纠缠态 $ \eta\rangle$ 表象中的波函数	166
13.6 电子处于均匀磁场中并附加非各向同性谐振子势的哈密顿量的 本征态	169
第 14 章 Hankel 变换的量子对应: Bessel 函数作为表象变换元	172
14.1 一对共轭纠缠态及其互变换	172
14.2 一对共轭诱导纠缠态	174
14.3 矩阵元 $\langle s, r' q, r \rangle$ 作为 Hankel 变换的核	175
14.4 $ s, r'\rangle$ 和 $ q, r\rangle$ 的阶梯性质和压缩性质	177
14.5 用量子力学方法给出 Bessel 方程	179
14.6 用表象的性质推导 Bessel 函数的递推关系	180
第 15 章 偶数阶、奇数阶单变量 Hermite 多项式的新生成函数公式 及物理应用	182
15.1 偶数阶 Hermite 多项式的母函数	182
15.2 奇数阶 Hermite 多项式的母函数公式	183
15.3 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{2n+l}(X)$	184
15.4 物理应用	187
第 16 章 构建光场非高斯态的新算符恒等式及相应的有关 Hermite 多项式的新积分公式	189
16.1 适用于求增光子压缩态归一化系数的积分公式	190
16.2 适用于求减光子压缩态归一化系数的积分公式	193
16.3 关于偶数阶双变量 Hermite 多项式的母函数公式	194
16.4 涉及双变量 Hermite 多项式的广义二项式定理	196
附录 A 一种导出乘积 Hermite 多项式母函数的简单方法	199
附录 B 有关偶数阶 Hermite 多项式的求和公式的推广	201
结语	203

第 1 章 正规乘积编序算符内的积分技术

1.1 对 ket-bra 算符实现积分的需求和现实意义

Dirac 在《量子力学原理》中写道：“…… 符号法，用抽象的方式直接地处理有根本重要意义的一些量 ……” “但是符号法看来更能深入事物的本质，它可以使我们用简洁精练的方式来表达物理规律，很可能在将来当它变得更为人们所了解，而且它本身的特殊数学得到发展时，它将更多地被人们所采用。”

可见，一方面，Dirac 承认符号法是抽象的。诚然，理论物理需要抽象思维，在研究进程中，人们往往处于进退两难的窘境之中：理论可能会不够抽象，并错失了重要的物理学；也可能过于抽象，结果把我们模型中假设的目标变成了吞噬我们的真实的怪物。有没有一种非常精妙的数学方法，使得抽象的符号法“飞入寻常百姓家”？

另一方面，Dirac 也意识到符号法本身的数学被人理解得还不够，但直到 Dirac 于 1984 年去世，它的潜力与应用尚未被充分地挖掘。很多有经典物理背景的量子变换也属未知，寻找新的有物理意义的表象也缺乏好的办法。总之，科学中的艺术灵感与量子逻辑的发展尚不平衡，尚需新的能窥探物理艺术的人出现，这些人具有巧妙的、基本的科学思维，能出奇招。在这种当口，理论物理学家不能期待数学家“雪中送炭”，而要自创新数学。实际上，理论物理学家从认识自然界的进程中贡献的智慧也为数学家创造了机会。

就像 Dirac 的 δ 函数开启了数学领域中的广义函数的“一扇门”那样（捷足先登进入此“门”并取得丰硕成果的是法国数学家 Schwarz，他后来因提出分布论而获得了菲尔兹奖）。Dirac 所开创的量子力学符号也向数学家们

暗示了对 ket-bra 符号积分的可能性, 他指出了符号法有它本身的特殊数学亟待发展, 但也许是数学家的思维模式与理论物理学家的不同, 数学家 von Neumann 在 1932 年虽然写了《量子力学的数学基础》这本书, 书中把原子的状态用 Hilbert 空间中的矢量来描写, 矢量的转动既可对应 Heisenberg 的矩阵, 又可对应 Schrödinger 的波函数, 并讨论了量子力学的公理化表述, 但 von Neumann 没有想到把积分技术推广到 ket-bra 算符上去. 可见有时候有天赋的人也不一定提出好的问题, 尽管它能触手可及. 而注意“寻常出奇崛”的寻常人“笨鸟先飞”, 也许有可能打开深入理解量子力学表象与发展量子变换的“一扇新门”.

17 世纪 Newton 和 Leibniz 创立微积分后, 在 18 世纪, Poisson 就将复数引入微积分, 美国数学史家 Kline 说: “Poisson 是第一个沿着复平面上的路径实行积分的人” 而 Cauchy 随之提出复变函数围道积分公式. 到了 19 世纪中叶, Lebesgue 将微积分推广到被积函数不可微的情形, 并由此创立了实变函数论. 那么在 20 世纪进入了量子时代后, 微积分运算能否对狄拉克发明的 ket-bra 符号组成的算符进行呢? 这个问题首先由中国学者范洪义提出并予以解决, 他的博士学位论文就包含了这部分内容, 因此他有理由成为中国第一批 18 名博士之一, 为“国产”博士增光.

Hilbert 说: “只有把一门学科的所有数学内核都挖掘出来, 它才能成为一门科学.” 那么, 对 Dirac 发明的 ket-bra 符号组成的算符进行积分, 这仅仅是数学方法的进步吗?

Einstein 在 1933 年说: “创造性原理存在于数学之中.” 在 1946 年写的《自述》一文中, Einstein 又写道: “……通向更深入基础知识的道路同时是和最隐秘的数学方法联系着的. 只是在几年独立的科学研究工作之后, 我才逐渐明白了这一点.” 例如, 他曾误认为 Minkowski 把 4 维时空引入狭义相对论的做法没有必要, 甚至觉得把此理论写成张量形式简直就是画蛇添足之举. 后来他才意识到 Minkowski 的做法可促成狭义相对论推广为广义相对论. 可见, 精美的数学对于物理概念的形成及深化起了关键作用.

针对 Dirac 简洁的符号 $|\rangle$ (ket) 与 $\langle|$ (bra) 组成的投影算符, 范洪义于 20 世纪 70 年代怎么会首先想到要对 $\int_{-\infty}^{\infty} dx |x/\mu\rangle \langle x|$ 积分呢? 因为他注意到尽管 Dirac 发现了经典 Poisson 括号过渡为量子力学的对易子, 但如何能将经典正则变换直接过渡到量子么正变换算符呢? 范洪义想到了要充分利用表象的完备性 $\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x|$, 例如, 坐标本征值 $x \mapsto x/\mu$ 是一种压缩变换, 属于经典变换, 若我们能把此积分做出就得到一个显式算符, 就可实现从经典到量子变换的过渡. 注意到做这件事的困难是: 这是一个对算符的积分, 而这个算

符的内涵可能又包含了一些不可对易的基本算符,那么这些基本算符是什么呢?另一困难是,对于不可对易的对象的乘积实行积分(求和)本身就含糊不清,由于乘积因子不可交换,积分是对前乘积因子积,还是对后乘积因子积呢?范洪义经过多年摸索和若干次失败,终于找到了解决问题的捷径.如今,他记得住的只是捷径,那些蜿蜒的荆棘岔道已经在记忆中模糊了.

1.2 如何实现对 $|\rangle$ 与 $\langle|$ 组成的投影算符积分的思路

如何实现对 $\int_{-\infty}^{\infty} dx |x/\mu\rangle \langle x|$ 积分呢?作者想到大多数的算符都可以用 Fock 空间的产生算符和消灭算符(基本算符)表示出来,也就是说,首先应把 $|x/\mu\rangle \langle x|$ 表示为 a 与 $a^\dagger$ 的函数,然后设法让 a 与 $a^\dagger$ 在某种排序规则的记号内可以交换位置(对易),这样一来, a 与 $a^\dagger$ 在对 x 的函数做积分时就只是扮演了参变量的角色.作者又想到了在学习量子场论时 Bose 算符的一种正规排序(normal ordering),如在一个由 a 与 $a^\dagger$ 函数所组成的单项式中,所有的 $a^\dagger$ 都排在 a 的左边,则称其已被排好为正规乘积了,可以 $::$ 标记之.由于它已经是正规排序的算符,因此在 $::$ 的内部, a 与 $a^\dagger$ 是可以交换的(因为无论它们在内部如何任意地交换,而当要撤去 $::$ 时,所有的 $a^\dagger$ 必须排在 a 的左边,在 $::$ 内部 a 与 $a^\dagger$ 的任何交换都不会改变其最终结果),于是积分就可以对 $::$ 内部的普通函数(以 a 与 $a^\dagger$ 为积分参数)进行了.所以对 $|x/\mu\rangle \langle x|$ 积分的步骤是,首先将它用 a 与 $a^\dagger$ 展开,然后,将其纳入正规排列,套上 $::$ 后, a 与 $a^\dagger$ 就从原来的不可交换变成可对易了,就可以对 x 积分了,在积分过程中要保留 $::$.而在积分后去掉 $::$ 时,事先把产生算符都置于消灭算符的左边.这样一个积分技术称为有序算符内的积分技术(integration within an ordered product of operator, 简称为 IWOP).它揭开了发展量子力学表象与变换理论的新的一页,也实现了由符号表征向所谓“纯结构”计算的转变.

Dirac 的符号既简洁又抽象.抽象的东西能深刻反映物理本质,但抽象的东西也使初学者望而生畏.现在能有办法对 $|\rangle$ 与 $\langle|$ 组成的投影算符积分,积分的结果如有明显的物理解释,那我们就少了一些对抽象的敬畏,并能进一步揭示 Dirac 符号法更深层次的美. Dirac 看重的数学美在于它的简单性.读者将会看到, $\int_{-\infty}^{\infty} dx |x/\mu\rangle \langle x|$ 的积分结果是简洁的, IWOP 技术体现了美学价值,并进一步揭示了 Dirac 符号的美.

Dirac 坚信: “一个物理规律必须有数学上的美”, 又说: “数学美是一种质感, 它不能定义 ……” 在某个场合, 他对理论物理学家说: “让数学成为你的向导至少是在开始的时候.” “首先为了它自身的原因玩味漂亮的数学, 然后看这个是不是引导到新物理.” 诚如读者将要在本书中看到的, IWOP 技术导出了大量的新表象、新变换和新的物理态, 解决了不少物理问题. 中国古典哲学家老子曾说: “道可道, 非常道.” 而用 Dirac 的符号法我们可以体会 “理推理, 趋实理” 的意境.

1.3 算符正规乘积的性质

算符正规乘积的性质如下:

(1) 尽管 Bose 算符 $a, a^\dagger$ 的对易子 $[a, a^\dagger] = 1$, 但在正规乘积内 $a, a^\dagger$ 是对易的, 即: $a^\dagger a := aa^\dagger := a^\dagger a$.

(2) c 数可以自由出入正规乘积记号, 并且可以对正规乘积内的 c 数进行积分或微分运算, 前者要求积分收敛.

(3) 正规乘积内部的正规乘积记号可以取消, 即: $f(a^\dagger, a) : g(a^\dagger, a) := : f(a^\dagger, a)g(a^\dagger, a) :$.

(4) 正规乘积与正规乘积的和满足: $f(a^\dagger, a) : + : g(a^\dagger, a) := : [f(a^\dagger, a) + g(a^\dagger, a)] :$.

(5) 正规乘积算符的相干态矩阵元为 $\langle z_1 | : f(a^\dagger, a) : | z_2 \rangle = f(z_1^*, z_2) \langle z_1 | z_2 \rangle$, 这是因为 $a|z_2\rangle = z_2|z_2\rangle$.

(6) 真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积展开式是

$$|0\rangle\langle 0| =: \exp(-a^\dagger a) : \quad (1.1)$$

说明 记 $|0\rangle$ 为 Fock 真空态, $a|0\rangle = 0$. 由 $|0\rangle\langle 0|0\rangle = |0\rangle$, 知 $|0\rangle$ 是算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的本征态, 所以 $|0\rangle\langle 0|$ 必是粒子数算符 $N = a^\dagger a$ 的函数. 记

$$|0\rangle\langle 0| = f(N) \quad (1.2)$$

其中 $f(N)$ 待定. 根据 $f(N)|n \neq 0\rangle = 0$, $f(N)|0\rangle = |0\rangle$, 0^0 是不定型, 我们知

$$|0\rangle\langle 0| = 0^N = (1-1)^N$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - N + \frac{1}{2!}N(N-1) - \frac{1}{3!}N(N-1)(N-2) + \cdots \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} N(N-1) \cdots (N-m+1)
\end{aligned} \quad (1.3)$$

又由 $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1$, $|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle$, 以及 $N|n\rangle = n|n\rangle$, $a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, 得

$$\begin{aligned}
a^{\dagger m} a^m &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{\dagger m} |n\rangle \langle n| a^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdots (n+m) |n+m\rangle \langle n+m| \\
&= N(N-1) \cdots (N-m+1) (1 - |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1| - \cdots - |m\rangle \langle m|) \\
&= N(N-1) \cdots (N-m+1)
\end{aligned} \quad (1.4)$$

将式 (1.4) 代入式 (1.3), 得

$$|0\rangle \langle 0| = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} a^{\dagger m} a^m =: \exp(-a^{\dagger} a):$$

(7) 关于正规乘积的一个算符恒等式, 即

$$\begin{aligned}
e^{\lambda a^{\dagger} a} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda} |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda} \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle \langle 0| \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^{\lambda} a^{\dagger} a)^n e^{a^{\dagger} a} =: \exp[(e^{\lambda} - 1) a^{\dagger} a]:
\end{aligned} \quad (1.5)$$

对于去掉记号 $:$ 非常有用, 如

$$: e^{\lambda a^{\dagger} a} := \exp[a^{\dagger} a \ln(\lambda + 1)] \quad (1.6)$$

(8) Hermite 共轭操作可进入 $:$ 的内部进行, 即 $(W \cdots V)^{\dagger} = (W \cdots V)^{\dagger} :$.

(9) 在正规乘积内, 以下两个等式成立

$$\begin{aligned}
&: \frac{\partial}{\partial a} f(a, a^{\dagger}) := [: f(a, a^{\dagger}) :, a^{\dagger}] \\
&: \frac{\partial}{\partial a^{\dagger}} f(a, a^{\dagger}) := [: f(a, a^{\dagger}) :, a]
\end{aligned} \quad (1.7)$$

对于多模情形, 上式可推广为

$$: \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\partial}{\partial a_j} f(a_i, a_i^{\dagger}, a_j, a_j^{\dagger}) := [[: f(a_i, a_i^{\dagger}, a_j, a_j^{\dagger}) :, a_j^{\dagger}], a_i^{\dagger}] \quad (1.8)$$

1.4 坐标、动量表象完备性的正规乘积内的高斯积分形式

借用正规乘积算符内的积分方法, 我们可以很方便地计算 ket-bra 的有关态矢的积分, 并验证表象的性质.

设 X 是坐标算符, P 是动量算符, $[X, P] = i$, 为方便起见, 已取 $\hbar = 1$.

对于坐标表象, 由于 $X = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$, $P = (a - a^\dagger)/(\sqrt{2}i)$, 以及正交性 $\langle x | x' \rangle = \delta(x - x')$, 所以

$$\begin{aligned}
 |x\rangle\langle x| &= \delta(x - X) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp[ip(x - X)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp \left[ip \left(x - \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp : \exp \left[-\frac{1}{4}p^2 + ip \left(x - \frac{a^\dagger}{\sqrt{2}} \right) - ip \frac{a}{\sqrt{2}} \right] : \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp \left[-\left(x - \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] : \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa^\dagger - \frac{a^{\dagger 2}}{2} \right) : \exp(-a^\dagger a) : \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa - \frac{a^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa^\dagger - \frac{a^{\dagger 2}}{2} \right) |0\rangle\langle 0| \exp \left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa - \frac{a^2}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

可见 $|x\rangle$ 在 Fock 空间中的表示为

$$|x\rangle = \pi^{-1/4} \exp \left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa^\dagger - \frac{a^{\dagger 2}}{2} \right) |0\rangle \tag{1.10}$$

所以完备性为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle\langle x| = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp \left[-\left(x - \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] :$$

$$=: \exp \left[\frac{1}{2} (a^\dagger + a)^2 - \frac{1}{2} (a + a^\dagger)^2 \right] := 1 \quad (1.11)$$

类似地, 对于动量表象, 由正交性 $\langle p | p' \rangle = \delta(p - p')$, 得

$$|p\rangle = \pi^{-1/4} \exp \left(-\frac{p^2}{2} + \sqrt{2}ipa^\dagger + \frac{a^{\dagger 2}}{2} \right) |0\rangle \quad (1.12)$$

所以完备性为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \pi^{-1/2} \exp \left(-\frac{p^2}{2} + \sqrt{2}ipa^\dagger + \frac{a^{\dagger 2}}{2} \right) |0\rangle \\ &\quad \times \langle 0| \exp \left(-\frac{p^2}{2} - \sqrt{2}ipa + \frac{a^2}{2} \right) \\ &=: \exp \left[\frac{1}{2} (a^\dagger - a)^2 - \frac{1}{2} (a - a^\dagger)^2 \right] := 1 \end{aligned} \quad (1.13)$$

式 (1.11) 和式 (1.13) 也可以写成在 $::$ 内部的高斯积分形式 (由中国学者首先给出):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx : \exp[-(x - X)^2] : = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp : \exp[-(p - P)^2] : = 1 \end{aligned} \quad (1.14)$$

它们不但体现了 Dirac 符号深层次的美感, 而且能与统计学的正态分布相联系. 此外还有广泛的应用. 例如, 要求 $X^m = [(a + a^\dagger)/\sqrt{2}]^m$ 的正规乘积展开, 鉴于 a 与 $a^\dagger$ 不可交换, 传统的二项式定理不能直接用, 所以我们用式 (1.14) 和 IWOP 技术, 得到

$$\begin{aligned} X^m &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x| x^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^m : e^{-(x-X)^2} : \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \sum_{l=0}^{[m/2]} \Gamma(l+1/2) \binom{m}{2l} X^{m-2l} : \end{aligned} \quad (1.15)$$

这里 Γ 是 Gamma 函数, $\Gamma(l+1/2) = \sqrt{\pi} 2^{-l} (2l-1)!!$.

1.5 相干态表象完备性的高斯积分形式

相干态定义为 $|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2 + \alpha a^\dagger) |0\rangle$. 利用 IWOP 技术, 易得其完备性: