



普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

微积分学学习辅导

毕志伟 吴洁 主编



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

经典教材辅导用书·数学类丛书

微积分学学习辅导

主 编 毕志伟 吴 洁

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书是依据微积分学(或高等数学)教学基本要求,为帮助学生深入学习微积分学知识而编写的一本辅导教材,每章内容包括基本要求、知识点解析、解题指导、知识扩展、习题、部分答案与提示。

本书侧重于对学生学习过程中常见的疑难问题以问答方式进行剖析解答,对典型题型的解题方法和策略进行归纳总结,选题范围广、梯度大,注重基础性与综合性相结合,例题分析详尽、易懂,尽可能一题多解,注重归纳与提高,本书是作者在长期教学积累上的总结。阅读此书,必将加深对概念、理论的理解,开阔解题思路,提高分析问题、解决问题及应试的能力。

本书适合正在学习微积分学的学生使用,对准备参加研究生数学入学考试的学生也是一本很好的参考书,同时也可以作为教学参考书和习题课教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学学习辅导/毕志伟,吴洁主编. —武汉:华中科技大学出版社,2014.7

ISBN 978-7-5680-0226-4

I. ①微… II. ①毕… ②吴… III. ①微积分-高等学校-教学参考资料 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 155149 号

微积分学学习辅导

毕志伟 吴 洁 主编

策划编辑:周芬娜

责任编辑:周芬娜

封面设计:李 嫒

责任校对:周 娟

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074

电话:(027)81321915

录 排:武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷:武汉科源印刷设计有限公司

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:22.75

字 数:510千字

版 次:2014年9月第1版第1次印刷

定 价:45.00元



華中科技大學

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

本书是为正在学习微积分学(或高等数学)课程的大学本科生编写的一本同步辅导书,它可作为习题课教学参考教材,也适合于复习高等数学课程,同时,还可以作为研究生数学入学考试的备考参考书。

本书内容紧扣教学大纲和考试大纲,编排次序与教学实际一致。内容包括函数、极限与连续、一元微积分、无穷级数、矢量与空间解析几何、多元微积分、微分方程。

本书以章为基本单位,每一章分为四个部分:基本要求、知识点解析、解题指导和知识扩展。各部分的编写特点如下。

基本要求:列举了教育部理工类课程教学大纲规定的教学要求。

知识点解析:点拨重要的知识点,归纳概念或结论之间的内在关系,解答学习过程中常见的疑难问题。

解题指导:通过典型题型来介绍解题方法和策略,以提高学习的效率。在典型题型中通过若干例子来介绍解题方法和策略的应用。例题选择在确保基本知识的基础上,注重启发性和综合性。例题解答注重分析和引导,详细易懂。

知识扩展:提供了适当的相关知识和结论。

学习数学的有效方法便是做题。为了检验解题能力,书中提供了相应的习题。这些练习分为 A、B 两类,供不同要求的读者使用。

本书由华中科技大学数学与统计学院微积分课程组组织编写,参编人员有毕志伟、何涛、金建华、罗德斌、刘蔚萍、梅正阳、王德荣、吴洁、俞小清、周军等。统稿工作由毕志伟和吴洁负责。

在本书编写过程中参考了原课程组编写的《微积分学习题课教程》(华中科技大学出版社出版)及大量的国内外参考文献,引用了全国硕士研究生入学统一考试的数学试题,特此说明。

编 者

2014 年 5 月

目 录

第 1 章 函数	(1)
1.1 基本要求	(1)
1.2 知识点解析	(1)
【1-1】 函数概念的理解	(1)
【1-2】 反函数的记号与图像	(2)
【1-3】 如何围绕函数的初等运算探索函数性质	(2)
1.3 解题指导	(2)
【题型 1-1】 求解不等式	(2)
【题型 1-2】 确定函数的定义域	(4)
【题型 1-3】 求可逆函数的反函数	(4)
【题型 1-4】 求函数的复合以及分析复合函数的构成	(5)
【题型 1-5】 确定函数所具备的几何性质	(6)
1.4 知识扩展	(8)
习题 1	(10)
部分答案与提示	(11)
第 2 章 极限与连续	(13)
2.1 基本要求	(13)
2.2 知识点解析	(13)
【2-1】 理解数列极限的定义	(13)
【2-2】 判定变量的极限存在的常用方法	(14)
【2-3】 判定变量的极限不存在的常用方法	(14)
【2-4】 收敛数列是否一定是单调有界数列	(14)
【2-5】 数列在增加、减少或改变有限项之后是否会改变其敛散性	(14)
【2-6】 使用极限四则运算法则时注意前提条件	(14)
【2-7】 注意归纳特殊函数所承载的性质	(15)
【2-8】 如何论述数列或函数的无界性	(15)
【2-9】 无界变量与无穷大量的区别	(15)
【2-10】 等价代换与函数运算的关系归纳	(15)
2.3 解题指导	(16)
【题型 2-1】 依据定义或性质论证极限结果	(16)
【题型 2-2】 有通项公式的数列极限计算	(17)
【题型 2-3】 递归方式定义的数列的极限计算	(18)

【题型 2-4】	确定无穷小量的主部	(19)
【题型 2-5】	使用无穷小量因式替换求函数极限	(20)
【题型 2-6】	求幂指型变量 u^v 的极限	(21)
【题型 2-7】	根据极限相关条件确定待定参数问题	(22)
【题型 2-8】	判断函数的连续性	(23)
【题型 2-9】	函数的间断点确定与类型识别	(24)
【题型 2-10】	连续函数的介值问题	(24)
【题型 2-11】	与连续有关的其他问题	(26)
2.4	知识扩展	(26)
	习题 2	(27)
	部分答案与提示	(30)
第 3 章	导数与微分	(31)
3.1	基本要求	(31)
3.2	知识点解析	(31)
【3-1】	学习导数的重要意义	(31)
【3-2】	几对容易混淆的导数记号	(31)
【3-3】	在一点连续但不可导的函数	(32)
【3-4】	一点处可导与一点附近可导的区别	(32)
【3-5】	导数概念与微分概念的比较	(33)
【3-6】	何时需要依据定义求函数在一点的导数	(33)
【3-7】	复合函数导数的链法则与复合函数微分的链法则	(33)
【3-8】	导函数的周期性与奇偶性	(34)
【3-9】	绝对值函数的可导性	(34)
【3-10】	与导数定义等价的几个极限式	(35)
3.3	解题指导	(35)
【题型 3-1】	依据导数定义判定函数在某点的可导性及计算导数	(35)
【题型 3-2】	由可导性确定函数中的待定参数	(37)
【题型 3-3】	讨论导函数在一点的连续性	(38)
【题型 3-4】	一类可以转化为函数在某点的导数的极限	(39)
【题型 3-5】	含绝对值因式的函数的可导性	(39)
【题型 3-6】	依据求导法则和公式计算初等函数的导数	(40)
【题型 3-7】	求反函数的导数	(41)
【题型 3-8】	求隐函数的导数	(42)
【题型 3-9】	求由参数方程所确定的函数的导数	(43)
【题型 3-10】	求由极坐标方程所确定函数的导数	(44)
【题型 3-11】	求幂指函数与连续积商函数的导数	(44)
【题型 3-12】	微分的计算与应用	(45)

【题型 3-13】 求函数的 n 阶导数	(47)
【题型 3-14】 求相关变化率	(48)
【题型 3-15】 导数的几何应用	(48)
3.4 知识扩展	(49)
习题 3	(51)
部分答案与提示	(55)
第 4 章 微分中值定理 · 应用	(57)
4.1 基本要求	(57)
4.2 知识点解析	(57)
【4-1】 本章的脉络和主要思想方法	(57)
【4-2】 拉格朗日中值公式的等价形式及意义	(57)
【4-3】 柯西中值定理的下述证法对吗	(58)
【4-4】 正确理解微分中值定理的条件	(58)
【4-5】 选用微分中值定理的一般原则和思路	(58)
【4-6】 洛必达法则使用要点	(59)
【4-7】 函数的驻点与函数的极值点关系	(59)
【4-8】 极值与最值的区别与联系是什么	(60)
【4-9】 曲线渐近线	(60)
【4-10】 泰勒公式的重要性和典型用途归纳	(60)
4.3 解题指导	(60)
【题型 4-1】 方程的根问题	(60)
【题型 4-2】 函数的中值问题(或表现为方程的根问题)	(62)
【题型 4-3】 函数恒等式(或函数恒为常数)的证明	(67)
【题型 4-4】 含中值点导数(或 $f(x_2) - f(x_1)$)的不等式的证明	(67)
【题型 4-5】 函数不等式 $u(x) > v(x)$ 的证明	(69)
【题型 4-6】 求函数的泰勒展开式	(73)
【题型 4-7】 泰勒公式用于确定无穷小量主部和导数计算	(74)
【题型 4-8】 未定型(或不定式)的极限	(75)
【题型 4-9】 函数单调性与凹凸性的判别	(78)
【题型 4-10】 极值问题	(80)
【题型 4-11】 最值问题	(82)
【题型 4-12】 求曲线的渐近线	(82)
【题型 4-13】 求曲线的曲率	(83)
【题型 4-14】 函数的作图	(84)
4.4 知识扩展	(85)
习题 4	(86)
部分答案与提示	(90)

第 5 章 不定积分	(92)
5.1 基本要求	(92)
5.2 知识点解析	(92)
【5-1】 在区间 (a, b) 内有间断点的函数是否存在原函数	(92)
【5-2】 为何有时候使用的方法不同求出来的原函数不一样	(92)
【5-3】 初等函数的原函数是否还是初等函数	(93)
【5-4】 不理解任意常数作用导致的一种错误	(93)
【5-5】 不定积分法的选择要领	(93)
【5-6】 基本积分表的扩充	(94)
5.3 解题指导	(94)
【题型 5-1】 用分项积分法计算不定积分	(94)
【题型 5-2】 用凑微分法计算不定积分	(95)
【题型 5-3】 用换元法计算不定积分	(99)
【题型 5-4】 用分部积分法计算不定积分	(101)
【题型 5-5】 求有理函数的不定积分	(104)
【题型 5-6】 一题多解举例	(107)
【题型 5-7】 计算分段函数的不定积分	(110)
【题型 5-8】 涉及不定积分概念与性质的综合问题	(111)
5.4 知识扩展	(112)
习题 5	(113)
部分答案与提示	(116)
第 6 章 定积分	(120)
6.1 基本要求	(120)
6.2 知识点解析	(120)
【6-1】 可利用定积分概念解决的问题	(120)
【6-2】 闭区间上的有界函数是否一定可积	(120)
【6-3】 如果 $ f(x) $ 可积, 那么 $f(x)$ 是否一定可积	(120)
【6-4】 函数可积与存在原函数是不是一回事	(121)
【6-5】 为什么说牛顿-莱布尼兹公式是微积分基本公式	(121)
【6-6】 对称区间上的连续奇函数的原函数都是偶函数吗	(121)
【6-7】 对称区间上的连续偶函数的原函数都是奇函数吗	(121)
【6-8】 连续周期函数的原函数都是周期函数吗	(122)
【6-9】 反常积分与定积分的关系	(122)
【6-10】 能否将定积分中“对称性方法”用在反常积分上	(122)
6.3 解题指导	(122)
【题型 6-1】 用分项积分法和凑微分法求定积分	(122)
【题型 6-2】 用换元法求定积分	(123)

【题型 6-3】	用分部积分法求定积分	(124)
【题型 6-4】	求对称区间上的定积分	(126)
【题型 6-5】	求周期函数的定积分	(127)
【题型 6-6】	求分段函数的定积分	(128)
【题型 6-7】	利用几个定积分公式求某些定积分	(129)
【题型 6-8】	利用定积分求某些 n 项和的数列的极限	(130)
【题型 6-9】	求变限积分函数的导数	(132)
【题型 6-10】	定积分等式的证明	(133)
【题型 6-11】	与定积分有关的方程的根问题或中值问题	(135)
【题型 6-12】	定积分不等式的证明	(138)
【题型 6-13】	求含变限积分或定积分的极限	(142)
【题型 6-14】	讨论变限积分函数的基本性质	(143)
【题型 6-15】	求分段函数的变限积分	(146)
【题型 6-16】	求解两种含有积分的函数方程	(146)
【题型 6-17】	求无穷区间上的反常积分	(147)
【题型 6-18】	求无界函数的反常积分	(148)
【题型 6-19】	求混合型反常积分	(149)
【题型 6-20】	求平面区域的面积	(150)
【题型 6-21】	求截面面积为已知的立体的体积	(151)
【题型 6-22】	求平面曲线的弧长	(152)
【题型 6-23】	定积分的物理应用	(153)
【题型 6-24】	与定积分有关的最值问题	(154)
6.4	知识扩展	(156)
习题 6		(157)
部分答案与提示		(163)
第 7 章	常微分方程	(165)
7.1	基本要求	(165)
7.2	知识点解析	(165)
【7-1】	方程分类与解法对应总览	(165)
【7-2】	微分方程的通解是否指微分方程的所有解	(166)
【7-3】	求解一阶微分方程的关键是什么?	(166)
【7-4】	如何求二阶齐次常系数线性微分方程的通解	(167)
【7-5】	如何求二阶非齐次常系数线性微分方程的通解	(167)
7.3	解题指导	(167)
【题型 7-1】	求一阶微分方程的通解或特解	(167)
【题型 7-2】	可降阶的高阶微分方程的求解	(172)
【题型 7-3】	二阶常系数线性微分方程求解	(174)

【题型 7-4】	三阶及以上常系数齐次线性微分方程的求解	(176)
【题型 7-5】	已知微分方程的解,反求微分方程	(176)
【题型 7-6】	欧拉方程的求解	(178)
【题型 7-7】	能转化为微分方程的积分方程的求解	(179)
【题型 7-8】	微分方程的几何应用举例	(181)
【题型 7-9】	微分方程的物理应用举例	(182)
【题型 7-10】	微分方程综合问题	(184)
7.4	知识扩展	(185)
习题 7		(186)
	部分答案与提示	(189)
第 8 章	矢量代数与空间解析几何	(192)
8.1	基本要求	(192)
8.2	知识点解析	(192)
【8-1】	矢量与数量的比较	(192)
【8-2】	数量积、矢量积、混合积的比较	(193)
【8-3】	平面方程的四种形式	(193)
【8-4】	直线方程的四种形式	(194)
【8-5】	直线、平面间的位置关系	(194)
【8-6】	柱面和旋转面的方程特征	(195)
【8-7】	如何求空间点或曲线在其他图形上的投影点或投影线	(195)
8.3	解题指导	(195)
【题型 8-1】	矢量的性质与运算	(195)
【题型 8-2】	矢量方法在初等几何学中的应用	(198)
【题型 8-3】	求平面方程	(199)
【题型 8-4】	求直线方程	(202)
【题型 8-5】	直线、平面间的位置关系	(204)
【题型 8-6】	点到直线与点到平面的距离	(205)
【题型 8-7】	求旋转曲面的方程	(207)
【题型 8-8】	求空间曲线在坐标平面上的投影	(208)
8.4	知识扩展	(209)
习题 8		(210)
	部分答案与提示	(213)
第 9 章	多元函数微分学	(215)
9.1	基本要求	(215)
9.2	知识点解析	(215)
【9-1】	二元函数极限与一元函数极限的对比	(215)
【9-2】	多元函数的连续性与对每个变量连续的关系	(216)

【9-3】 在一点的连续、偏导存在、方向导数存在以及可微等的相互关系	(216)
【9-4】 隐函数存在定理的几点注记	(217)
【9-5】 条件极值与拉格朗日乘法	(217)
【9-6】 梯度概念的理解	(217)
9.3 解题指导	(218)
【题型 9-1】 二重极限的存在性与计算问题	(218)
【题型 9-2】 连续、偏导存在、可微的判定问题	(219)
【题型 9-3】 复合函数求导	(222)
【题型 9-4】 隐函数求导	(226)
【题型 9-5】 空间曲线的切线和空间曲面的切平面	(229)
【题型 9-6】 求方向导数与梯度	(231)
【题型 9-7】 求多元函数的极值	(232)
【题型 9-8】 求有界闭区域上连续函数的最大值与最小值	(234)
【题型 9-9】 最值应用问题	(235)
9.4 知识扩展	(236)
习题 9	(237)
部分答案与提示	(240)
第 10 章 重积分	(243)
10.1 基本要求	(243)
10.2 知识点解析	(243)
【10-1】 如何在直角坐标系下将二重积分化为逐次积分	(243)
【10-2】 在什么情况下采用极坐标代换计算二重积分	(244)
【10-3】 如何利用对称性化简重积分计算	(244)
【10-4】 如何利用几何意义与重心公式计算重积分	(245)
【10-5】 如何在直角坐标系下将三重积分化为二重积分及定积分	(246)
【10-6】 如何在柱面坐标系下计算三重积分	(246)
【10-7】 如何在球面坐标系下计算三重积分	(247)
【10-8】 不绘制空间图形如何确定三重积分的积分限	(247)
10.3 解题指导	(248)
【题型 10-1】 在直角坐标系下计算二重积分	(248)
【题型 10-2】 在极坐标系下计算二重积分	(250)
【题型 10-3】 利用对称性化简二重积分	(252)
【题型 10-4】 交换积分次序或转换两种坐标系中的二次积分	(254)
【题型 10-5】 在直角坐标系下计算三重积分	(257)
【题型 10-6】 在柱面坐标系下计算三重积分	(258)
【题型 10-7】 在球面坐标系下计算三重积分	(259)

【题型 10-8】	利用对称性化简三重积分	(261)
【题型 10-9】	改变积分次序或坐标系计算三重积分	(262)
【题型 10-10】	求分段函数的重积分	(262)
【题型 10-11】	利用重心计算重积分	(265)
【题型 10-12】	利用一般变量代换计算重积分	(266)
【题型 10-13】	重积分的不等式或等式的证明	(268)
【题型 10-14】	变区域重积分问题	(269)
【题型 10-15】	重积分的几何应用	(270)
【题型 10-16】	重积分的物理应用	(270)
10.4	知识扩展	(272)
习题 10		(273)
部分答案与提示		(277)
第 11 章	曲线积分与曲面积分	(279)
11.1	基本要求	(279)
11.2	知识点解析	(279)
【11-1】	第一型曲线积分的计算方法	(279)
【11-2】	第一型曲面积分的计算方法	(280)
【11-3】	关于第一型曲线积分的对称性	(280)
【11-4】	关于第一型曲面积分的对称性	(280)
【11-5】	如何利用几何意义与重心公式计算第一型曲线及曲面积分	(281)
【11-6】	将第二型曲线积分化为定积分的要点	(281)
【11-7】	如何选择第二型平面曲线积分的计算方法	(281)
【11-8】	如何选择第二型空间曲线积分的计算方法	(282)
【11-9】	将第二型曲面积分化为二重积分的要点	(283)
【11-10】	两类曲面积分的关系	(284)
【11-11】	如何将组合式的第二型曲面积分化为单一式的第二型曲面积分	(284)
【11-12】	如何选择第二型曲面积分的计算方法	(284)
【11-13】	场的定义和性质	(285)
11.3	解题指导	(286)
【题型 11-1】	第一型曲线积分的计算	(286)
【题型 11-2】	第一型曲面积分的计算	(288)
【题型 11-3】	第一型曲线积分与曲面积分的物理应用	(289)
【题型 11-4】	第二型平面曲线积分的计算	(290)
【题型 11-5】	利用曲线积分与路径无关的条件求函数	(297)
【题型 11-6】	第二型曲面积分的计算	(299)
【题型 11-7】	第二型空间曲线积分的计算	(303)

【题型 11-8】	第二型线、面积分的物理应用举例	(306)
【题型 11-9】	梯度、散度、旋度的综合计算	(307)
11.4	知识扩展	(308)
	习题 11	(310)
	部分答案与提示	(316)
第 12 章	无穷级数	(318)
12.1	基本要求	(318)
12.2	知识点解析	(318)
【12-1】	添加括号是否改变级数的敛散性	(318)
【12-2】	通项趋于零的级数是否一定收敛	(319)
【12-3】	如何判定正项级数的敛散性	(319)
【12-4】	如何判定变号级数的敛散性	(319)
【12-5】	通项为等价无穷小的两个级数是否有相同的敛散性	(319)
【12-6】	通项趋于零,但不是单调减少的交错级数是否不收敛	(320)
【12-7】	两个收敛的变号级数之和的收敛性判定问题	(320)
【12-8】	如何求幂级数的收敛半径	(320)
【12-9】	如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2 , 它们的和级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径一定为 $R = \min\{R_1, R_2\}$ 吗	(321)
【12-10】	幂级数经逐项求导或逐项积分后收敛半径、收敛区间和 收敛域会变化吗	(321)
【12-11】	$f(x)$ 的泰勒级数在收敛域内一定处处收敛于 $f(x)$ 吗	(321)
【12-12】	如何理解函数的幂级数展开式的唯一性	(321)
【12-13】	傅里叶级数与幂级数的比较	(322)
12.3	解题指导	(322)
【题型 12-1】	计算数项级数的部分和与数项级数的和	(322)
【题型 12-2】	利用数项级数的性质讨论级数的敛散性	(323)
【题型 12-3】	用比值法或根值法判别正项级数的敛散性	(324)
【题型 12-4】	用比较判别法及其极限形式判别正项级数的敛散性	(325)
【题型 12-5】	用积分判别法判别正项级数的敛散性	(327)
【题型 12-6】	判定变号级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (或者称为任意项级数) 的敛散性	(328)
【题型 12-7】	证明包含有抽象的通项的数项级数的敛散性	(329)
【题型 12-8】	求幂级数收敛半径及收敛域	(331)
【题型 12-9】	将函数展开为幂级数	(333)

【题型 12-10】	求幂级数的和函数	(336)
【题型 12-11】	利用幂级数求数项级数的和	(337)
【题型 12-12】	将区间 $[-\pi, \pi]$ 上的函数展开为傅里叶级数	(339)
【题型 12-13】	将区间 $[0, \pi]$ 上的函数展开为正弦(或余弦)级数	(340)
【题型 12-14】	将区间 $[-l, l]$ 上的函数展开为傅里叶级数以及 将区间 $[0, l]$ 上的函数展开为正弦(或余弦)级数	(342)
【题型 12-15】	求 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数	(343)
12.4 知识扩展		(344)
习题 12		(345)
部分答案与提示		(349)

第 1 章 函 数

1.1 基本要求

1. 理解函数的概念.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 了解反函数的概念,理解复合函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 学会建立简单实际问题中的函数关系式.

1.2 知识点解析

【1-1】 函数概念的理解

函数是本课程的研究对象.函数的本质就是变量之间的对应关系,其对应规则 f 有以下常见形式:

(1) **解析式** 用表示运算类型和运算次序的符号将数和字母连结而成的表达式.

在初等数学中,涉及的运算有两类:一类是代数运算,包括加、减、乘、除四则运算,正整数次乘方、开方、有理数次乘方.另一类是超越运算,包括无理数次乘方、指数、对数、三角、反三角运算等.例如,

$$f(x)=3(x+1)^2, \quad f(x)=\frac{\sin x^2}{x}, \quad f(x)=\begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$$

就是函数的解析式.在高等数学中,运算的类型可以扩大到极限、导数、积分、无穷级数等.于是,

$$f(x)=(x+\sin x^2)', \quad f(x)=\int_0^x \frac{t}{1+t} dt,$$

$$f(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^n}, \quad f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$$

也是函数的解析式.解析式便于理论研究和应用,是函数的基本形式.

(2) **几何式** 在平面直角坐标系中,由函数的自变量 x 和对应的函数值 $f(x)$ 构成的点 $(x, f(x))$ 形成的几何图像便是函数的几何形式.它可以直观表达函数 f 的许多重要属性,例如单调性、周期性、奇偶性和有界性,是否有零点,极值点位置等等.

(3) **表格式** 表格法就是通过表格中行或者列来表示函数的自变量与因变量的对应关系.例如在中学用过的平方根表、对数表等.由表格式可以直接查出函数值,方便实用.由于表格的容量有限,仅适合于自变量取值为有限数集的情形.

【1-2】反函数的记号与图像

当 $y=f(x)$ 为可逆函数时,可以构造其反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$. 它满足以下关系

$$f^{-1}(f(x))=x, \quad f(f^{-1}(y))=y.$$

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表现的是同一个对应关系,因此两者的图像是重合的. 如果将函数 $x=f^{-1}(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$, 则由于 x, y 的互换,使得函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像不一定重合,而是关于直线 $y=x$ 对称.

【1-3】如何围绕函数的初等运算探索函数性质

函数的初等运算是指数有限次四则运算、复合和求反函数. 通过对给定的函数作初等运算,能够构建一系列新的函数.

考虑新构建的函数是否继承原有函数的性质是一个基本的思考方式,按照这一方式可以产生许多有意思的研究课题. 如以下例子.

(1) 如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=g(x)$, 那么当 $f(x)$ 是奇函数(或单调增函数)时,反函数 $g(x)$ 是否还是奇函数(或单调增函数)?

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=g(x)$ 均是奇函数(或偶函数,或单调增函数)那么它们的和 $f(x)+g(x)$ 与积 $f(x)g(x)$ 是否也是奇函数(或偶函数,或单调增函数)?

(3) 如果函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=g(x)$ 的导数能够求得,那么如何计算由它们的初等运算构建的函数的导数? 对这一问题的研究便产生了导数计算规则.

(4) 如果函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=g(x)$ 均为连续函数,那么它们的初等运算是否还是连续函数?

在大学阶段的学习中,培养学习的主动性和研究性是比较掌握和理解知识更为重要的任务. 而主动性和研究性的习惯是在一门门课程中,在一个个小问题中逐步养成的. 希望读者在学习过程中积极主动,多探索,常质疑,使自己的提问能力和研究能力得到提升.

1.3 解题指导

【题型 1-1】求解不等式

应对 解不等式是本课程的一个基本要求. 例如,确定函数的定义域,判定函数的单调性、凸凹性等问题中都需要求解不等式,因此必须熟练掌握.

初等数学课程中介绍过解不等式的各种方法. 例如,当分母不取零时,不等式“ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ”等价于不等式“ $f(x)g(x) > 0$ ”的“转换法”;解绝对值不等式的“平方法”和“分段讨论法”;判定一元多项式 $p(x)$ 符号的“求根法”($p(x)$ 在偶次重根两侧同号,奇次重根两侧异号)等等.

例 1-1 求解下列函数不等式:

$$(1) (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \geq 0; (2) \frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0; (3) \log_{1/e} \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 1.$$

解(1) 记 $p(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, 直接看出, 函数 $p(x)$ 在 $x>3$ 时取正, 三个零点分别是 $x=1, 2, 3$. 如图 1-1 所示, 从 $x=3$ 的右边开始向左, 遵循偶次重根两侧同号, 奇次重根两侧异号的符号规则, 可以绘出曲线 $y=p(x)$ 的草图, 从中可得到所求不等式的解:

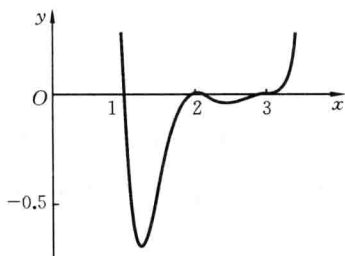


图 1-1

$$x \leq 1 \quad \text{或} \quad x \geq 3 \quad \text{或} \quad x = 2.$$

当然, 也可以在去掉非负因子 $(x-2)^2(x-3)^2$ 后将问题归结到 $(x-1)(x-3)>0$ 求解.

(2) 定义域是 $x \neq 1/3$. 将不等式转换为等价的乘积形式

$$(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)>0,$$

在坐标轴上标出三个实根 $-1, \frac{1}{3}, 2$, 然后绘制曲线 $y=(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)$ 的草图, 便可得到不等式的解:

$$-1 < x < \frac{1}{3} \quad \text{或} \quad x > 2.$$

(3) 考虑函数的定义域, 有不等式 $1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$, 亦即 $x(x-1)>0$, 其解为 $x < 0$ 或 $x > 1$; 其次因 $\frac{1}{e} < 1$, 对数函数 $\log_{1/e} x$ 为单调减, 故有

$$\log_{1/e}\left(1-\frac{1}{x}\right) > 1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x} < \frac{1}{e},$$

求解 $1 - \frac{1}{e} < \frac{1}{x}$ 得 $0 < x < \frac{1}{1-1/e}$. 结合定义域要求, 所求不等式的解为 $1 < x < \frac{e}{e-1}$.

例 1-2 求解下列绝对值不等式:

$$(1) |x-5| < 8. \quad (2) |x-2| \geq 5. \quad (3) \left|\frac{x}{1+x}\right| > 1. \quad (4) |x+1| - |x-1| < 1.$$

解 (1) 由绝对值定义知, 不等式 $|x-5| < 8$ 等价于 $-8 < x-5 < 8$, 移项后即得其解为 $-3 < x < 13$.

(2) 由绝对值定义知, 不等式 $|x-2| \geq 5$ 等价于 $x-2 \leq -5$ 或 $x-2 \geq 5$, 移项后即得其解为 $x \leq -3$ 或 $x \geq 7$.

(3) 注意到 $|u(x)| > c \Leftrightarrow u(x)^2 > c^2 (c > 0)$, 所论不等式等价于 $\frac{x^2}{(1+x)^2} > 1$, 亦即 $0 > 1+2x$. 于是所求不等式的解为 $x < -\frac{1}{2}$ 以及 $x \neq -1$.

(4) 对包含多个绝对值的不等式, 还可以对 x 所处位置分段讨论.

当 $x < -1$ 时, $|x+1| = -x-1, |x-1| = -x+1$, 所论不等式为 $-x-1-1+x = -2 < 1$, 恒成立;

当 $-1 < x < 1$ 时, $|x+1| = x+1, |x-1| = -x+1$, 所论不等式为 $x+1-1+x <$