学科主编
周沛耕

国家奥林匹克集训队教练
北京大学附中数学特级教师

特别收录
最新奥赛真题

金牌奥赛

解题方法与赛前实战

九年级数学

《金牌奥赛》编委会 编

课本内容概述
课外知识拓展
奥赛真题解析
助力初中奥赛

考试让你得高分！

北京出版集团公司
北京教育出版社

金牌奥赛

解题方法与赛前实战

九年级数学

《金牌奥赛》编委会 编

本册主编：毕淑云　俞晓宏　苏正楷

编　　委：于志斌　王红娟　王美玲　尹志梅　兰俊义
孙冬梅　任延明　邵　波　苏正楷　苏孝从
苏岫云　李永哲　李英淑　李海军　陈家锐
陈天辉　辛德辉　林　银　周　萌　金成哲
金英兰　郑培敏　施　恩　胡均宇　郭灵恩
黄凤龙　梁永久　程晓敏　舒　秀

北京出版集团公司
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

解题方法与赛前实战.九年级数学/《金牌奥赛》编委会编.—北京:北京教育出版社,2014.8

(金牌奥赛)

ISBN 978-7-5522-2064-3

Ⅰ.①解… Ⅱ.①金… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第102435号

金牌奥赛·解题方法与赛前实战 九年级数学

《金牌奥赛》编委会 编

*

北京出版集团公司
北京教育出版社 出版
(北京北三环中路6号)

邮政编码:100120

网址:www.bph.com.cn

北京出版集团公司总发行

全国各地书店经销

三河市鼎鑫印务有限公司

*

787×1092 16开本 12.75印张 275000字

2014年8月第1版 2014年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5522-2064-3

定价:23.80元

质量监督电话:(010)62698883 58572750 58572393 购书电话:(010)58572822

前言

知识经济时代的竞争是高素质人才的竞争。高素质人才的培养必须从小抓起，培养他们的思维能力、创新精神和解决实际问题的能力。在数学教育中就要体现现代数学思想，增加富有灵活性和创造性的数学内容,以达到培养学生数学素质的目的。

学生除了在课堂上科学地、规范地不断进行系统的数学基础知识和技能学习外，还要进行课外学习。科学合理地开展数学课外活动，更好地将数学课外活动与课堂教学结合起来，既可以引导学生学好课本内容，又能使学有余力的学生适应更高要求，是提高教学效益和教学质量的基本保证。本书以国内外中小学数学竞赛为背景、以全日制九年义务教育数学课程标准为准绳进行编写。

本书在编写过程中力求遵循两条原则：

1.课内与课外相结合。在内容安排上力争与课堂教学同步，采用从课内到课外逐步引申扩充的方式形成系统的教程，着重于解题思路的分析和方法技巧的总结，引导学生努力学好现行的课本知识，使学生进一步加深对现行课本内容的理解，体现“以课堂教学为主，课外活动为辅”的原则。因此学生只要把课内数学知识学好，并善于思考，就可以顺利地学好本书。

2.普及与提高相结合。随着社会对人才要求的提高，越来越多的学生迫切要求提高自身的数学素质，因此课外活动应面向大多数学生，普遍提高学生的数学素质并促进其全面发展。基于这一想法，本书强调普及，注重基础，是课堂教学内容的加深和拓宽；强调提高，帮助学生拓宽知识视野，介绍课堂教学中没有但竞赛选拔考试要求的内容、方法和技巧。

本书的特点：

一、一题多解：数学的一题多解是最能体现数学解题基本方法的。所谓一题多解，就是用不同的思维分析方法，多角度、多途径地解答问题。因此，本书这一类题的解法极富技巧性、趣味性，对数学感兴趣的学生可以从中提高自己的数学素养，并得到美的享受；对数学不感兴趣的学生可以

从中逐渐培养自己的数学兴趣。老师若认真研读体味本书提供的各种解题技巧和方法，就会对数学课堂教学产生极强的指导作用。

二、习题典型：数学练习题浩如烟海，我们从众多数学试题中精选提炼出具有典型性的试题，按知识点分类，给学生提供极富典型性的练习题，启发引导学生举一反三、触类旁通，帮助学生更好地掌握中小学数学的各项内容，跳出茫茫题海，进而实现从应试教育向素质教育的转变。

本书立足于基础知识，着眼于培养学生灵活运用知识的能力，以思维训练为核心，以内容浅显、形式灵活多样为主旨，覆盖面广，趣味性强。考虑到学生的认知规律，例题力求典型、新颖、独特，解法力求简练、灵活、别致，着眼于提高学生的解题能力和数学思维能力。练习有详细解答，便于学生自学自练，也便于教师及家长辅导学生。为了不加重学生负担，各册书前后虽有一定的连贯性，但每册又自成体系，每章篇幅小、内容精。

本书的作者均为各册教学一线的骨干教师及资深奥赛教练，他们积累了大量的宝贵经验。书中的例题、练习题都是经过精心挑选并经过反复实践的有代表性的名题、好题，有很强的可读性和实用性。建议读者在使用本书的过程中，注意循序渐进，边学边练，以达到巩固提高的目的。

此外，还要指出的是，本书在取材、编写上充分做到了知识性与趣味性、理论性与实践性、全面性与针对性、选拔性与适应性的结合，充分体现了数学课程标准的目标和要求。同时本书侧重于开拓解题思路和解题技巧，使读者通过本书的学习和练习，找到规律性的方法，从而达到举一反三的目的，并进而提高其整体素质。

我们在编写本书时，参阅了国内有关著作，在此对这些著作的作者深表谢意。由于编者水平有限，在编辑成书过程中难免存在一些缺陷和遗漏，恳请广大读者和有关专家学者提出宝贵意见，以便再版时修订。

目 录

第一篇 方程与函数

第二篇 圆及其性质

第三篇 三角形与不定方程

第四篇　思路与技巧

第五篇　竞赛试卷

第一篇 方程与函数

第一章 一元二次方程

内容精要

1. 形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的方程叫做一元二次方程. 满足方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的未知数 x 的值叫做一元二次方程的根.

2. 通过求根公式推导可知，一元二次方程的根都可以通过计算 b^2-4ac 来进行判定. 习惯上，我们将 b^2-4ac 称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根的判别式，并用符号 Δ 来表示.

若 $\Delta>0$，则原方程有两个不等实数根.

若 $\Delta=0$，则原方程有两个相等实数根.

若 $\Delta<0$，则原方程无实数根.

上述结论反过来也成立.

3. 一元二次方程若有实根 x_1,x_2，则

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这是一元二次方程的求根公式.

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的两个根为 x_1,x_2，那么 x_1,x_2 与该一元二次方程的系数 a、b、c 之间的关系为：两根之和 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，两根之积 $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. 数学家韦达最早发现根与系数之间的关系，因此，习惯上也将这一关系称为"韦达定理".

例题精讲

例 1 若 $a\neq0$ 且 $b=a+c$，求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

分析

解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，一般可用求根公式，然后再用条件 $b=a+c$ 使一般解简化，求出解的特殊形式.

技巧点拨

利用公式，将条件 $b=a+c$ 作为化简根式的一个条件可求解. 将条件 $b=a+c$ 变形为 $a(-1)^2+b(-1)+c=0$ 与 $ax^2+bx+c=0$ 相比较，就会发现 -1 是方程的一个根，再利用根与系数的关系可求得另一根. 充分利用题设条件的信息，是寻求巧解的突破口.

解 因为 $b=a+c$，所以 $b^2=(a+c)^2$.

因此 $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(a+c)^2-4ac}=\sqrt{(a-c)^2}=|a-c|$.

①当 $a-c\geqslant0$ 时，$|a-c|=a-c$.

代入求根公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，化简可得

$x_1=-1, x_2=-\dfrac{c}{a}$.

②当 $a-c<0$ 时，$|a-c|=c-a$，代入求根公式化简可得 $x_1=-1, x_2=-\dfrac{c}{a}$.

综合①②知，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 $-1, -\dfrac{c}{a}$.

例 2 利用直接开平方法解关于 x 的方程：

(1) $(x+a)^2-\left(2x+\dfrac{a}{2}\right)^2=0\quad(a>0)$；

(2) $1+2x+x^2=n^2\left(1+\dfrac{2x}{n^2}+\dfrac{x^2}{n^4}\right)$.

分析

方程(1)可变形为 $\left(2x+\dfrac{a}{2}\right)^2=(x+a)^2$ 来解. 方程(2)可变形为 $\left[n\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)\right]^2=(1+x)^2$ 的形式，由于方程中含有字母系数 n，故需对字母 n 进行讨论.

解 (1)由原方程得 $\left(2x+\dfrac{a}{2}\right)^2=(x+a)^2$.

于是有 $2x+\dfrac{a}{2}=x+a$，或 $2x+\dfrac{a}{2}=-(x+a)$，故 $x=\pm\dfrac{a}{2}$.

(2)由原方程得$\left[n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\right]^2=(1+x)^2$.

于是有$n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=1+x$①,或$n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=-(1+x)$②.

由①得$\left(\frac{1}{n}-1\right)x=1-n$,故当$n\neq1$时,$x=n$;当$n=1$时,该方程的根为任意实数.

由②得$\left(\frac{1}{n}+1\right)x=-(n+1)$,

因此,当$n\neq-1$时,$x=-n$,当$n=-1$时,该方程的根为任意实数.

综上所述,当$n\neq1$且$n\neq-1$时,$x=-n$或$x=n$;当$n=1$或$n=-1$时,x为任意实数.

例 3 利用因式分解法解关于x的方程:

(1)$(\sqrt{2}+1)x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$;

(2)$m^2(x^2-x+1)-m(x^2-1)=(m^2-1)x$.

分析

(1)中方程左边的二次项$(\sqrt{2}+1)x^2$的系数$\sqrt{2}+1$可以分解成$(\sqrt{2}+1)\times1$,常数项$\sqrt{2}$可以分解成$(-1)\times(-\sqrt{2})$,借助十字相乘法也可以进行因式分解,从而达到求解目的.

(2)中方程直接进行分解比较困难,但是将其整理后,可得到关于x的方程$m(m-1)x^2-(2m^2-1)x+m(m+1)=0$,可以将$x^2$的系数分解成$m$与$m-1$的乘积,将$m(m+1)$分解成$-(m+1)$与$-m$的乘积,再借助十字相乘法进行因式分解,并可以在此基础上求解.

解 (1)原方程可变形成$[(\sqrt{2}+1)x-1](x-\sqrt{2})=0$,

从而可得$x_1=\sqrt{2}-1$,$x_2=\sqrt{2}$.

(2)原方程经整理可以变形为

$m(m-1)x^2-(2m^2-1)x+m(m+1)=0$,进而可以分解成$[mx-(m+1)]\cdot[(m-1)x-m]=0$,因此有$mx=m+1$或$(m-1)x=m$.

故当$m\neq0$且$m\neq1$时,$x_1=\frac{m+1}{m}$,$x_2=\frac{m}{m-1}$. 当$m=0$时,$x=0$;当$m=1$时,$x=2$.

例 4 解方程$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$.

解法一 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$.

$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{13}{6}$.

令$y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$,则$y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6}$,

即 $6y^2-13y+6=0$.

解得 $y_1=\frac{3}{2}, y_2=\frac{2}{3}$.

①$y=\frac{3}{2}$时,$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{3}{2}$,$x^2-2x+1=0$,$x_1=x_2=1$.

②$y=\frac{2}{3}$时,$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{2}{3}$,$x^2+3x+1=0$,$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

经检验,$x=1$,$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$都是原方程的解.

解法二 原方程化为

$$\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{6}.$$

$\because x\neq 0$,$\therefore \frac{1}{x+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x+1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{6}$.

令 $y=x+\frac{1}{x}$,则$\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{6}$.

解得 $y_1=2$,$y_2=-3$,将它们分别代入 $y=x+\frac{1}{x}$中得$x_1=1$,$x_2=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

经检验,$x_1=1$,$x_2=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$都是原方程的解.

例 5 解方程$\frac{x-7}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1}=\sqrt{10}$.

分析

认真观察方程左边的特点会发现

$(\sqrt{x-3}+2)(\sqrt{x-3}-2)=x-7$,

$(\sqrt{x-4}+1)(\sqrt{x-4}-1)=x-5$.

因此,可把方程左边的两个分子分别分解因式,通过约分化简,再解方程.

解 原方程可变形为

$$\frac{(\sqrt{x-3}+2)(\sqrt{x-3}-2)}{(\sqrt{x-3}+2)}+\frac{(\sqrt{x-4}+1)(\sqrt{x-4}-1)}{(\sqrt{x-4}+1)}=\sqrt{10}.$$

化简,得$\sqrt{x-3}-2+\sqrt{x-4}-1=\sqrt{10}$.

即$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=\sqrt{10}+3$.　①

$\because(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4})(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4})=1$,

技巧点拨

在将原方程变形、化简后得到方程①时,并未采用两边平方的方法将它转化为有理方程(需两次平方),而是利用有理

$\therefore \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}}{(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4})(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4})}=\sqrt{10}+3.$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}=\sqrt{10}+3,$

即 $\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}=\frac{1}{\sqrt{10}+3}.$　　②

①－②，得 $2\sqrt{x-4}=\sqrt{10}+3-\frac{1}{\sqrt{10}+3}.$

即 $2\sqrt{x-4}=6.$

解得 $x=13$. 经检验，$x=13$ 是原方程的根.

∴原方程的根是 $x=13$.

化因式又得到一个方程②，再通过加减法，便求得了只有一个无理式的无理方程. 这种方法是巧解无理方程的重要方法之一.

例 6 解方程 $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$.

分析

本题有三个根号，一般情况下，去掉三个根号要进行三次平方，此方程若经过三次平方将很复杂，所以必须用特殊解法. 观察根号内的式子，x、$x+7$、$x(x+7)$，可用辅助元的办法来解.

解 设 $u=\sqrt{x}$，$v=\sqrt{x+7}$，则原方程变为

$u+v+2uv=35-2u^2$，　　①

且 $u^2-v^2=x-(x+7)=-7$.　　②

①－②得 $(u+v)^2+(u+v)-42=0$.

令 $u+v=y(y\geqslant 0)$，则 $y^2+y-42=0$.

解得 $y_1=6$，$y_2=-7$（舍去）.

则 $u+v=6$.　　③

由（②÷③＋③）$\times\frac{1}{2}$ 得 $u=\frac{29}{12}$，$x=u^2=\frac{841}{144}$.

经检验，$x=\frac{841}{144}$ 是原方程的解.

例 7 已知三个二次方程 $ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0$，$cx^2+ax+b=0$ 有公共根，求证：$a+b+c=0$.

分析

由于 a、b、c 恰是三个方程的二次项系数，故可设公共根为 x_0.

证明 设 x_0 为其公共根，将 x_0 代入后相加，整理，得

$(a+b+c)(x_0^2+x_0+1)=0$.

技巧点拨

通过寻找系数间的关系，由 a、b、c 在三个方程中具有的位置特点，利用其转换形式，相加得出结论. 这也是解决很多对等

$\because x_0^2+x_0+1=\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0$,

$\therefore a+b+c=0$.

式或对称问题的常用方法.

例 8 解方程 $x^2-|2x-1|-4=0$.

分析

这是含绝对值的方程,找 $2x-1$ 的零点,加以讨论.

解 由 $2x-1=0$,得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时,原方程化为 $x^2-(2x-1)-4=0$,

即 $x^2-2x-3=0$.

$(x-3)(x+1)=0$.

$\therefore x_1=3, x_2=-1$(舍).

当 $x<\frac{1}{2}$ 时,原方程化为 $x^2+(2x-1)-4=0$,

即 $x^2+2x-5=0$.

$\therefore x_3=-1-\sqrt{6}, x_4=-1+\sqrt{6}$(舍).

$\therefore$ 原方程的解为 $x=3$ 或 $x=-1-\sqrt{6}$.

技巧点拨

方程中含有绝对值时,往往要去掉绝对值符号,而去绝对值符号的方法一般有两种:一是平方法;二是根据零点分类讨论.

例 9 解关于 x 的方程 $(m-1)x^2+(2m-1)x+m-3=0$.

分析

对于 m 的讨论,要分 $m-1=0$ 与 $m-1\neq 0$ 两种情况(不能认为方程一定是二次方程). 当 $m-1\neq 0$ 时,是二次方程的情况下,因为 $\Delta=12m-11$,故要分成 $m>\frac{11}{12}, m=\frac{11}{12}, m<\frac{11}{12}$ 三种情况讨论其根的情况.

解 ①当 $m=1$ 时,方程为 $x-2=0$,

$\therefore x=2$.

②当 $m\neq 1$ 时,方程是二次方程,

$\Delta=(2m-1)^2-4(m-1)(m-3)=12m-11$.

当 $m>\frac{11}{12}(m\neq 1)$ 时,$\Delta>0$,方程有两个不等实根

$x_{1,2}=\frac{1-2m\pm\sqrt{12m-11}}{2(m-1)}$.

技巧点拨

1. 对含字母系数的方程要进行讨论,讨论时要注意两个方面:第一,二次项系数能否为零;第二,判别式 Δ 的取值是判断方程有无实根的依据.

2. 对一元二次方程中有关讨论的问题无外乎三类:绝对值、字母

当 $m=\frac{11}{12}$时，$\Delta=0$，方程有两个相等实根 $x_1=x_2=5$.

当 $m<\frac{11}{12}$时，$\Delta<0$，故方程无实根.

系数、含有根式的情况. 每类情况各有其讨论的特点.

练习题

1 解下列关于 x 的整式方程：

(1) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

(2) $x^2+2a|-x|-3a^2=0$.

(3) $4(2x^2-3x-1)(x^2-x+2)-(3x^2-4x+1)^2=0$.

(4) $x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$.

(5) $x^2+|x+3|+|3-x|=\frac{9}{2}x+6$.

2 解下列分式方程：

(1) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$.

(2) $\frac{(x^2+x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{49}{45}$.

(3) $\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}=\frac{2x^2+1}{2x^2-1}$.

3 解下列无理方程：

(1) $\sqrt{x+5}+\frac{3}{\sqrt{x+5}}=2\sqrt{3}$.

(2) $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[5]{(x-1)(x-33)}=1$.

(3) $\sqrt{2x+\frac{9}{x}}-\sqrt{\frac{x}{2x^2+9}}=\frac{8}{3}$.

(4) $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$.

(5) $5\sqrt{x}+5\sqrt{2x+3}+2\sqrt{2x^2+3x}=11-3x$.

4 解关于 x 的方程：

(1) $(2x^2-3x-2)n^2+(1-x^2)m^2=mn(1+x^2)$.

(2) $a^4\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^4\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^4\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^4$.

(3) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

(4) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{4x-1}{2}$.

(5) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{3x}{x^2-8x+15}$.

5 试求满足方程 $x^2-kx-7=0$ 与 $x^2-6x-(k+1)=0$ 有公共根的所有 k 值和其所有公共根、所有相异根.

6 求所有正实数 a,使得方程 $x^2-ax+4a=0$ 仅有正整数根.

7 方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根都是正整数,并且 $p+q=1\,996$,试问方程较大根与较小根的比等于多少?

8 已知方程$(x-19)(x-83)=p$ 有实数根 r_1 和 r_2(其中 p 为实数),求方程$(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 的实数根.

9 已知两个二次方程 $x^2+ax+b=0$,$x^2+cx+d=0$ 有一个公共根是 1,求证:二次方程 $x^2+\dfrac{a+c}{2}x+\dfrac{b+d}{2}=0$ 也有一个根为 1.

10 若关于 x 的方程 $x^2-ax+4=0$ $(a<0)$的实根是 x_1,x_2,求$\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}$.

第二章

方程组的整数解

内容精要

1. 解联立方程组的基本思想是消元与降次，最后转化为一元一次方程或一元二次方程来求解.

2. 解方程和方程组的理论依据是同解变形理论，主要有：

(1)若 $h(x)$ 为整式，则 $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$.

(2)若 c 为不等于 0 的常数，则 $f(x)=g(x)\Leftrightarrow cf(x)=cg(x)$.

(3) $f(x)g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$ 或 $g(x)=0$.

(4) $\begin{cases}f(x,y)=0,\\ y=g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f[x,g(x)]=0,\\ y=g(x).\end{cases}$

这是代入消元法的依据.

(5)若 k、l 为常数，$l\neq0$，

则 $\begin{cases}f(x,y)=0,\\ g(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x,y)=0,\\ kf(x,y)+lg(x,y)=0.\end{cases}$

这是加减消元法的依据.

3. 整系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有整数解的前提条件是 $\Delta=b^2-4ac$ 是一个完全平方数，①可根据判别式 $\Delta=b^2-4ac$，令 $b^2-4ac=m^2$（m 为整数），结合整数性质，分析讨论求解；②根据根与系数的关系 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$ 消去字母系数，由 x_1+x_2，x_1x_2 的关系式讨论求解.

例题精讲

例 1 解方程 $(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$.

解 设 $x^2-x=y$，那么原方程就变为 $y^2-4y-12=0$.

解这个关于 y 的方程，得

$y_1=6, y_2=-2$.

也就是 $x^2-x=6, x^2-x=-2$.

$x^2-x=6$ 就是 $x^2-x-6=0$，解这个方程，可以得出

$x_1=3, x_2=-2$；

$x^2-x=-2$ 就是 $x^2-x+2=0$，

因为 $(-1)^2-4\times1\times2=1-8<0$，

所以这个方程没有实数根．

所以原方程的解为 $x_1=3, x_2=-2$.

技巧点拨　利用换元法解方程.

例 2 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+2y-3}+\sqrt{x^2+x+y+2}=\sqrt{x^2+4x+3y-2}+\sqrt{x^2+2y+3}, & ①\\ x^{x-y}=2y-1. & ②\end{cases}$$

解 因为 $x^2+5x+2y-3=(x^2+4x+3y-2)+(x-y-1)$，$x^2+x+y+2=(x^2+2y+3)+(x-y-1)$，

故设 $A=x^2+4x+3y-2$，$B=x^2+2y+3$.

原方程①变为

$\sqrt{A+(x-y-1)}+\sqrt{B+(x-y-1)}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$.　③

若 $x-y-1>0$，

则 $\sqrt{A+(x-y-1)}>\sqrt{A}$，$\sqrt{B+(x-y-1)}>\sqrt{B}$.

∴相加可知 $\sqrt{A+(x-y-1)}+\sqrt{B+(x-y-1)}>\sqrt{A}+\sqrt{B}$，与③式不符．同理，若 $x-y-1<0$，有 $\sqrt{A+(x-y-1)}+\sqrt{B+(x-y-1)}<\sqrt{A}+\sqrt{B}$，也与③式不符. 因此，只能 $x-y-1=0$，即 $x-y=1$.

此时②变为 $x=2y-1$.

所以原方程组等价于 $\begin{cases}x-y=1,\\ x-2y=-1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$

经检验知 $\begin{cases}x=3,\\ y=2\end{cases}$ 为原方程组的解.

技巧点拨　解高次联立方程组或高次方程时，观察方程的特点，选取特殊方法是非常重要的.

例 3 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中，系数 a,b,c 均为奇数，求证：这个方程没有整数根.

证明 因为 a,b,c 为奇数，所以判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 也是奇数，以下证明它不可能是某一奇数的完全平方数，即不能写成 $8k+1$ 的形式.