高等数学

下 册

长沙铁道学院

一九七三年四月

目 录

第七章 不定积分

第八章 定积分

第九章 定积分的应用

第十章　級数

第十一章　微分方程

第七章　不定积分

从这章起到第九章止，我們将要讲积分学。在微分学中有导数与微分两个基本概念，相应地在积分学中也有两个基本概念，它們分别是原函数(或不定积分)和定积分。

我們知道，微分学着眼于事物发展过程的局部(或說瞬时)性态。而局部性质的研究往往不是认識事物的最終目标，而只是开始。进一步是要根据得来的局部性质去推断事物发展过程在大范围內所表现出的性质，即所謂整体性质，这就是积分学的任务。因此，微分与积分这对微积分学中的主要矛盾就是事物的局部与整体的矛盾，微积分学就是揭露这对矛盾的两个矛盾着的方面的內在規律和联系以促使各向其对立面轉化的一門学科。

积分学分不定积分、定积分和定积分的应用三章讲授。本章讲不定积分，这里包括它的概念、性质和計算方法。重点在計算方法——积分法。

第一节　原函数和不定积分的概念

1.1　原函数和不定积分的概念

如果作直綫运动的点M的运动規律由函数

$$s=f(t)$$

給出，其中t是时間，s是点M經过的路程，则函数$f(t)$的导数就表示点M在时刻t的速度

$$v=f'(t)\text{ 。}$$

这是我們在第五章讲导数时所熟悉的問題。但是，在力学里也常遇到相反的問題：即作直綫运动的点M在任一时刻的速度$v=v(t)$为已知，而要找出点M所經过的路程与时間的依賴关系$s=f(t)$。从数学上来說，这个相反的問題的实质是：要找一个函数$s=f(t)$，使这个函数$f(t)$的导数$f'(t)$正好等于已給的函数$v(t)$，即$f'(t)=v(t)$。这种問題在力学、物理学以及各种技术領域中常常遇到，因此，它具有普遍的意义，值得我們把它的一般形式提出来加以研究。下面我們就来进行这一工作。

定义1　已知定义在某一区間上的一个函数$f(x)$，如果有这样的函数$F(x)$存在，使得在該已知区間上的任何一点都有

$$F'(x)=f(x)\text{ 或 }dF(x)=f(x)dx\text{ ，}$$

則称$F(x)$为$f(x)$的原函数。

例如，$F(x)=\dfrac{x^2}{2}$是$f(x)=x$的原函数，因为$F'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2}x=x=f(x)$；又如，$F(x)=\sin x$是$f(x)=\cos x$的原函数，因为$F'(x)=\cos x=f(x)$。

知道了原函数的定义后，自然会提出下列問題：

1）　什么样的函数一定有原函数？(存在問題)

2）　若一个函数有原函数，那么共有多少个？

3）　若一个函数有原函数，怎样把原函数求出来？

解答这三个問題，就是本章的全部任务。第三个問題比較复杂，留待下面几节解决。本节先回答第一、二两个問題。

关于原函数的存在問題，我們有

定理1 如果 $f(x)$ 在某区間上連續，則在这个区間上 $f(x)$ 的原函数一定存在。

这个定理的证明越出了本課程的范围，故从略。

在第四章中，我們曾指出，一切初等函数在它有定义的区間上都是連續的。因此，我們有

推論1 如果給定的函数 $f(x)$ 是初等函数，則在它有定义的区間上，它的原函数存在。

原函数的存在問題已經解决。接着的問題是：如果 $f(x)$ 有原函数，那么共有多少个？很显然，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$，則函数族 $F(x)+C$（C 为任意常数）中任何一个函数也一定是 $f(x)$ 的一个原函数，这是因为常数 C 的导数为零及"和的导数等于导数的和"。进一步，自然会問：函数族 $F(x)+C$ 是否已包含了 $f(x)$ 的所有原函数？回答是肯定的：已包含了 $f(x)$ 的所有原函数。事实上，若 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的另一原函数，則

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0\ 。$$

在第六章第一节曾指出，在一区間上导数恆为零的函数必定是个常数。故有

$$\Phi(x)-F(x)=C\ ,$$

即

$$\Phi(x)=F(x)+C\ 。$$

綜合上述，得

定理2 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，則 $F(x)+C$ 便是 $f(x)$ 的一切原函数，其中 C 是任意常数。

定义2 函数 $f(x)$ 的原函数的全体叫做 $f(x)$ 的不定积分，記作 $\int f(x)dx$。对于不定积分 $\int f(x)dx$，函数 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量。

推論2 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，則

$$\int f(x)dx=F(x)+C\ ,$$

其中 C 是任意常数，叫做积分常数。 例如，$\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$，$\int\cos x\,dx=\sin x+C$ 等等。

求已知函数的不定积分的方法称为不定积分法或簡称积分法。在下面几节，常把不定积分簡称为积分。

由不定积分的定义，可知

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)\ \text{或}\ d\int f(x)dx=f(x)dx\ ;$$

$$\int f'(x)dx=f(x)+C\ \text{或}\int df(x)=f(x)+C\ 。$$

这就是說，如果不計上面最后一个式子中的常数 C，微分号和积分号迭施，恰好相互抵消。因此，微分与积分这两种运算互为逆运算，即两者构成一对矛盾。

复习思考題

1. 就下列各点，类比积分运算与开（平）方运算：

   (1) 这种运算是怎样发生的？它是什么运算的反运算？

（2）这种运算的結果叫什么？怎样的函数（数）能施行这种运算？結果有多少个？

（3）用式子表达这种运算与其逆运算的关系。

2．下列各題中，$F(x)$是$f(x)$的原函数嗎？

（1）$F(x)=2\sqrt{x}$，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；

（2）$F(x)=\sin\omega x$，$f(x)=\omega\cos\omega x$；

（3）$F(x)=\dfrac{1}{x}$，$f(x)=\ln x$。

3．下列函数$F(x)$是哪个函数的原函数？

（1）$F(x)=\cos x$；

（2）$F(x)=e^{2x}$；

（3）$F(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$。

1.2 不定积分的几何意义

若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则把$y=F(x)$的图象叫做$f(x)$的积分曲綫。如果把这条积分曲綫沿y軸的方向平行移动一段长度C时，我們就得到$y=F(x)+C$的图象——另一积分曲綫。由定理2知，函数$f(x)$的每一条积分曲綫都可由此法获得。所以，不定积分$\int f(x)dx$的几何意义，是函数$f(x)$的某一条积分曲綫沿着纵軸从$-\infty$到$+\infty$連續平行地移动所产生的一族积分曲綫。因$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$，故每一条积分曲綫上横坐标相同（如，同为x）的点处的切綫彼此平行，且其斜率等于$f(x)$（图7—1）。

在牽連到求原函数的实际問題中，往往不是要求求出一切原函数，而是要求从全部原函数（即不定积分）中确定具有已知性质的一个原函数。这时应該利用这个原函数所特有的性质来确定积分常数C，从而把这个原函数求出来。

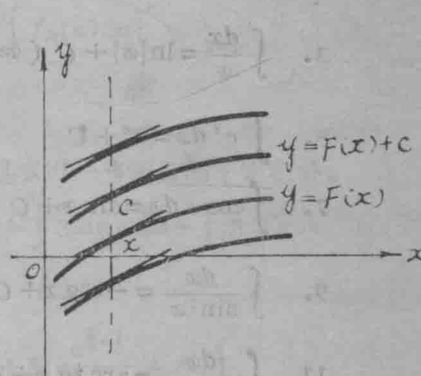

图7—1

例1 求通过点（2，5），而它的切綫斜率为$2x$的曲綫。

解 因为$y'=2x$，所以x^2是$2x$的一个原函数。于是

$$y=x^2+C。$$

由所求的曲綫通过点（2，5），得

$$5=2^2+C，$$

所以

$$C=1。$$

故所求的曲綫为

$$y=x^2+1。$$

例2 已知点M作直綫运动，其速度变化规律为$v=v_0+at$（v_0、a是常量），以及当$t=0$时$s=0$。求距离s和时間t的关系。

解 因为

$$v=\frac{ds}{dt}=v_0+at，$$

所以
$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2+C\ 。$$

由 $t=0$ 时 $s=0$，得

$$0=C\ 。$$

所以
$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2\ 。$$

第二节　基本积分表和积分的基本性質

若 $F'(x)=f(x)$，則 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，从而
$$\int f(x)dx=F(x)+C\ 。$$

例如，$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$，故有
$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C；$$

又如，$(\sin x)'=\cos x$，故有
$$\int\cos x\,dx=\sin x+C\ 。$$

上述运算使我們清楚地看出，有一个求导(或說微分)公式，就有一个积分公式与之对应。因此，由第五章的导数基本公式就可得到下面的基本积分表：

1. $\int 0\,dx=C$
2. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq-1)$
3. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C\ (x\neq0)$
4. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
5. $\int e^x dx=e^x+C$
6. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
7. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$
8. $\int\frac{dx}{\cos^2x}=\operatorname{tg}x+C$
9. $\int\frac{dx}{\sin^2x}=-\operatorname{ctg}x+C$
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
11. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C$
12. $\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C$
13. $\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C$

关于表中第三个公式 $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$，还必須作如下的补充：当 $x>0$ 时，等式显然成立。当 $x<0$ 时，因为函数 $\ln(-x)$ 的导数为 $\frac{(-x)'}{-x}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$，所以当 $x<0$ 时，有 $\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C=\ln|x|+C$，即此时第三个公式也成立。

这个表，跟导数基本公式表一样，必須牢記，今后常常用到。

其次，与两个求导法則：

$$[Cu(x)]' = Cu'(x), \tag{1}$$

$$[u_1(x) \pm u_2(x) \pm \cdots \pm u_n(x)]' = u_1'(x) \pm u_2'(x) \pm \cdots \pm u_n'(x) \tag{2}$$

相对应，我們也有两个簡单有用的积分法則（称为不定积分的性质）：

1° 不等于零的常数因子可以提到积分号外：

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx, \tag{3}$$

其中 C 是不等于零的常数因子。

证明 根据不定积分和原函数的定义，只要证明(3)式右端的导数等于左端的被积函数即可。

由于（1），对（3）的右端求导，得

$$\left(C\int f(x)dx\right)' = C\left(\int f(x)dx\right)' = Cf(x),$$

于是（3）成立。

2° 有限个函数的代数和的积分等于各个函数的积分的代数和：

$$\int\left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\right)dx$$

$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx. \tag{4}$$

证明 由于（2），对上式右端求导，得

$$\left(\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx\right)'$$

$$= \left(\int f_1(x)dx\right)' \pm \left(\int f_2(x)dx\right)' \pm \cdots \pm \left(\int f_n(x)dx\right)'$$

$$= f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x),$$

从而（4）成立。

利用基本积分表和关于积分的上面两个性质，可以求出一些函数的不定积分。

例 1 $\int(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})dx = \int 2x^3dx - \int 3\sin x\,dx + \int 5\sqrt{x}dx$

$$= 2\int x^3dx - 3\int \sin x\,dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2\left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1\right) - 3\,(-\cos x + C_2) + 5\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_3\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

注意，这里 $C = 2C_1 - 3C_2 + 5C_3$，三个任意常数已經合写成一个任意常数了。以后遇到这种情况就不再說明。

例 2 $\int(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3dx = \int(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2)dx$

$$= a^2\int dx - 3a^{\frac{4}{3}}\int x^{\frac{2}{3}}dx + 3a^{\frac{2}{3}}\int x^{\frac{4}{3}}dx - \int x^2dx$$

$$=a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3+C\ 。$$

复 习 思 考 题

1. 把下列微分式改写成积分式：

(1) $(\sec x)'=\sec x\operatorname{tg} x$；　　(2) $(-\ln\cos x)'=\operatorname{tg} x$；

(3) $(x\ln x-x)'=\ln x$；　　(4) $[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 。

2. 如何判断不定积分的結果是否正确？下列积分的結果是否正确？

(1) $\int(2x+1)^2dx=\frac{(2x+1)^3}{3}+C$；　　(2) $\int\sin 2x\,dx=-\cos 2x+C$；

(3) $\int\cos\frac{x}{2}dx=2\sin\frac{x}{2}+C$；　　(4) $\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C$ 。

第三节 换元积分法

利用基本积分表和积分的基本性质，我們所能解决的不定积分問題是十分有限的。因此，有必要进一步来研究求不定积分的方法。这一节先来讲一种基本的积分法，即所謂换元积分法，簡称为换元法。

根据毛主席关于“**通过实践而发現眞理，又通过实践而証实眞理和发展眞理**”的伟大教导，我們从具体的实例計算着手，去发現积分运算的一些規律。

例 1 求 $\int(2x+1)^2dx$ 。

由于 $(2x+1)^2=4x^2+4x+1$，

故 $$\int(2x+1)^2dx=\int(4x^2+4x+1)dx=\int 4x^2dx+\int 4x\,dx+\int 1dx$$
$$=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C\ 。$$

但是，对于积分 $\int(2x+1)^{1000}dx$，若采用上述展开被积函数的方法来求，就不是一件手續簡便的事了。怎么办？回忆在复合函数求导法中，我們是引入中間变量 u 而将复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 分解成簡单函数 $y=f(u)$、$u=\varphi(x)$ 来求导的。現在，我們按照这一想法来簡化被积表达式的形式。

令 $u=2x+1$，则 $du=2dx$，$dx=\frac{du}{2}$ 。

于是

$$\int(2x+1)^{1000}dx=\int u^{1000}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{1000}du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1001}u^{1001}+C=\frac{1}{2002}(2x+1)^{1001}+C\ 。$$

这一結果是否正确呢？即$\frac{1}{2002}(2x+1)^{1001}$是否是$(2x+1)^{1000}$的原函数呢？回答是肯定的，事实上

$$\left(\frac{1}{2002}(2x+1)^{1001}\right)'=\frac{1}{2002}\cdot 1001(2x+1)^{1001-1}\cdot(2x+1)'$$

$$=\frac{1}{2}(2x+1)^{1000}\cdot 2=(2x+1)^{1000}\text{。}$$

例2 求 $\int \sin 2x\,dx$。

令 $u=2x$，則 $du=2dx$。

于是

$$\int \sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int \sin u\,du=-\frac{1}{2}\cos u+C=-\frac{1}{2}\cos 2x+C\text{。}$$

象这样一些通过改变积分变量而使积分簡化的方法叫做换元法。但是，不是每个积分都可用换元法来解决的。那么，什么样的积分才可采用上面所述的换元积分法呢？这个問題不难用反推的办法来回答：設原来的积分通过改变积分变量后，已簡化成积分$\int f(u)du$，而$u=\varphi(x)$。我們把$u=\varphi(x)$又重新代入积分$\int f(u)du$中，得

$$\int f(u)du=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx,$$

可見$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$就是原来的积分。

于是，我們可总結出

第一换元法　若$f(u)$可积出，則$f[\varphi(x)]\varphi'(x)$也可积出，且

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)},\tag{1}$$

其中$u=\varphi(x)$是把左端的被积表达式化为右端的被积表达式所用的置换。

为了与下面讲的另一换元法区别开来，我們把这里讲的换元法叫做第一换元法。

例3 求 $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$。

解 积分可改写成

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\text{。}$$

令 $u=\frac{x}{a}$，則 $du=\frac{1}{a}dx$，$dx=a\,du$。

于是

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a\,du}{1+u^2}=\frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} u+C=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C\text{。}$$

例 4 求 $\int \mathrm{tg}\, x\, dx$。

解 积分可改写成

$$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx\text{。}$$

令 $u = \cos x$，则 $du = -\sin x\, dx$，$\sin x\, dx = -du$。

于是

$$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C\text{。}$$

例 5 求 $\int x e^{-x^2} dx$。

解 令 $u = -x^2$，则 $du = -2x\, dx$，$x\, dx = -\frac{du}{2}$。

于是

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int e^u\, du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\text{。}$$

例 6 求 $\int x^2\sqrt{4-3x^3}\, dx$。

解 令 $u = 4-3x^3$，则 $du = -9x^2 dx$，$x^2 dx = -\frac{du}{9}$。

于是

$$\int x^2\sqrt{4-3x^3}\, dx = -\frac{1}{9}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{27}(4-3x^3)\sqrt{4-3x^3} + C\text{。}$$

在使用此法相当熟練后，碰到比較簡單的置換 $u = \varphi(x)$，就不必把它明白的写出。

例 7 $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C\text{。}$$

例 8 $$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x\, d\,2x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C\text{。}$$

例 9 $$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int \ln^3 x\cdot\frac{dx}{x} = \int \ln^3 x\, d\ln x$$

$$= \frac{1}{4}\ln^4 x + C\text{。}$$

例10 $$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\frac{x}{2}\Big/\cos^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C\ 。$$

又因 $$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\operatorname{ctg} x\,,$$

所以 $$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln|\csc x-\operatorname{ctg} x|+C\ 。$$

例11 $$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C$$

$$=\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C\ 。$$

例12 $$\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot\sin x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)\,d\cos x$$

$$=-\int d\cos x+\int\cos^2 x\,d\cos x=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C\ 。$$

例13 $$\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^4 x\cos^2 x\cdot\cos x\,dx=\int\sin^4 x\,(1-\sin^2 x)\,d\sin x$$

$$=\int\sin^4 x\,d\sin x-\int\sin^6 x\,d\sin x$$

$$=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C\ 。$$

例14 $$\int\operatorname{tg}^4 x\,dx=\int\operatorname{tg}^2 x(\sec^2 x-1)\,dx=\int\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\,dx-\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$$

$$=\int\operatorname{tg}^2 x\,d\operatorname{tg} x-\int(\sec^2 x-1)\,dx$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\int\sec^2 x\,dx+\int dx=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C\ 。$$

例15 $$\int\cos 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int[\cos(3-2)x+\cos(3+2)x]\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 5x)\,dx=\frac{1}{2}\int\cos x\,dx+\frac{1}{10}\int\cos 5x\,d5x$$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C\ 。$$

例16 $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$。

解 因 $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$，

故
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}$$
$$=\frac{1}{2a}\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{d(x+a)}{x+a}$$
$$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\text{。}$$

例17 $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-7}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(x-3)^2}}$
$$=\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{2}}+C\text{（根据例7）。}$$

复 习 思 考 题

1. 已知 $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$，問：

（1）$\int\frac{d\sin x}{\sin x}=?$　　（2）$\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=?$

（3）$\int\frac{d(x^2+a^2)}{x^2+a^2}=?$　　（4）$\int\frac{d\sqrt{1+e^x}}{\sqrt{1+e^x}}=?$

由此可得出什么规律？

2. 已知 $\int f(x)dx=F(x)+C$，如何求 $\int f(u)\,du$（其中 $u=\varphi(x)$ 是 x 的任一可微的函数）？未作置换 $u=\varphi(x)$ 之前，所求积分的形式是怎样的？

由第一换元法，我們自然还会想到，公式（1）也应当可以倒过来使用，如果左端的积分却比右端的积分易求的話。这就是下面我們要讲的

第二换元法 **若 $f[\varphi(u)]\varphi'(u)$ 可积出，则 $f(x)$ 也可积出，且**
$$\int f(x)dx=\left\{\int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)du\right\}_{u=\psi(x)},$$
其中 $u=\psi(x)$ 是置换 $x=\varphi(u)$ 的反函数。

例18 求 $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$。

解 令 $x=u^2\ (u>0)$，　则 $dx=2u\,du$，$u=\sqrt{x}$。

于是
$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{u}{1+u}2u\,du=2\int\frac{u^2}{1+u}du=2\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=2\int u\,du-2\int du+2\int\frac{d(u+1)}{u+1}=u^2-2u+2\ln|u+1|+C$$

$$=u^2-2u+\ln(u+1)^2+C=x-2\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C\ 。$$

例19 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$。

解 設 $x=a\sec u$, 则 $dx=a\sec u\,\mathrm{tg}\,u\,du$ 。

于是 $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec u\,\mathrm{tg}\,u\,du}{a\,\mathrm{tg}\,u}=\int\sec u\,du$$

$$=\ln|\sec u+\mathrm{tg}\,u|+C_1\ 。$$

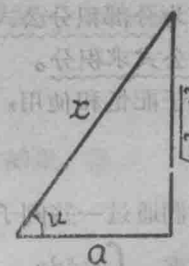

图 7—2

这里，我們不去求置换 $x=a\sec u$ 的反函数，而由关系式 $\sec u=\frac{x}{a}$ 算出 $\mathrm{tg}\,u=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$（見图7—2）。然后，把它們代入上式結果中，最后得到

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1=\ln\left|\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\ 。$$

例19所用的方法，叫做三角函数代换法。一般地說，当被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$、$\sqrt{x^2+a^2}$或$\sqrt{x^2-a^2}$时，利用三角函数代换法往往有效。方法如下：

（A） 对$\sqrt{a^2-x^2}$，可設 $x=a\sin u$ 或 $x=a\cos u$；

（B） 对$\sqrt{x^2+a^2}$，可設 $x=a\,\mathrm{tg}\,u$ 或 $x=a\,\mathrm{ctg}\,u$；

（C） 对$\sqrt{x^2-a^2}$，可設 $x=a\sec u$ 或 $x=a\csc u$ 。

复 习 思 考 題

1． 当被积函数含有一次根式 $\sqrt{ax+d}$ 时，若用第二換元法求积分，应如何消去此根式？并求积分

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx\ 。$$

2． 当被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$、$\sqrt{x^2+a^2}$或$\sqrt{x^2-a^2}$等二次根式时，若用第二換元法求积分，应如何消去此根式？并求积分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}\ (a>0)\ 。$$

第四节 分部积分法

这一节我們来讲另一种基本积分法，即所謂分部积分法。它与微分法中乘积的求导法則相对应。

在微分学中，关于两函数的乘积的导数公式是

$$(uv)'=uv'+vu'\ 。\qquad (1)$$

把公式（1）改写成

$$uv'=(uv)'-vu' \qquad (2)$$

对等式（2）的两边取积分，得

$$\int uv'\,dx=uv-\int vu'\,dx \qquad (3)$$

公式（3）称为分部积分公式，如果求$\int uv'\,dx$有困难而求$\int vu'\,dx$比較容易时，就可以利用分部积分公式求积分。

为了便于記忆和使用，我們把公式（3）写成下面的形式：

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\ 。\qquad (4)$$

下面我們通过一些例子来說明如何具体地运用这个重要公式。

例1 求 $\int xe^x dx$ 。

解 令 $u=x$， $dv=e^x dx=de^x$，应用公式（4）得

$$\int xe^x dx=\int x\,de^x=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C\ 。$$

例2 求 $\int x\cos x\,dx$ 。

解 令 $u=x$， $dv=\cos x\,dx=d\sin x$，于是

$$\int x\cos x\,dx=\int x\,d\sin x=x\sin x-\int \sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C\ 。$$

例3 求 $\int x^3\ln x\,dx$ 。

解 令 $u=\ln x$， $dv=x^3dx=d\dfrac{x^4}{4}$，于是

$$\int x^3\ln x\,dx=\int \ln x\,d\frac{x^4}{4}=\frac{x^4}{4}\ln x-\int\frac{x^4}{4}\,d\ln x$$
$$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C$$
$$=\frac{x^4}{16}(4\ln x-1)+C\ 。$$

在使用上述方法相当熟練后，可以不必再把u，v明白写出。

例4 求 $\int \arcsin x\,dx$ 。

解 $\int \arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 。

这里，第二个积分可以用换元法求出：

$$-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C\ 。$$

所以

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\ 。$$

有时，我們須反复使用分部积分法，才能求出結果。

例 5 求 $\int x^2 \sin x\,dx$ 。

解
$$\int x^2\sin x\,dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int 2x(-\cos x)dx$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

对于 $\int x\cos x\,dx$，須再一次应用分部积分法，根据例 2 的結果，得

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C\ 。$$

有时，在反复使用分部积分法后，又回到原来所求的积分，这时我們也有办法求出結果。

例 6 求 $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ 。

解 应用分部积分法，得

$$I = \int e^{ax} d\frac{\sin bx}{b} = \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx。$$

对积分 $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ 再应用分部积分法，得

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \int e^{ax} d\frac{-\cos bx}{b}$$
$$= -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx。$$

上式右端第二項中的积分就是原来的积分 I，于是，有

$$I = \frac{e^{ax}}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I,$$

从而 $$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\cos bx + b\sin bx),$$

两端除以 I 的系数，并加上任意常数，即得

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C\ 。$$

在积分过程中有时要兼用换元法（如例 4），现在再举一个例子。

例 7 求 $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$ 。

解 令 $t = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$，于是，$x = t^3$，$dx = 3t^2dt$ 。

所以 $$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx = \int e^t 3t^2dt = 3\int t^2e^tdt = 3\int t^2de^t =$$

$$=3\left(t^2e^t-\int e^t dt^2\right)=3\left(t^2e^t-2\int te^t dt\right)$$

$$=3t^2e^t-6\int t de^t=3t^2e^t-6\left(te^t-\int e^t dt\right)$$

$$=3t^2e^t-6te^t+6e^t+C=3e^t(t^2-2t+2)+C$$

$$=3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)+C\text{。}$$

由以上各例可知，应用分部积分法时，怎样把被积表达式分成二部分（簡称分部）是一个关鍵問題，如果分部不当，就会适得其反，不但得不出結果，甚至越作越繁。例如在例1中，若令$u=e^x$，$dv=x\,dx=d\dfrac{x^2}{2}$，則有

$$\int xe^x dx=\frac{1}{2}x^2e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x dx\text{。}$$

在右端的积分中，x的冪反而增高了一次，所以这样作是行不通的。

复 习 思 考 题

用分部积分法求积分时，根据什么原則来选取u及dv？比較例2与例3的选法。

第五节　有理函数的积分法

在前两节里，我們讲了求不定积分的两个基本方法——換元积分法和分部积分法。把它們与第二节里讲的不定积分的性质1°和2°結合起来，加以灵活运用，就能求出相当数量的初等函数的不定积分。以下将着重討論一种特殊类型——有理函数的积分，进而略述一下可化为有理函数的积分的一些函数的积分，即所謂有理化方法。

有理函数是指形如$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$的函数，这里$P(x)$和$Q(x)$都是x的多項式。如果分子$P(x)$的次数小于分母$Q(x)$的次数，則称$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$为眞分式；否則称为假分式。后一种情形，总可用分母除分子，把$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$化为一个多項式和一个眞分式之和。例如

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x+6}{x^2+2x+1}\text{。}$$

对于多項式，不难逐項积分。因此，以下我們只討論眞分式的积分問題。下面我們先讲四类簡单分式的积分，进而說明每个眞分式都可分解成这四类簡单分式之和，从而眞分式之积分問題也就解决了。

5.1 四类簡单分式的积分

下列四类分式叫做簡单分式：

I. $\dfrac{A}{x-a}$；