布利氏

新式算學教科書

第三編

第一章

函數　含一元之方程

函數　變數　常數

1. 用$i=prt$之公式,可計算本金p以利率r在t年後所有之利息i.若利率本金常同不變,則利息i依時期t之多少而不同.由此可見互相關聯之事中,若有一事變化,則他事亦相因而變.因此稱時期與利息爲變數,利率與本金爲常數,而利息則稱爲時間之函數.

一量因他量而變,吾人常見之事也.例如人壽保險費,依於保險者之年齡而變.動體經過之路程,依於其所經之時間而變.圓周之長,依於其半徑而變.

有時二變數相依而變之關係,可以方程式表示之.例如圓周之長,可以$c=2\pi r$之方程式表示之.且由此可知任與r一值,卽可得c之值.因此c常稱爲r之函數.又c與r謂之變數,π謂之常數.

2. **常數**　一記號在同一問題中,或同一討論中,始終代表同一數值者,曰常數.

習　題

於方程 $A=\pi r^2$, $A=\frac{1}{2}bh$, $d=rt$, $s=\frac{1}{2}gt^2$, $v=\frac{4}{3}\pi r^3$* 中,一文字之值常依他文字或其他幾文字之值而變.試指出諸式中表示常數之記號.

3. **變數**　一記號在同一問題中,用以代表各個不同之數者,曰變數.

試指出上列習題中諸方程式之變數.

4. **函數**　若 x 與 y 爲兩變數,而與 x 以一值卽可限定 y 之值,則 y 稱爲 x 之函數.

習　題

由下列關係,說明其一記號爲他一記號或諸記號之函數.

1. $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$　　2. $A=\frac{1}{2}cr$

3. $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$　　4. $V=\frac{1}{3}bh$

---

* r^2, $\frac{1}{2}bh$, rt, $16t^2$, $2x+3$, 及 $\sqrt{x^2-25}$ 等式,當初次用於數學時,祇僅認爲表示計算之簡寫法.猶如百分法中,祇認 $p=br$ 爲代表「百分數等於底數乘百分率」之語而已.嗣後凡關於此種代表式,認爲(1)表示計算之方略.(2)表示計算之結果.認之爲計算之結果時,卽可認之爲可以施加,減,乘,除之數.此義詳於近世代數學.

5.　$V=\frac{\pi r^2 h}{3}$　　6.　$C=\frac{5}{9}(F-32)$

7.　指出 1-6 題中之變數與常數.

5. 函數之記法

有時兩變數間之關係,*與變數自身之關係,吾人均須注意.例如於等速運動,則行程等於速率乘時間.於墜體運動,則行程等於16乘時間之平方.前者可以 $d=rt$ 表示之.後者可以 $d=16t^2$ 表示之.但此兩式中之 d,雖同爲 t 之函數,而非 t 之同類函數.

有方程 $f=2n$ 表示每里 2 分之總火車費,與里數之關係而雞蛋每個 2 分,其個數與共價之關係爲 $c=2n$.

於上兩例,可見 f 與 c 爲 n 之同類函數.

x 之函數,可以 $f(x)$ 表示之.讀作 x 之函數,或更簡讀作 x 之 f.欲顯出 x 之兩個不同類函數,則可用他字如 $g(x)$ 或 $F(x)$† 分別表示之.例如在同一討論中,以 $f(x)$ 代表 $3x+2$,則其他函數如 $\sqrt{16-x^2}$,可用 $F(x)$ 表示之.

---

*關係之意義,爲彼此相依不必認爲有一定之比。

† 1694 年來本之(Leibnitz)首用"Function"函數名詞於數學.惟其意義與現今所用者不同.同年十月,裴奴利極姆士(James Bernoulli)亦用函數之名詞,且與來本之同其意義.至1698年六月,裴奴利約翰 (John Bernoulli) 致書來本之,提出現今所用函數之意義.同年七月底得來氏之答覆,深表贊同.1706 年,裴奴利約翰乃首用此名詞於其著作內.裴氏又爲解釋函數之第一人.此於1718年在法國學院發表

設奴利約翰及來本之,各用特別之記號表示函數,但皆非現今所用者。尤拉(Euler)在1734—35年間,於其所著之科學書中,創用f後附括號,內寫變數以作函數之記號。同時又有法國數學家克來阿(Clairaut),以希臘字母代尤拉氏之f。

6. 函數之值 若已知x之一假定值,而欲求函數x^2+5x+3之值,則當以x之假定值代入此函數之變數x。例如x^2+5x+3以$f(x)$表示之,則$3^2+5\cdot3+3$可以$f(3)$表示之,由是知$f(3)$即為以3代$f(x)$中x之結果,或稱$f(3)$為對於$f(x)$之變數$x=3$時之函數值.

習　　題

1. 設$f(x)=x^2+3x+5$,求$f(2),f(0),f(-1),f(a)$。

$f(2)=2^2+3\cdot2+5=15$。

$f(0)=0^2+3\cdot0+5=5$。

$f(-1)=(-1)^2+3(-1)+5=3$。

$f(a)=a^2+3a+5$。

2. 設$f(x)=x^2-4x+3$,又$F(x)=2x^2-5$,求$F(6)-f(2)$。

$F(6)=2\cdot6^2-5=67$。

$f(2)=2^2-4\cdot2+3=-1$。

$\therefore F(6)-f(2)=68$。

3. 設$f(y)=y^3-3y^2+7y-1$, 求$f(1),f(-2),f(0)$。

4. 設$f(r)=mr^2+nr+p$, 求$f(-3),f(\frac{1}{2}),f(a)$。

5.　設 $f(x)=x^2+2x+5$ 又 $g(x)=x^2-3x+2$, 求 $f(2)+g(-1)$;

又求 $\dfrac{f(4)}{g(3)}$.

一 次 函 數

7. 函數 $ax+b$　凡函數之爲 $2x+5$, $\frac{1}{2}x-7$, $3x+\frac{1}{4}$ 之形者,皆歸於 $ax+b$ 一類.

式中之 a 及 b 爲常數,x 爲變數.

習　　題

1.　問下列諸函數何者可歸於 $ax+b$ 之形:

$\dfrac{9}{5}C+32$; $2x^2-4$; $30t$; $\dfrac{1}{x}$; v_0+gt; $\dfrac{5}{9}(F-32)$; $2\pi r$; $\cos x$; 5^x.

2.　試舉 $ax+b$ 形之函數數例.

8. 函數 $ax+b$ 之圖線*　變數 x 與函數 $ax+b$ 之關係,可以圖線代表之.

例如某童於某日儲 3 元於銀行,嗣後每週之末儲 2 元,問某童經 x 週後,共儲銀若干.

於上例題,指明週數與儲銀之關係爲

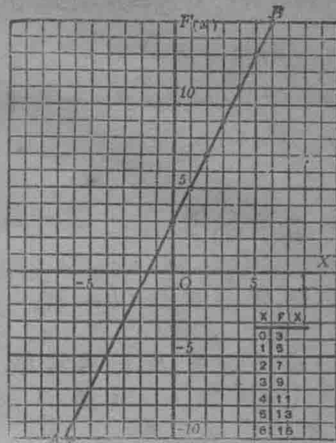
$F(x)=2x+3$.

---

*圖線解法經 1637 年笛卡兒(Descartes)引用,遂成爲數學中之一科.

求$F(x)$及x之對應值,作成一表,以橫坐標表x之值,以縱坐標表$F(x)$之值.(見第一圖)

依表作點,連諸點,即得直線AB.



第　一　圖

9. 直線函數

函數$ax+b$為x之一次函數,因其圖線為一直線,故亦稱x之直線函數.

由下述事件,證明在通常平面內之直線,皆可以方程式$f(x)=mx+b$代表之.

1.　設P為直線ABC上之任一點,且此線不通過原點O(見第二圖).

則$OQ=x$,又$PQ=f(x)$.

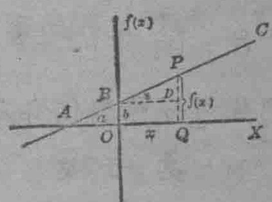
以a代表AO之距,

以b代表BO之距.

作$BD\perp PQ$,

又以s代表$\angle DBP$,

指明$\tan s=\dfrac{DP}{BD}=\dfrac{f(x)-b}{x}$.



第　二　圖

以m代表$\tan s$之值,則$m=\dfrac{f(x)-b}{x}$.

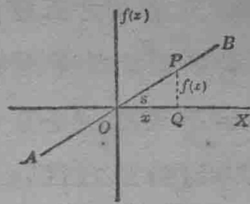
$\therefore f(x)=mx+b$.

2. 設 AB 通過原點 O 如第三圖,

則 $\tan s=\dfrac{f(x)}{x}$,

或 $m=\dfrac{f(x)}{x}$,

$\therefore f(x)=mx$。



第三圖

3. 若此線平行於 x 軸或平行於 $f(x)$ 軸則其方程式爲 $f(x)=c$ 或爲 $x=c$。

10. 截部 第二圖之 a 與 b 爲直線 AC 在 x 軸與 $f(x)$ 軸上所成之截部.

習 題

作下列直線函數之圖線.

1. 一圓周之長略近於 3.14 乘其直徑,即 $c=3.14d$。

2. 華氏表度數比攝氏表度數之 $\frac{9}{5}$ 多 32 度.即 $F=\frac{9}{5}C+32$。

3. 物體由靜止落下,在 t 時間內之速度 v, 爲
$v=gt$.〔$g=32$(略近)〕

4. 試作下列方程式之圖線:
$f(x)=2x+3$。
$f(x)=-4$。
$x=2$。

正 變

11. 正變 於本書第二編, § 200, 知 y 依 x 而變, 即 y 與 x 成正比例,或 y 與 x 正變,或可以方程式 $y=cx$ 表示之.

如云某人之工值與其工作之日數成正比例;物體等速運動所經之路程,與其所費之時間成正比例;圓周之長,與其半徑正變;可以$p=ct, d=ct, l=cr$諸方程式表示之.而稱常數 c 為變數之常數.變數 p, d, l 稱為 t, t 及 r 之一次函數.

習　　題

試以方程式表示下列事實:

1. 球之面積,與其半徑之平方正變.

2. 圓柱之體積,與其底之半徑正變,設以其高為常數.

3. 等邊三角形之面積,與其任一邊之平方正變.

4. 一物體從眞空中落下,其速率與其所經之時間正變.

5. 以力 f 引伸彈簧,其伸長之度,與其所施之力 f 正變.〔弗克氏定律(Hooke's Law)〕

6. 鍋鑪用煤之量,與鍋底面積之平方呎數正變.

7. 立方體之對角線,與其稜正變.當對角線為 8.5 時,其稜為 5;問稜為10時,對角線長若干?

　1. 指明 $d=c\cdot e$

　2. 決定變數之常數:

　因 $d=c\cdot e, 8.5=c\cdot 5,\ \therefore c=\frac{8.5}{5}=1.7.$

　3. 由是可決定對角線 $d=1.7\times 10=17.$

8. 用圖線指明立方體之對角線,隨其稜而變.

9.　圓之面積,隨其半徑之平方而變.

若半徑爲 6 呎,則面積爲113平方呎.若半徑爲 $2\frac{1}{2}$ 呎,則圓之面積如何?

10.　振子振動一次所需之時間,隨其長之平方而變.設 100 公分長之振子,一秒時間振動一次,問 49 公分長之振子,振動一次需時若干?

11.　液體之重,與其體積成正比例.若10立方呎之水重625磅,問25立方呎之水重若干?

12.　水柱每平方吋之壓力,與水柱之高之呎數正變.設2.5呎高之水柱,施於每平方吋之壓力爲1.08磅,求施於一平方吋之壓力爲1.84磅之水柱高.

二　次　函　數

12.　二次函數　函數如 πr^2, $s_0+\frac{1}{2}gt^2$, $3x^2-4x+2$ 等,皆稱爲二次函數.指明此等函數,皆歸於 ax^2+bx+c 之形,由是凡合於 ax^2+bx+c 之形之函數,(但 $a\neq o$) 皆稱爲二次函數.

習　　題

指明下列函數皆合於 ax^2+bx+c 之形,又求 a, b, c 之值:

1.　$2+4x^2-x$
2.　$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}x-x^2-5$
3.　$ax^2-mx+2x^2-12$
4.　x^2-2
5.　$\frac{x^2}{8}$
6.　$4\sin^2 x+3\sin x-7$

13. 函數 ax^2+bx+c 之圖線

於§9,已知一次函數$ax+b$之圖線爲一直線.由本節可知二次函數 ax^2+bx+c之圖線爲一曲線,其上不能有三點同在一直線內.

習　　題

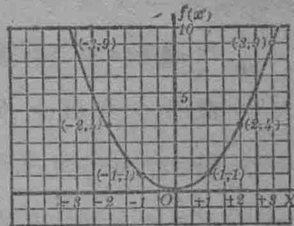
1. 作函數$f(x)=x^2$之圖線.

求得$f(x)$對應於x在3與-3間之值,作成一表.

依表作點.

以曲線連結諸點,卽得$f(x)=x^2$之圖線.此曲線名曰拋物線.

x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
$+1$	1
$+2$	4
$+3$	9



第四圖

若以極大之負數代x,則$f(x)$爲極大之正數.例如$x=-1000$,則$f(x)=+1,000,000$.

若x逐次增大,但常爲負數,則$f(x)$逐漸減少.若x近於零,則$f(x)$亦漸近於零.若x逐次增加,則$f(x)$亦逐次增加.此可列表說明之如次:

x	$-\infty$*	負,增	0	正,增	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$†	正,減	0	正,增	$+\infty$

*$-\infty$ 表示向負方無限增加.

†$+\infty$ 表示向正方無限增加.

$x=0$之值,名曰$f(x)$之零.卽對應於$f(x)$之值爲零時x之值.

2. 於 x 軸上取 2 公分爲單位,於 $f(x)$ 軸上取 $\frac{1}{5}$ 公分爲單位,試作曲線 $f(x)=x^2$ 之正支.

說明此圖線可用以求數之平方根.

3. 說明 $f(x)=x^2$ 之圖線,關於 $f(x)$ 軸爲對稱.

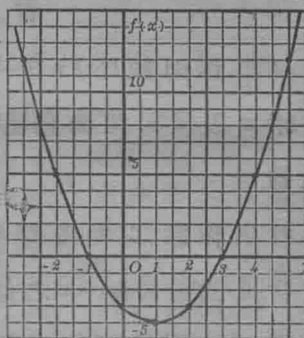
說明 $f(x)$ 軸爲曲線上縱坐標相同之任兩點聯線之中點垂線.

4. 作函數 πr^2 之圖線,設 $\pi=3.14$.

5. 設拋一球直上天空,初速每秒 64 呎.以後速度之公式爲 $v^2=64^2-64h$, 其 h 爲某時所達到之高.

說明 h 爲 v 之二次函數.又以 64 至 0 間各種數值代 v, 而作 $h=f(v)$ 之圖線.

x	$f(x)$
-3	12
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5
5	12



第五圖

6. 作函數 $f(x)=x^2-2x-3$ 之圖線.

作 $f(x)$ 及 x 之對應值表,依表作諸點如第五圖.又以曲線連結諸點.問 x 爲 0 時,$f(x)$ 之值爲何?

說明此圖線可用以解 $x^2-2x-3=0$ 之方程.

求函數 x^2-2x-3 之對稱軸.

作下列函數之圖線並作各圖線之對稱軸.

7. x^2-6x+5　　9. x^2+4x

8. $3x^2-11x-4$　　10. $-x^2+6x-5$

用圖線解下列各二次方程:

11.　$x^2+4x+2=0$　　*13.*　$x^2+x-6=0$

12.　$x^2-5x+4=0$　　*14.*　$4-5x-x^2=0$

二次以上之方程之圖線解法

14. 立方函數之圖線　函數如 x^3-x, $x^3-6x^2+11x-6$, $2x^3-3x+2$ 等,皆稱爲三次函數,或稱立方函數.

習　題

1.　作函數 $f(x)=x^3-x$ 之圖線.

求 x 及 $f(x)$ 之對應值,作表如第六圖.

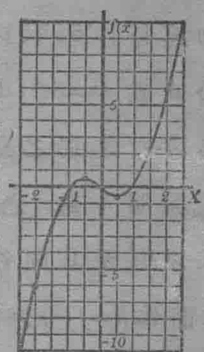
按表作點,以曲線聯結諸點.

當 x 爲 0 時,x^3-x 之值爲何?

證明此圖線可用以解方程

$x^3-x=0$.

x	$f(x)$
-3	-24
-2	-6
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$
1	0
2	6
3	24



第六圖

2.　作函數 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 之圖線.且由圖線求方程 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 之根.

3.　球之體積 v 爲 $\frac{1}{6}\pi d^3$. 用圖線說明體積隨其直徑而變.

15. 高次方程之圖線　由§14習題 *1* 與 *2*,已知圖線可用以解三次方程.然方程之高於三次者,亦可用圖線解之.

習　題

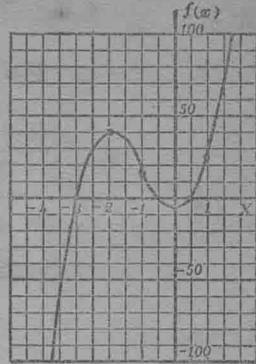
解下列方程,而計算其根之近似值至小數一位止.

1.　$10x^3+29x^2-5x-6=0.$

作函數 $f(x)=10x^3+29x^2-5x-6$ 之圖線如第七圖.

由圖線決定 x 之近似值.

x	$f(x)$
-4	-162
-3	0
-2	$+40$
-1	$+18$
0	-6
$\frac{1}{2}$	0
1	28
2	180



第　七　圖

2.　$x^3-2x^2-7x-4=0.$

綜合除法　餘數定理

16. 由假定 x 之種種數值而決定一函數之諸值時,以應用綜合除法與餘數定理爲最便.

17. **綜合除法**　綜合除法,可依下例以說明之.

以 $x-2$ 除 $2x^3-7x^2-3x+5$.

以常法除之,其演算如次:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3-7x^2-3x+5 & x-2 \\ \cline{2-2}
2x^3-4x^2 & 2x^2-3x-9 \\ \cline{1-1}
\quad -3x^2-3x & \\
\quad -3x^2+6x & \\ \cline{1-1}
\qquad -9x+5 & \\
\qquad -9x+18 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -13 &
\end{array}
$$

若省去 x 之各次乘冪,僅記出其係數,則得較簡之演算如次:

$$
\begin{array}{rrrrl}
2-7 & -3 & +5 & & \underline{|\,1-2} \\
2-4 & & & & 2-3-9 \\
\hline
-3 & -3 & & & \\
-3 & +6 & & & \\
\hline
& -9 & +5 & & \\
& -9 & +18 & & \\
\hline
& & -13 & &
\end{array}
$$

次將各次餘數後再加入之被除數畧去不寫,則得更簡之演算如下.

$$
\begin{array}{rrrrl}
2-7 & -3 & +5 & & \underline{|\,1-2} \\
2-4 & & & & 2-3-9 \\
\hline
-3 & & & & \\
-3 & +6 & & & \\
\hline
& -9 & & & \\
& -9 & +18 & & \\
\hline
& & -13 & &
\end{array}
$$

又因商之各係數,依次等於被除數及各次餘數之第一係數,故商之係數可以不記.

同理,各部分積之第一係數亦可不記.

又因除數之第一係數恆為 1,故亦可不記.

由是得更簡之演算如下:

$$
\begin{array}{l}
2-7-3+5 \,\underline{|\ -2\ } \\
\quad\ \ -4 \\
\overline{\quad\ \ -3\quad} \\
\qquad\quad +6 \\
\qquad \overline{\quad -9\quad} \\
\qquad\qquad +18 \\
\qquad\qquad \overline{\ -13\ }
\end{array}
$$

再由上法觀之,知諸部分積如 $-4,+6$ 及 $+18$ 皆爲減數,若變除數之 -2 爲 $+2$,則諸部分積之符號亦變,而部分積之爲減數者,一一變而爲加數矣.其演算如次:

$$
\begin{array}{l}
2-7-3+5 \,\underline{|\ 2\ } \\
\qquad 4 \\
\overline{\quad -3\quad} \\
\qquad -6 \\
\quad \overline{\quad -9\quad} \\
\qquad\quad -18 \\
\qquad\quad \overline{\ -13\ }
\end{array}
$$

上之演算,可再縮寫如次:

$$
\begin{array}{l}
2-7-3+5 \,\underline{|\ 2\ } \\
\quad\ \ 4-6-18 \\
\hline
2-3-9-13
\end{array}
$$

末列上聯續之最先三項(卽 $2-3-9$)爲商之係數,其最後之一項(卽-13)爲餘數.此種簡捷除法,名曰綜合除法.

18. 綜合除法之規則 若以$x-a$除$f(x)$,則將$f(x)$之各項,依x之遞降冪排列.其間有缺項,則命其係數爲0.

寫諸係數於一橫線上,復將第一係數寫於此橫線下.

以a乘第一係數,而以其積加於第二係數.

逐次推行此法,至所得之積加於末係數爲止.

最後之和,卽爲餘數.

以前諸項,卽爲商之x係數,而依x之遞降冪整列者.

習　　題

用綜合除法演算下列各題:

1. x^4-3x^3+4x+2除以$x-3$.

2. $3x^3-4x+7$除以$x-1$.

3. $5x^3+2x^2-3$除以$x-5$.

4. $4x^3+x^2-3x-1$除以$x+2$.

〔變$x+2$爲$x-(-2)$〕

5. $2x^4+6x-5$除以$x+1$.

19. 餘數定理 次之習題,說明$x=a$時,$f(x)$之值可以$x-a$除$f(x)$而得之.

習　　題

1. 以$x-2$除$f(x)=x^2-6x+3$.

由綜合除法,可以求得其商與餘數如次: