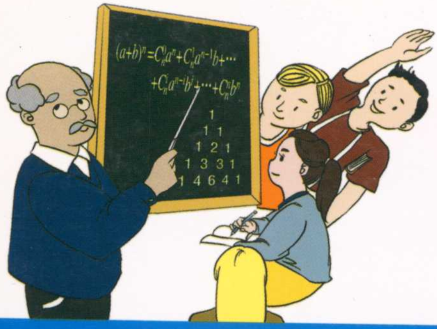


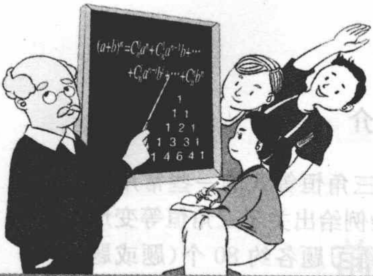
数林外传系列
跟大学名师学中学数学

怎样证明三角恒等式

第2版

◎朱尧辰 著

中国科学技术大学出版社



数林外传 系列

跟大学名师学中学数学

怎样证明三角恒等式

第2版

◎ 朱尧辰 著

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书讲述中等数学中关于证明三角恒等式的一些常用方法和基本技巧，并通过补充材料和杂例给出关于三角恒等变形的各种特殊技巧.全书包含例题及练习题各约80个（题或题组），总共300余道题，并给出所有练习题的解答或提示.

本书可作为高中生的数学课外读物，也可供一般数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

怎样证明三角恒等式/朱尧辰著.—2版.—合肥：中国科学技术大学出版社，2014.1

（数林外传系列：跟大学名师学中学数学）

ISBN 978-7-312-03355-1

Ⅰ.怎…　Ⅱ.朱…　Ⅲ.三角—恒等式—题解

Ⅳ.O124-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第271787号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路96号，230026

http://press.ustc.edu.cn

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本：880 mm×1230 mm　1/32　印张：7.375　字数：148千

1981年1月第1版　2014年1月第2版　2014年1月第2次印刷

定价：19.00元

前　言

这本小册子初版于 20 世纪 80 年代初期, 主要涉及 20 世纪 60 年代中学数学教材中与三角恒等变形有关的基本知识. 岁月流逝了 30 多年, 现今中学数学教材中对于有关知识的要求在深度和广度方面都有了明显的变化, 因此, 笔者对原书作了必要的修改和补充, 以适应新的情况. 修订后的主要变化是删去了反三角函数恒等式、涉及三角方程的问题以及消去式问题, 降低了与三角形边角关系有关的恒等式的难度, 对于其余部分也作了适当调整和补充. 新版本包含 6 节. 第 1 节是引言. 第 2~4 节是基本材料, 给出关于证明三角恒等式的一些常用方法和基本技巧. 第 5 节是具有提高性质的补充材料, 包括某些特殊的有限三角级数的和以及三角函数式的有限乘积的计算,De Moivre 公式和 Vieta 定理对证明三角恒等式的一些应用; 还补充了不同类型的三角恒等变形的杂例, 有一定难度, 显示了多方面的解题技巧. 第 6 节给出所有练习题的解答或提示. 对于所有例题, 我们力求讲清解题思路, 给出论证和计算的细节, 有的在解题前作了一些分析. 书中带星号“*”的材料仅供感兴趣的读者选读.

作为"面对全体学生"的中学通用教材, 对于三角恒等变形的知识的要求, 无疑在深度和广度方面都应当是适度的. 但对于学有余力且对数学有兴趣的学生, 通过阅读数学课外读物或以其他适当方式接受较高难度的三角恒等变形能力的训练不仅是可能的, 而且对于他们今后学习其他数学知识也是有益的. 这种训练不仅可以扩大他们的数学视野, 而且更重要的是借此有助于逐步养成他们沉着应对复杂数学运算、寻求破解难题之道的心理素质. 这样的心理素质对于他们今后学习甚至研究某些数学课题都将是终身受用的. 值得提及的是, 英年早逝的印度数学家 S. A. Ramanujan 在他留给后人的数学瑰宝《数学笔记》中, 给出了形式不同的关于无穷级数和特殊函数的复杂的恒等式, 它们至今仍然是重要的数论和分析学课题.

限于笔者的水平和经验, 这本小册子在取材和表述等方面难免存在不足之处甚至谬误, 欢迎读者批评指正.

朱尧辰

2013 年 5 月于北京

目　　次

1 引 言

1.1 什么是三角恒等式和三角恒等变形

设给定两个三角函数解析表达式, 我们把它们记成

$$f_1(x)=U_1(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x),\tag{1}$$

$$f_2(x)=U_2(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x).\tag{2}$$

对于式 (1), 自变量的取值范围是 A_1, 对于式 (2), 自变量的取值范围是 A_2. 现在同时研究这两个式子, 于是考虑 A_1 和 A_2 的公共部分 $A_1\cap A_2$. 为了使问题的讨论有意义, 我们始终假设 $A_1\cap A_2$ 非空.

如果对于 $A_1\cap A_2$ 中的任何值 x, 式 (1) 和式 (2) 都有相等的数值, 那么称式 (1) 和式 (2) 是恒等的, 并且记作

$$U_1(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x)=U_2(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x),\tag{3}$$

式 (3) 称为三角恒等式.

注 1° 式 (1) 和式 (2) 恒等, 总是指 $x\in A_1\cap A_2$.

2° 符号 "≡" 强调恒等, 但也用作数论中的同余 (省略

mod), 因此本书仍然按惯例用等号“=”表示恒等, 不再特别说明.

3° 符号 $\tan\theta$(正切) 也记作 $\operatorname{tg}\theta$; $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$(余切) 也记作 $\operatorname{ctg}\theta$. 还令

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\ (\text{正割}),\quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}\ (\text{余割}),$$

有时它们也分别记作 $\operatorname{sc}\theta$ 和 $\operatorname{cosec}\theta$.

例 1.1.1 (1) 恒等式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立.

(2) 恒等式

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\tan\frac{x}{2}$$

对所有实数 $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 成立.

(3) 函数 $\sqrt{\sin^2 x}$ 与 $\sin x$ 不恒等. 这是因为此时, $A_1=A_2=\mathbb{R}, A_1\cap A_2=\mathbb{R}$, 而

$$\sqrt{\sin^2 x}=\begin{cases}+\sin x & (2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\ (k\in\mathbb{Z})),\\ -\sin x & ((2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})),\end{cases}$$

于是对于 $A_1\cap A_2=\mathbb{R}$ 中的无穷多个 $x\in\big((2k-1)\pi,2k\pi\big)$ $(k\in\mathbb{Z})$, 函数 $\sqrt{\sin^2 x}$ 和 $\sin x$ 取不同的值, 从而 $\sqrt{\sin^2 x}$ 和 $\sin x$(在 $A_1\cap A_2=\mathbb{R}$ 上) 不恒等. 但函数 $\sqrt{\sin^2 x}(2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k\in\mathbb{Z}))$ 与 $\sin x$ 恒等, 也就是说, 当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k\in\mathbb{Z})$ 时, 有恒等式 $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$. □

例 1.1.2 等式

$$\sin^2 x = \cos^2 x$$

不是恒等式. 因为此时 $A_1 = A_2 = \mathbb{R}, A = A_1 \cap A_2 = \mathbb{R}$, 只当 x 取 A 中的特殊值 $k\pi \pm \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ 时等式两边才取相等的值. □

注 一般地, 若等式 (3) 只对 A 中的特殊值成立, 则称式 (3) 是一个三角方程, 这些特殊值称为这个三角方程的解. 本书不讨论三角方程.

两个恒等的表达式 (1) 和 (2) 在 $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R}$ 上确定同一个函数. 两个恒等的表达式有时可能是同一个函数仅在外表上不同的表示法. 例如,$1 + 2\sin x + \sin^2 x$ 与 $(1 + \sin x)^2$.

当一个三角函数表达式用另一个与它恒等的三角函数表达式去代换时, 这种代换就称为三角恒等变形 (或三角恒等变换). 解析式的三角恒等变形可能会引起函数定义域的改变. 例如, 在 $1 + \sin 2x$ 中, 若用 $\frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ 代换 $\sin 2x$, 将引起定义域的缩小; 在 $1 + \tan x \cos x$ 中用 $\sin x$ 代换 $\tan x \cos x$ 时, 将引起定义域的扩大. 这种现象往往是引起某些方程产生增根或减根的原因.

上面都是对单个变量情形来说的, 对于多个变量情形, 也是类似的. 例如, 当 $x + y \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, x, y \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时

$$\tan(x + y) \quad 与 \quad \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

是恒等的, 即

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

练 习 题

1.1.1 下列等式是否是恒等式? 如果不是, 说明理由; 如果是, 说明恒等式中自变量的取值范围:

(1) $\sqrt{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}=1-\sin\theta$.

(2) $\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\sin\theta-\cos\theta$.

(3) $2\lg\sin\theta=\lg(1-\cos^2\theta)$.

1.1.2 对于 α 的哪些值, 等式

$$\tan\alpha-\sec\alpha=\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

成为恒等式?

1.1.3 求使下列恒等式成立的自变量 x 的集合:

(1) $\lg\tan x=\lg\sin x-\lg\cos x$.

(2) $\lg\tan x=\lg|\sin x|-\lg|\cos x|$.

1.2 证明三角恒等式的三种方法

证明三角恒等式, 通常有三种方法:

1° 通过一系列恒等变形. 从待证恒等式左边 (右边) 的式子出发推导出右边 (左边) 的式子.

2° 证明待证恒等式两边的式子都与同一个式子恒等.

3° 证明一个与要证的恒等式等价的恒等式 (两个恒等式称

为等价, 如果其中任何一个成立时另一个也成立).

现在举例说明.

例 1.2.1 证明恒等式:

(1) $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta=\tan\theta+\cot\theta$.

(2) $\dfrac{1-\csc\theta+\cot\theta}{1+\csc\theta-\cot\theta}=\dfrac{\csc\theta+\cot\theta-1}{\csc\theta+\cot\theta+1}$.

解 (1) 因为左边比较复杂, 所以从左边入手 (按第一种方法).

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta\\
&=\frac{\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\
&=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\
&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\
&=\tan\theta+\cot\theta\\
&=\text{右边}.
\end{aligned}$$

(2) 注意问题本身蕴含题中等式两边的分母均不为零, 我们只需证明下列恒等式 (按第三种方法):

$$\begin{aligned}
&(1-\csc\theta+\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta+1)\\
&\quad=(\csc\theta+\cot\theta-1)(1+\csc\theta-\cot\theta).
\end{aligned}\tag{4}$$

式 (4) 的左边等于

$$(1+\cot\theta)^2-\csc^2\theta=1+2\cot\theta+\cot^2\theta-\csc^2\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+2\cot\theta-(\csc^2\theta-\cot^2\theta)\\
&= 1+2\cot\theta-1=2\cot\theta,
\end{aligned}
$$

式 (4) 右边等于

$$
\begin{aligned}
\csc^2\theta-(1-\cot\theta)^2 &= \csc^2\theta-1+2\cot\theta-\cot^2\theta\\
&= (\csc^2\theta-\cot^2\theta)-1+2\cot\theta\\
&= 1-1+2\cot\theta=2\cot\theta.
\end{aligned}
$$

因此式 (4) 成立, 从而本题得证. □

练　习　题

1.2.1　用适宜的方法证明下列恒等式:

(1) $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$.

(2) $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=2\csc\theta-\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}$.

(3) $2(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)=(1+\sin\theta+\cos\theta)^2$.

(4) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta\ (0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$.

1.2.2　证明下式与 x 无关:

$$
\frac{1}{8}\sin^8x-\frac{1}{8}\cos^8x-\frac{1}{3}\sin^6x+\frac{1}{6}\cos^6x+\frac{1}{4}\sin^4x.
$$

也就是说, 对于任何使此式有意义的 x 的值, 它等于某个常数.

2 以同角函数关系为基础的恒等式

2.1 简易恒等式

所谓同角三角函数关系是指下列 3 组恒等关系:

1° 平方和关系

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad \tan^2\theta+1=\sec^2\theta,\quad \cot^2\theta+1=\csc^2\theta.$$

2° 倒数关系

$$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta},\quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},$$

或者

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1,\quad \sec\theta\cdot\cos\theta=1,\quad \csc\theta\cdot\sin\theta=1.$$

3° 相除关系

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

这些关系式经常应用于三角恒等变形, 是证明三角恒等式的基础. 在 1.2 节我们已经给出几个简易恒等式的例子, 下面再补充 2 个.

例 2.1.1 求证:

$$(1-\tan^2 A)^2=(\sec^2 A-2\tan A)(\sec^2 A+2\tan A).$$

解 这里给出 4 种解法.

解法 1 综合应用因式分解和乘法公式, 从左边入手.

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=1-2\tan^2 A+\tan^4 A=1+2\tan^2 A+\tan^4 A-4\tan^2 A\\
&=(1+\tan^2 A)^2-4\tan^2 A=\sec^4 A-4\tan^2 A\\
&=(\sec^2 A-2\tan A)(\sec^2 A+2\tan A)\\
&=\text{右边}.
\end{aligned}$$

解法 2 综合应用因式分解和乘法公式, 从右边入手.

$$\begin{aligned}
\text{右边}&=(1+\tan^2 A-2\tan A)(1+\tan^2 A+2\tan A)\\
&=(1-\tan A)^2(1+\tan A)^2=\big((1-\tan A)(1+\tan A)\big)^2\\
&=(1-\tan^2 A)^2\\
&=\text{左边}.
\end{aligned}$$

解法 3 分别计算左右两边, 验证它们都恒等于同一个式子.

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\left(1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)^2=\frac{(\cos^2 A-\sin^2 A)^2}{\cos^4 A}\\
&=\frac{\cos^4 A+\sin^4 A-2\cos^2 A\sin^2 A}{\cos^4 A}\\
&=\frac{(\cos^2 A+\sin^2 A)^2-4\cos^2 A\sin^2 A}{\cos^4 A}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1-4\cos^2 A\sin^2 A}{\cos^4 A},$$

$$右边 = \sec^4 A - 4\tan^2 A = \frac{1}{\cos^4 A} - \frac{4\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1-4\cos^2 A\sin^2 A}{\cos^4 A}.$$

因此左边等于右边. □

解法 4　依据等式的基本性质逐步推演.

因为 $1+\tan^2 A = \sec^2 A$, 所以 $(1+\tan^2 A)^2 = \sec^4 A$, 展开左边得

$$1+2\tan^2 A + \tan^4 A = \sec^4 A.$$

两边同时减去 $4\tan^2 A$, 得

$$1-2\tan^2 A + \tan^4 A = \sec^4 A - 4\tan^2 A.$$

于是由因式分解立得题中要证的恒等式. □

例 2.1.2　证明:

$$\frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}.$$

解　在左边的分子中用 $\sin^2 x + \cos^2 x$ 代替 1, 得

$$左边 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x},$$

因为当 $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k\in\mathbb{Z})$ 时 $\tan x$ 无意义, 所以 $\dfrac{\pi}{2} + k\pi (k\in\mathbb{Z})$ 不属于集合 $A_1 \cap A_2$, 从而当 $x\in A_1\cap A_2$ 时 $\cos x \neq 0$. 我们用

$\cos x$ 同除上式最右边式子的分子和分母, 得原式左边等于

$$\frac{\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\text{右边}.$$

于是本题得证. □

从上面这些例题的解法可总结出下列几点:

1° 因式分解、乘法公式、分式性质等是经常使用的代数技巧.

2° "1"的代用法, 即

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad \sec^2\theta-\tan^2\theta=1,\quad \csc^2\theta-\cot^2\theta=1$$

(特别是 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$), 是一种常用技巧.

3° 应当依据问题的特点尽量选择最简单的证法.

练 习 题

2.1.1 证明下列恒等式:

(1) $(2-\cos^2\theta)(1+2\cot^2\theta)=(2-\sin^2\theta)(2+\cot^2\theta)$.

(2) $\dfrac{2(\cos\theta-\sin\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

(3) $\dfrac{1}{\cos\theta+\tan^2\theta\sin\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta+\cot^2\theta\cos\theta}=\dfrac{\csc\theta-\sec\theta}{\sec\theta\csc\theta-1}$.

(4) $\dfrac{(1+\csc\theta)(\cos\theta-\cot\theta)}{(1+\sec\theta)(\sin\theta-\tan\theta)}=\cot^5\theta$.

(5) $\dfrac{1+\tan x+\cot x}{\sec^2 x+\tan x}-\dfrac{\cot x}{\csc^2 x+\tan^2 x-\cot^2 x}=\sin x\cos x$.