

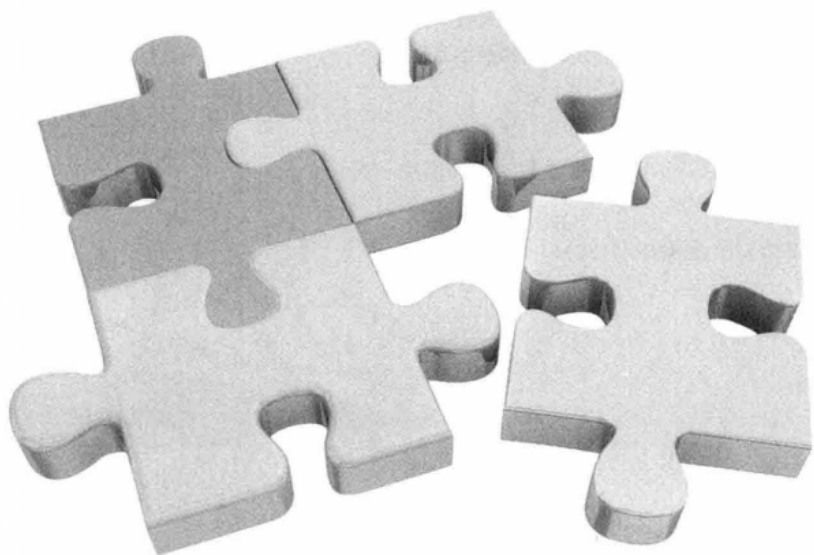


王国江 陆建国 / 丛书主编

高考

数学中的思想方法

考点详解+易错剖析+难题精练



高考

数学中的思想方法

考点详解+易错剖析+难题精练

丛书主编：王国江 陆建国

本书主编：王国江

编委（排名不分先后）：

浦静滢 张 谊 方耀华 袁 青 张菁璐 罗 琳 赵传义 夏庆林 朱 华
严卫东 彭家麒 李 洁 孙红娅 徐 飞 赵 阳



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

高考数学中的思想方法:考点详解+易错剖析+难题精练 /
王国江本书主编. —上海:华东理工大学出版社,2015.1

(给力数学)

ISBN 978-7-5628-4026-8

I. ①高… II. ①王… III. ①中学数学课—高中—升学
参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 206521 号

给力数学

高考数学中的思想方法:考点详解+易错剖析+难题精练

本书主编 / 王国江

策划编辑 / 庄晓明

责任编辑 / 陈月姣

责任校对 / 成俊

封面设计 / 裘幼华

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址:上海市梅陇路 130 号,200237

电 话:(021)64250306(营销部)

(021)64252718(编辑室)

传 真:(021)64252707

网 址:press.ecust.edu.cn

印 刷 / 常熟华顺印刷有限公司

开 本 / 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 / 20

字 数 / 384 千字

版 次 / 2015 年 1 月第 1 版

印 次 / 2015 年 1 月第 1 次

书 号 / ISBN 978-7-5628-4026-8

定 价 / 46.80 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn

官方微博 e.weibo.com/ecustpress

淘宝官网 <http://shop61951206.taobao.com>



序

最近,花了几天工夫拜读了由上海市杨浦区高中数学教研员、数学特级教师、区骨干、学科带头人王国江老师等编著的《高考数学中的思想方法:考点详解+易错剖析+难题精练》一书。

数学思想方法是数学高考考查目标之一,是高校选拔人才的主要标准,是学生展示自己能力的重要途径。近年已引起众多数学教育工作者的关注与重视。数学问题解决通常要从多角度、多方位去思考,学会举一反三。对问题探究的不同途径和方法加以甄选,最后得出认知层次较高的、比较完善的结论,更能培养学生的发散思维和探究创新能力,有助于培养学生自主学习、自主探究的科学精神,激发学生的学习热情和兴趣,养成独立思考的良好习惯。这也正是二期课改的理念,对实现《教育规划纲要》中“提高科技创新能力、培养创新型人才”的国家战略具有积极的现实意义。

为帮助广大学生更有效地培养探究与创新能力,本着适应性、实用性和精益求精的原则,该书按照高考考点内容顺序编写,探究性数学问题、发现性数学问题都离不开数学思想方法。探究性数学问题,要求学生运用有关的数学思想方法和科学研究方法,对问题进行探究,寻求数学对象的规律,并要求学生正确地表述探究过程和结果;发现性问题,问题设计要求学生利用已有的知识和经验,发现和提出有一定价值的问题;创新性问题,分概念学习型、公式学习型、方法学习型等设计问题,要求学生在新的情景中,正确地表述数量关系和空间形式,并在创造性思考问题的基础上,对较简单的问题得出一些新颖的结果。

作者对例题精心筛选、改编创新,总结出系列问题的共性与解决方案,并展示了高中数学探究性与创新性问题解决思维方式和解决策略,认真阅读这本书,有助于培养学生自主学习、自主探究的科学精神,激发学生的学习热情和兴趣,对提高学生对探究与创新能力的认识,提高分析、解决这类问题的能力具有很好的作用。

靳全勤

2014年5月18日 于同济大学志远楼

前言

该书由具有丰富命题经验的高级教师、特级教师、大学教授、教研员等命题研究专家组成, 针对全国高考数学卷, 对所涉及考点逐个进行了详实的分析, 并配备不同层次难易适度的例题与习题, 对考试所涉及的能力要求进行了深度的剖析、解读, 并配备了有相应能力要求的题目分析, 使学生能比较全面、准确适时地把握实际考查要求, 促进学生有效复习.

该书由两部分组成. 第一部分是关于高考数学学科的综合分析, 包括考试的性质、考试目标、考试内容和要求、考试题型等. 第二部分针对数学学科的近百个考点的解读数学思想方法, 包括方程与代数、函数与分析、图形与几何、数据整理和概率统计以及数与运算, 分别针对其中不同水平层次的考试内容进行逐条分析解读数学思想方法, 通过对这些题目进行分析与说明, 试图使读者能在此基础上举一反三、触类旁通.

尽管我们做了很大的努力, 但由于客观条件所限, 书中难免有疏漏不足之处, 敬请广大读者批评指正.

目 录

CONTENTS

001	第一章 高考数学综合解读
001	一、高考数学考试性质与指导思想
003	二、高考数学考试的内容与目标
008	三、高考数学卷的题型与难度分析
010	四、数学开放性、研究性试题的命制与评价
015	五、高考改革——2017 年起数学高考不分文理
018	第二章 高考数学考查内容考点解读
018	一、方程与代数
018	（一）集合
018	考点 2.1.1 集合及其表示
020	考点 2.1.2 子集
021	考点 2.1.3 交集、并集、补集
025	考点 2.1.4 命题的四种形式
027	考点 2.1.5 充分条件、必要条件、充要条件
029	考点 2.1.6 子集与推出关系
031	易错解读
032	创新探究
034	经典训练
035	能力提升
036	（二）不等式
036	考点 2.1.7 不等式的基本性质及其证明
040	考点 2.1.8 基本不等式

045	考点 2. 1. 9 一元二次不等式(组)的解法
047	考点 2. 1. 10 分式不等式的解法
050	考点 2. 1. 11 含有绝对值的不等式解法
052	易错解读
053	创新探究
054	经典训练
054	能力提升
055	(三) 矩阵与行列式初步
055	考点 2. 1. 12 矩阵
058	考点 2. 1. 13 二阶、三阶行列式
060	考点 2. 1. 14 二元、三元线性方程组解的讨论
062	易错解读
063	创新探究
065	经典训练
067	能力提升
067	(四) 算法初步
067	考点 2. 1. 15 算法的含义与程序框图
070	易错解读
071	经典训练
072	(五) 数列与数学归纳法
072	考点 2. 1. 16 数列的有关概念
075	考点 2. 1. 17 等差数列
078	考点 2. 1. 18 等比数列
081	考点 2. 1. 19 简单的递推数列
086	考点 2. 1. 20 数列的极限
088	考点 2. 1. 21 无穷等比数列的各项和
089	考点 2. 1. 22 数列的实际应用问题
093	考点 2. 1. 23 数学归纳法

095	考点 2. 1. 24 归纳—猜测—论证
098	易错解读
099	创新探究
103	经典训练
104	能力提升
105	二、函数与分析
105	(一) 函数及其基本性质
105	考点 2. 2. 1 函数的概念与运算、函数解析式
106	考点 2. 2. 2 函数的定义域、值域
108	考点 2. 2. 3 函数的性质
110	考点 2. 2. 4 函数的周期性、图像变换
112	易错解读
113	(二) 指数函数与对数函数
113	考点 2. 2. 5 简单的幂函数、二次函数的性质
117	考点 2. 2. 6 指数函数的性质图像
119	考点 2. 2. 7 反函数
120	考点 2. 2. 8 对数与对数函数
122	考点 2. 2. 9 指数方程和对数方程
124	易错解读
125	(三) 三角比
125	考点 2. 2. 10 任意角的三角比
128	考点 2. 2. 11 诱导公式和同角三角比的关系
130	考点 2. 2. 12 两角和与差的三角比
132	考点 2. 2. 13 二倍角及半角的三角比
134	考点 2. 2. 14 正弦定理和余弦定理
136	易错解读
137	(四) 三角函数

137	考点 2. 2. 15 正弦函数和余弦函数图像性质
141	考点 2. 2. 16 正切函数图像及性质
143	考点 2. 2. 17 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像和性质
148	考点 2. 2. 18 反三角函数与最简三角方程
150	易错解读
151	创新探究
155	经典训练

158

三、图形与几何

158	(一) 平面向量的坐标表示
158	考点 2. 3. 1 平面向量的数量积
160	考点 2. 3. 2 平面向量的分解定理
163	考点 2. 3. 3 向量的坐标表示
166	考点 2. 3. 4 向量运算的坐标表示
168	考点 2. 3. 5 向量平行及向量垂直的坐标关系
170	考点 2. 3. 6 向量的度量计算
173	易错解读
174	经典训练

175 (二) 平面直线方程

175	考点 2. 3. 7 直线的点方向式方程
177	考点 2. 3. 8 直线的点法向式方程
179	考点 2. 3. 9 直线的一般式方程
181	考点 2. 3. 10 直线的倾斜角与斜率
183	考点 2. 3. 11 两条直线的平行关系与垂直关系
185	考点 2. 3. 12 两相交直线的交点和夹角
187	考点 2. 3. 13 点到直线的距离
189	易错解读
190	经典训练

191 (三) 曲线方程

191	考点 2. 3. 14 曲线方程的概念
193	考点 2. 3. 15 圆的标准方程和一般方程
196	考点 2. 3. 16 椭圆的标准方程和几何性质
202	考点 2. 3. 17 双曲线的标准方程和几何性质
207	考点 2. 3. 18 抛物线的标准方程和几何性质
212	易错解读
213	经典训练
214	(四) 空间图形
214	考点 2. 3. 19 平面及其表示法
217	考点 2. 3. 20 平面的基本性质
220	考点 2. 3. 21 几何体的直观图
223	考点 2. 3. 22 空间直线与平面的位置关系
225	易错解读
227	经典训练
229	(五) 简单的几何体的研究
229	考点 2. 3. 23 柱体
233	考点 2. 3. 24 锥体
236	考点 2. 3. 25 球
240	易错解读
243	创新探究
245	经典训练
247	能力提升
249	四、数据整理和概率统计
249	(一) 排列、组合、二项式定理
249	考点 2. 4. 1 排列与排列数
252	考点 2. 4. 2 组合与组合数
255	考点 2. 4. 3 加法原理

256	考点 2.4.4 二项式定理
259	易错解读
260	经典训练
261	(二) 概率与统计初步
261	考点 2.4.5 随机事件与概率
261	考点 2.4.6 等可能事件的概率
264	考点 2.4.7 总体
265	考点 2.4.8 抽样调查
266	考点 2.4.9 统计实习
268	创新探究
270	经典训练
271	能力提升
272	五、数与运算 复数初步
272	考点 2.5.1 数的概念的扩展
273	考点 2.5.2 复数的概念
274	考点 2.5.3 复平面
276	考点 2.5.4 复数的四则运算
279	考点 2.5.5 实系数一元二次方程的解
281	易错解读
281	创新探究
282	经典训练
283	能力提升
284	参考答案与提示

第一章 高考数学综合解读

一、高考数学考试性质与指导思想

高考(National Matriculation Test),一般指新中国的高等教育入学考试,全称为全国普通高等学校招生统一考试.到目前为止,有普通高等学校招生考试、自学考试和成人高考三种形式.一般的“高考”是指前一种.全国普通高等学校招生统一考试的定义是:合格的高中毕业生和具有同等学力的考生参加的选拔性考试.高等学校根据考生成绩,按已确定的招生计划,德、智、体全面衡量,择优录取.因此,高考应具有较高的信度、效度,必要的区分度和适当的难度.目前,我国高考录取以省为单位.高考是考生进入大学和选择大学资格的标准,是国家考试之一,是由国家统一组织调度,国家或省专门组织命题,统一时间(部分省市考试科目较多,结束时间稍晚)考试.高考成绩并不影响高中学生的毕业和毕业证书的发放.

新中国成立以来,高等学校招生考试经历多次变革.

1949年高等学校单独招生.1949年之前,中国各所大学招生考试的时间由学校决定,并不是同时举行,学生可以根据自己的实力和时间安排去不同的大学进行多次高考.

1950年同一地区高校联合招生.

1951年以全国大行政区范围统一招生.

1952年全国统一招生.

1966年“文化大革命”开始,废除高考,高校停止招生.

1971年高等学校逐步举办试办班,恢复招生.招收的新生初中毕业即可,但须经过两年以上劳动锻炼,废除招生考试,改为“自愿报名,群众推荐,领导批准,学校复审”.工农兵大学生由此出现.

1977年10月12日,国务院批转教育部《关于1977年高等学校招生工作的意见》,正式恢复高等学校招生统一考试的制度.据统计,当年的报考人数570万,录取人数27万,录取率4.7%.

1985年以后,高考改革的总体趋势向减少高考科目方向发展.先是将理科7门、文科6门各减为“3+2”,共5门,上海则实行“3+1”方案,同年,国家教委决定在北京大学等43所高等学校进行招收保送生的试点.

经当时的教育部批准,上海获得了高考命题权,试行由上海建立考试机构单独组织命题、考试的办法,首次出现了“上海卷”.

1987年,上海在高中会考基础上,自行命题并试行“3+1”方案.

1994年,上海高考“3+1”方案中新增地理、生物科目选择.

2000年,上海地区新增“春季高考”.自2000年起,中国教育部开始在北京、上海、内蒙古及安徽等地方试行春季高考制度,如效果良好,将会在全国推广.但实际效果并不尽如人意.首先,参与春季高考招生的学校并不多,本科学历以上(尤其是全国重点)高等学校参与的比例很低,考生参与春季高考的热情不高,近几年考生人数逐年递减,2005年便有省市宣布退出举办春季高考.目前,上海是唯一坚持春季高考的省(市).

2001年,全国取消高考考生年龄和婚否限制.2001年7月上海高考科目改革为“3+X”;报考本科院校为“3+综合+1”;报考高职、高专为“3+综合”.

“3+1+X”是上海市引入综合科目后实施至今的高考制度.“3”即“语文、数学、外语”,“1”为“政治、历史、地理、物理、化学、生物”6门学科中学生根据自己兴趣和特长任选一门.“X”为“理科综合考试”或“文科综合考试”,与“1”相对应(政治、历史、地理考生参加“文科综合考试”,物理、化学、生物考生参加“理科综合考试”),折算为30分之后计入总分(其他科目为150分).

全国普通高等学校招生统一考试命题指导思想是:

有助于高等学校选拔新生,有助于中学实施素质教育,有助于培养创新精神与实践能力和实践能力.命题以上海市中小学(幼儿园)课程教材改革委员会办公室颁发的上海市中学各科课程标准(征求意见稿或试行稿,即“二期课改”课程标准)为依据,考查的能力目标以课程标准的培养目标为依据,涉及的知识不超过课程标准,注重学科能力和素质的考查;试题设计强调理论联系实际,注重考查考生分析问题和解决问题的能力.

在考查基础知识的同时,注重考查学生运用知识的能力.基础部分约占70%,有一定深度的部分约占30%.

上海高考数学科命题的指导思想是“三个有助于”,即:有助于高等学校选拔新生;有助于中学实施素质教育以及对学生创新精神与实践能力的培养;有助于中学数学教学活动的开展.

解读:有助于高等学校选拔新生,要求高考数学科试卷具有较好的区分度,能让一本、二本、三本和高职高专等各级别学校录取到合适的新生,让一本院校中的全国顶尖大学、985教育部直属大学、211大学等选拔到合格的新生;有助于中学实施素质教育以及对学生创新精神与实践能力的培养,则要求高考数学科试卷坚持能力立意,必须有一部分以考查学生的分析问题解决问题的能力、考查学生的数学探究与创新能力为主的题目,而这些题目通过死记硬背、或者题海战术是不可能奏效的;有助于中学数学教学活动的开展,要求高考数学科试卷必须立足于课程标准与教材,不能超纲,不能增加学生负担.高考数学科试卷对中学数学教学具有一定的引导作用,内容覆盖应尽量全面,以避免中学数学教学中抓重点而忽视全面教学的现象.各部分考查内容在试卷中所占分值大体与教学时数所占比例相当.高考数学科的平均成绩,也是对中学数学教育的一个检测指标,不能太偏离广大师生的心理预期.

二、高考数学考试的内容与目标

自1998年上海“二期课改”进行试点以来,“二期课改”的理念一直左右着高考数学上海卷.2006年以后的连续三年(即:2006年、2007年和2008年)是新旧两种教材共用的三年,高考数学上海卷对它们的公共部分进行考查.2009年,高考数学上海卷首次实现了真正意义上的“二期课改”的考查,所有学校均用统一的标准、统一的教材和统一的考试手册,相对于“一期课改”的教材,“二期课改”教材中传统内容部分的要求大都略有降低,这些体现了“‘二期课改’要改变课程内容繁、难、偏、旧和脱离学生实际的现状”的课改精神.同时,“二期课改”对课程内容进行了取舍,重点和体系结构均有所调整,新增了一些教学内容,如函数的零点、矩阵和行列式初步、算法初步、用平面向量知识来处理坐标平面上的直线、概率与统计初步的要求略有提高,立体几何新增了过去曾经是高中数学内容的旋转体.

高考数学上海卷的测试目标是,考查考生的数学基本知识和基本技能、逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力、分析问题与解决问题的能力,数学探究与创新能力等.

近年来,在坚持“既有利于高校选拔合格的新生,又有利于推进中学素质教育”,在实现教育部关于高考改革、提倡培养学生的创新精神和实践能力等方面的原则下,形成了高考数学上海卷命题的基本思路.

1. 命题理念从知识立意转向能力立意

为了全面推进素质教育,有利于二期课程教材改革,几年来,高考数学上海卷的命题理念发生了深刻的变化,从知识立意转向能力立意.把具有发展能力价值的、富有发展潜力的、再生性强的能力、方法和知识作为考查的切入点,从测量学生的发展性学力和创造性学力着手,突出能力的要求,淡化知识结构的完整性和系统性,全面评价学生的素质.摒弃了许多烦琐公式的记忆、陈旧的“基础知识”,毫无意义的思维“体操”,着重考查学生的运算能力、思维能力、空间想象能力、学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力.淡化知识覆盖率,强调基本方法、注重知识的理解和联系.不求知识点面面俱到,但求能力要求逐步到位;不追求试题的知识容量和解题技巧,而强调试题的思维质量和所用的基本方法.

2. 重点探索四种能力的考查

在重视考查思维能力、运算能力和空间想象能力的基础上,进一步把考查学生学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力作为主攻方向,进行重点的突破,使数学试卷从内容到形式都发生了显著的变化.试题中有许多探索性试题和开放性试题,让学生充分发挥自己平时对数学能力的积累,做出各种不同的答案.特别在一些运用联想、类比或推广的手段,提出具有创新结论的试题中,学生可以在直觉思维、形象思维、发散思

维、辩证思维和逻辑思维的广阔舞台上, 发挥他们的“表演”才能, 锻炼实践和探索能力, 培养质疑、求异和创新思维, 充分体现开拓进取、探索创新的价值.

3. 形成了能力立意的试卷框架

根据知识立意转向能力立意的指导思想, 通过几年来不断的实践和总结, 逐步形成以能力为主线、方法为核心、知识为基础的高考数学试卷的框架.

(1) 考查学习新的数学知识的能力

设计一些学生以前没有学习过, 但符合学生认知水平的数学概念、定理、公式和法则, 让他们通过阅读理解, 并运用它们作进一步的运算和推理, 解决问题, 测试学生通过独立自主学习, 获取新的数学知识的能力.

例 1 (山东) 已知函数 $y=f(x)(x \in \mathbf{R})$. 对函数 $y=g(x)(x \in I)$, 定义 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 的“对称函数”为 $y=h(x)(x \in I)$, $y=h(x)$ 满足: 对任意 $x \in I$, 两个点 $(x, h(x))$, $(x, g(x))$ 关于点 $(x, f(x))$ 对称. 若 $h(x)$ 是 $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ 关于 $f(x)=3x+b$ 的“对称函数”, 且 $h(x)>g(x)$ 恒成立, 则实数 b 的取值范围是_____.

【解析】 由已知得 $\frac{h(x)+\sqrt{4-x^2}}{2}=3x+b$, 所以, $h(x)=6x+2b-\sqrt{4-x^2}$, $h(x)>g(x)$ 恒成立即 $6x+2b-\sqrt{4-x^2}>\sqrt{4-x^2}$, $3x+b>\sqrt{4-x^2}$ 恒成立.

在同一坐标系内, 画出直线 $y=3x+b$ 及半圆 $y=\sqrt{4-x^2}$ (如图 1-1 所示), 当直线和上半圆相切时, 圆心到直线的距离 $d=\frac{|b|}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{10}}=2$, 即 $|b|=2\sqrt{10}$, 所以 $b=2\sqrt{10}$ 或 $-2\sqrt{10}$ (舍去), 即使 $h(x)>g(x)$ 恒成立, 则 $b>2\sqrt{10}$, 故答案为 $(2\sqrt{10}, +\infty)$.

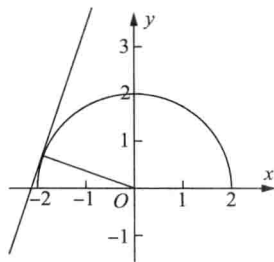


图 1-1

(2) 考查探究数学问题的能力

设计下列几类问题:

- ① 根据所提供的信息, 寻找问题的规律、图形的位置关系或数量关系.
- ② 给出条件, 探究相应的结论.
- ③ 给出结论, 探究结论成立的条件.
- ④ 探索结论是否成立或符合条件的数学对象是否存在.

测试学生运用学过的数学知识, 通过观察、试验、联想、类比、演绎、归纳、分析、综合、猜想等思维形式, 对数学问题进行探索和研究的能力.

例 2 (全国新课标 I) 若 $a>0, b>0$, 且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

- (1) 求 a^3+b^3 的最小值;

(2) 是否存在 a, b , 使得 $2a+3b=6$? 并说明理由.

【解析】(1) 由 $\sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$, 得 $ab \geq 2$, 且当 $a=b=\sqrt{2}$ 时等号成立,

故 $a^3+b^3 \geq 3\sqrt{a^3 \cdot b^3} = 4\sqrt{2}$, 且当 $a=b=\sqrt{2}$ 时等号成立,

所以 a^3+b^3 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(2) 由 $6=2a+3b \geq 2\sqrt{6ab}$, 得 $ab \leq \frac{3}{2}$, 又由(1)知 $ab \geq 2$, 二者矛盾,

所以不存在 a, b , 使得 $2a+3b=6$ 成立.

(3) 考查应用数学知识解决实际问题的能力

设计一些实际问题, 测试学生理解问题背景, 分析给出的有关信息, 并能进行提炼、加工, 找出它们的数量关系, 建立数学模型, 从而检测学生解决实际问题的能力.

 **例 3** (湖北) 某项研究表明: 在考虑行车安全的情况下, 某路段车流量 F (单位时间内经过测量点的车辆数, 单位: 辆/小时) 与车流速度 v (假设车辆以相同速度 v 行驶, 单位: 米/秒)、平均车长 l (单位: 米) 的值有关, 其公式为 $F = \frac{76000v}{v^2 + 18v + 20l}$.

(1) 如果不限定车型, $l=6.05$, 则最大车流量为多少辆/小时?

(2) 如果限定车型, $l=5$, 则最大车流量比(1)中的最大车流量增加多少辆/小时?

【解析】(1) 依题意知, $l > 0, v > 0$, 所以当 $l=6.05$ 时,

$$F = \frac{76000v}{v^2 + 18v + 121} = \frac{76000}{v + \frac{121}{v} + 18} \leq \frac{76000}{2\sqrt{v \cdot \frac{121}{v}} + 18} = 1900, \text{ 当且仅当 } v=11 \text{ 时, 取等号.}$$

(2) 当 $l=5$ 时,

$$F = \frac{76000v}{v^2 + 18v + 100} = \frac{76000}{v + \frac{100}{v} + 18} \leq 2000,$$

当且仅当 $v=10$ 时, 取等号, 此时比(1)中的最大车流量增加 100 辆/小时.

(4) 考查数学创新能力

设计一些要求运用类比、推广、归纳等方法探索 and 发现新的数学结论的试题, 测试学生的数学创新能力.

《全国普通高等学校招生统一考试(上海卷)考试手册》对数学学科考试内容和要求、考试细则和题型示例作了明确的表述, 它将作为学校复习和命题人员命题时的共同参照, 遵守的法定文件.

关于考试内容和要求:

从 2009 年秋季高考开始, 在上海市高中数学教学已经全面实行“二期课改”教材的背景下, 原则上根据《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》的内容和要求命题. 结合“二期课改”教材的实施

情况,在考试内容上作了调整(相对于原有内容),2010~2012年高考仍然依次实行:

(1)“子集及其推出关系”“二项式定理”作为文、理科共同要求;“坐标平移”文、理科都不作要求;

(2)对于文科,“工序流程”不作要求;

(3)文、理科共同增加的内容有“矩阵”“二阶、三阶行列式”“二元、三元线性方程组解的讨论”“算法的含义”“程序框图”“圆柱、圆锥和球”;

(4)文科增加的内容有数学与音乐、数学与美术、平行投影与中心投影、三视图;

(5)理科增加的内容有互斥事件的概率、相互独立事件的概率、随机变量的分布及数字特征.

新增加内容的考试要求,根据《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》所列,大多数为记忆性水平或解释性理解水平.为了贯彻“二期课改”精神,对于这部分内容的命题将注重基础且占有相当部分的比例.更完整的考试内容和要求请仔细阅读《全国普通高等学校招生统一考试上海卷考试手册(数学科)》所列的内容和要求.

(6)考试细则对“开放性题解答的评分原则”,试卷形式和答题要求,“试卷框架”等作了明确规定,这些内容均与以往的要求有较大变化.

开放性题解答评分原则的宗旨是,根据不同的能力表现给予不同的评分.即评分时,除了评阅答案是对还是错以外,在结论对的前提下,还应该对其所表现的不同思维层次给予不同的评分,具体评分细则需要根据试题的具体要求,由试卷的评分标准及其阅卷中心组的评分细则确定.

根据《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》,高考数学上海卷对考查内容的要求分以下三个层次:

I级:记忆性水平.其基本特征是:能识别或记住有关的数学事实和材料,使之再认或再现;能在标准的情景中做简单的套用,或者按照示例进行模仿.常用来表述本级要求的行为动词有:知道、了解、认识、感知、识别、初步体会、初步学会等.此级要求最低.

 **例4** (重庆) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称,且图像上相邻两个最高点的距离为 π .

(1)求 ω 和 φ 的值;

(2)若 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ($\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$),求 $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$ 的值.

【解析】 (1) 因为由题可知,周期 $T = \pi$,所以 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} \Rightarrow \omega = 2$,因为 $x = \frac{\pi}{3}$ 为对称轴,所以

$$f\left(\frac{\pi}{3} - \frac{T}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0, \text{ 且 } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{所以 } f(x) = \sqrt{3} \sin 2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \varphi = -\frac{\pi}{6}. \text{ 所以, } \omega = 2, \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \text{ 因为 } f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 所以 } \sqrt{3} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 即 } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}.$$