2014

2014 人大考研

考研数学
真题模拟8套卷（数学二）

主编／胡金德　谭泽光

精编样卷　权威解读——洞悉真卷命题规律
模拟试卷　权威预测——全面揭示命题趋势
高仿真题　权威分析——瞬获考场实战经验
答案精解　权威点拨——专家指点冲刺迷津

中国人民大学出版社

2014

考研数学
真题模拟8套卷
(数学二)

主　编　胡金德　谭泽光

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

2014考研数学真题模拟8套卷. 2/胡金德，谭泽光主编. —北京：中国人民大学出版社，2013.10

ISBN 978-7-300-18277-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①胡… ②谭… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第247251号

2014考研数学真题模拟8套卷（数学二）

主编 胡金德　谭泽光

2014 Kaoyan Shuxue Zhenti Moni 8 Tao Juan(Shuxue Er)

出版发行 中国人民大学出版社

社　　址 北京中关村大街31号　　**邮政编码** 100080

电　　话 010－62511242（总编室）　010－62511398（质管部）

010－82501766（邮购部）　010－62514148（门市部）

010－62515195（发行公司）　010－62515275（盗版举报）

网　　址 http://www.crup.com.cn

http://www.1kao.com.cn(中国1考网)

经　　销 新华书店

印　　刷 涿州市星河印刷有限公司

规　　格 370mm×260mm　8开本　　**版　　次** 2013年11月第1版

印　　张 10.25　　**印　　次** 2013年11月第1次印刷

字　　数 154 000　　**定　　价** 18.00元

前　　言

本套试卷是专门为参加全国硕士研究生入学统一数学考试的考生在考前冲刺阶段复习而设计的辅导用书。本书针对考生在前期复习阶段可能遗留的问题，按照考研真题的题型、题量和难度，结合今年的最新考研数学大纲，为广大考生精心编排了一整套实战模拟训练。希望广大考生在复习的最后阶段，能够对考研真题有更加精确的认识，同时做一次最终的查缺补漏，从而更加从容地面对接下来的考试，取得优异的成绩。

本书共有 8 套试题。其中，前 4 套是考研真题，题目选自 2000—2013 年考研数学真题，主要根据近年来考研数学的命题特点和命题趋势，并结合最新的考研数学大纲，精心选题，以加深考生对考研数学的命题特点的理解与把握。

后 4 套是模拟试题，紧扣考研真题的体例和格式，结合近年来考研数学中的热点和难点进行编写，旨在让考生对前期的复习工作做一次汇总检测，真正做到知己知彼，成竹在胸。

强烈建议同学们将每套试题都当作真正的考研试题一样，严格把控时间，独立完成，切勿边做题边对答案。只有这样才能真正达到实战模拟的效果。

最后，祝愿每一位考生都能不负努力，考取理想的学府。

编　者
2013 年 9 月

目　　录

2014

考研数学
真题模拟8套卷
(数学二)

主　编　胡金德　谭泽光

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

2014 考研数学真题模拟 8 套卷. 2/胡金德,谭泽光主编. —北京:中国人民大学出版社,2013.10

ISBN 978-7-300-18277-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①胡… ②谭… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 247251 号

2014 考研数学真题模拟 8 套卷(数学二)
主编 胡金德 谭泽光
2014 Kaoyan Shuxue Zhenti Moni 8 Tao Juan(Shuxue Er)

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242(总编室)		010－62511398(质管部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国 1 考网)		
经　销	新华书店		
印　刷	涿州市星河印刷有限公司		
规　格	370mm×260mm　8 开本	**版　次**	2013 年 11 月第 1 版
印　张	10.25	**印　次**	2013 年 11 月第 1 次印刷
字　数	154 000	**定　价**	18.00 元

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点 ________
________ 考场 ______ 号
归属区县 ________
（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

模拟试题(一)

评分	评卷人

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为　　(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 无穷多个.

(2) 如图1-1，曲线方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于　　(　　)

(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 的面积.

(D) 三角形 ACD 的面积.

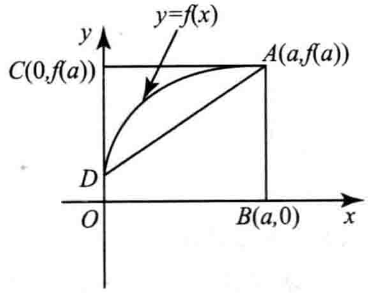


图 1-1

(3) 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的　　(　　)

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

(4) 设 m,n 均是正整数，则反常积分 $\int_0^1 \dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性　　(　　)

(A) 仅与 m 的取值有关.　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 的取值都有关.　　(D) 与 m,n 的取值都无关.

(5) 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为　　(　　)

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

(B) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

(C) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

(6) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二重积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于　　(　　)

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\c_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\c_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\c_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\c_4\end{bmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为　　(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(8) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则　　(　　)

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

评分	评卷人

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为________．

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=1$，则 $k=$ ________．

(11) 曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$ ________．

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ________．

(13) 设曲线的极坐标方程为 $\rho=\mathrm{e}^{a\theta}(a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从0变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为________．

(14) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$ ________．

评分	评卷人

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$,记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若当 $x\to 0$ 时,$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小,求 k.

(16)(本题满分 10 分)

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$,其中 f 具有 2 阶连续偏导数,求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(17)(本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{\frac{-x}{2a}}$ $(a>1,0\leqslant x<+\infty)$下方、$x$ 轴上方的无界区域.

(Ⅰ)求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,$V(a)$ 最小?并求此最小值.

(18)(本题满分 10 分)

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大和最小值.

密 封 线 内 不 要 答 题

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求此极限.

(20)（本题满分 10 分）

某种飞机在机场降落时，为了减小滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下来.

现有一质量为 9 000 kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^6$）. 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？（注：kg 表示千克，km/h 表示千米 / 小时.）

(21)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$. 证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a\\1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & b\end{bmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(23)（本题满分 11 分）

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量；

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

密 封 线 内 不 要 答 题

注意：
因以下项目填写不清
而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试
地点________
____考场____号
归属
区县________
（领准考证的区县）

（密封线内不要答题）

模拟试题（二）

评分	评卷人

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为　（　）

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdot\cdots\cdot(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$　（　）

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　(D) $(-1)^n n!$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}=$　（　）

(A) $\int_1^2\ln^2 x\,dx$.　(B) $2\int_1^2\ln x\,dx$.

(C) $2\int_1^2\ln(1+x)\,dx$.　(D) $\int_1^2\ln^2(1+x)\,dx$.

(4) 微分方程 $y''-\lambda^2 y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}\ (\lambda>0)$ 的特解形式为　（　）

(A) $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.　(B) $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.

(C) $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.　(D) $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

(5) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant e\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛，则　（　）

(A) $\alpha<-2$.　(B) $\alpha>2$.

(C) $-2<\alpha<0$.　(D) $0<\alpha<2$.

(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图 2-1：

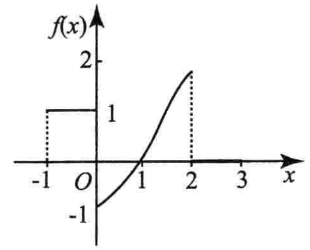
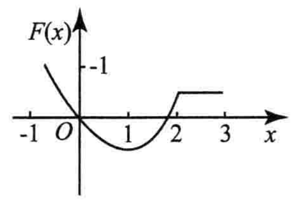
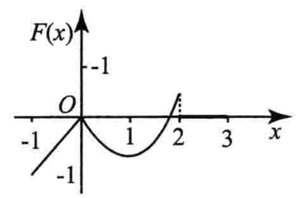


图 2-1

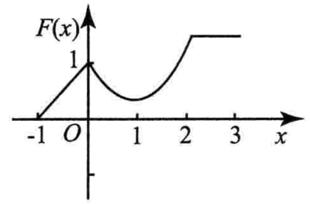
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为　（　）



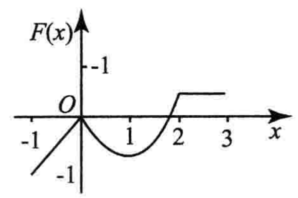
(A)



(B)



(C)



(D)

(7) 设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，下列命题正确的是　（　）

(A) 若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\leqslant s$.

(B) 若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$.

(C) 若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\leqslant s$.

(D) 若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$.

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为　（　）

(A) $a=0,b=2$.　(B) $a=0$，b 为任意常数.

(C) $a=2,b=0$.　(D) $a=2$，b 为任意常数.

评分	评卷人

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=\pi}=$ ________ .

(10) 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________ .

(11) 函数 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$,其中函数 $f(u)$ 可微,则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(12) 曲线$\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$上对应于 $t=1$ 点处的法线方程为________ .

(13) 设平面区域 D 由 $y=x$,圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成,则二重积分$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$ $=$ ________.

(14) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=3$, $|\boldsymbol{B}|=2$, $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

评分	评卷人

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分,请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$.设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$,试求 α 的取值范围.

(16)(本题满分 10 分)

求积分$\int_0^1\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f'(0)=1$,函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定.设 $z=f(\ln y-\sin x)$,求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$,$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

密 封 线 内 不 要 答 题

(18)(本题满分 11 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

(20)(本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图 2-2 中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲面由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$，$x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.

(Ⅰ)求容器的容积；

(Ⅱ)若将容器内的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功?

(长度单位为 m；重力加速度为 $g\,\mathrm{m/s^2}$；水的密度为 $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$)

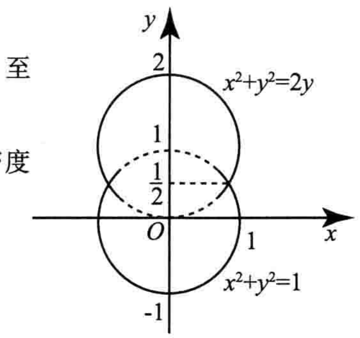


图 2-2

(21)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D:\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解.

（Ⅰ）求 λ, a；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(23)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

注意：
因以下项目填写不清
而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点________

________考场______号

归属区县________

（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

模拟试题(三)

评分	评卷人

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\cos x - 1 = x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)| < \dfrac{\pi}{2}$，则当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 (　　)

(A) 比 x 高阶的无穷小.　　(B) 比 x 低阶的无穷小.

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小.　　(D) 与 x 等价的无穷小.

(2) 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为 (　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f(0) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ (　　)

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.　　(C) $f'(0)$.　　(D) 0

(4) 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a\ln x\,(a \neq 0)$ 相切，则 $a =$ (　　)

(A) $4e$.　　(B) $3e$.　　(C) $2e$.　　(D) e.

(5) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0) > 0$，$g(0) < 0$，并且 $f'(0) = g'(0) = 0$，那么函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 (　　)

(A) $f''(0) < 0, g''(0) > 0$.　　(B) $f''(0) < 0, g''(0) < 0$.

(C) $f''(0) > 0, g''(0) > 0$.　　(D) $f''(0) > 0, g''(0) < 0$.

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x) > 0$，令 $u_n = f(n)\,(n = 1, 2, \cdots)$，则下列结论正确的是 (　　)

(A) 若 $u_1 > u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.

(B) 若 $u_1 > u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1 < u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.

(D) 若 $u_1 < u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为2阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}| = 2$，$|\boldsymbol{B}| = 3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 (　　)

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$.

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ (　　)

(A) 合同，且相似.　　(B) 合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似.　　(D) 既不合同，也不相似.

评分	评卷人

二、填空题：9～14小题，每小题4分. 共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $\begin{cases} x = \displaystyle\int_0^{1-t} e^{-u^2}\,du \\ y = t^2\ln(2 - t^2) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

(10) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2} + \dfrac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n^2}\right) =$ ________.

(11) 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) =$ ________.

(12) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$，$y_2 = e^x - xe^{2x}$，$y_3 = -xe^{2x}$ 是某2阶常系数非齐次线性微分方程的3个解，则该方程满足条件 $y\big|_{x=0} = 0$，$y'\big|_{x=0} = 1$ 的解 $y =$ ________.

(13) 曲线 $y = x^2 + x\,(x < 0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________.

(14) 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为3维列向量，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} =$ ________.

评分	评卷人

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分,请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

求$\int\dfrac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

(17)(本题满分 10 分)

如图 3-1,C_1 和 C_2 分别是 $y=\dfrac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图象,过点$(0,1)$的曲线 C_3 是一单调增函数的图象. 过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$;C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$,求曲线 C_3 的方程$x=\varphi(y)$.

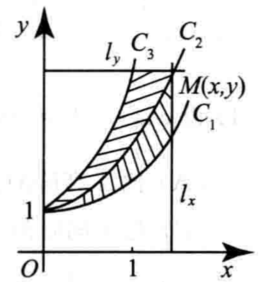


图 3-1

(18)(本题满分 10 分)

求二重积分$\iint\limits_D\max(xy,1)dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

密 封 线 内 不 要 答 题

密 封 线 内 不 要 答 题

(19)(本题满分 11 分)

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

(20)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ)若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(22)(本题满分 11 分)

确定常数 a,使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 11 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

密封线内不要答题

注意:
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点 ______________

______ 考场 ______ 号

归属区县 ______________

(领准考证的区县)

(密封线内不要答题)

模拟试题(四)

评分	评卷人

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为 ( )

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则 ( )

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$. (B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$. (D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

(3) 设 $f(x)$ 是奇函数,除 $x=0$ 外处处连续,$x=0$ 是其第一类间断点,则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是 ( )

(A) 连续的奇函数.

(B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数.

(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图4-1所示,则 $f(x)$ 有 ( )

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.

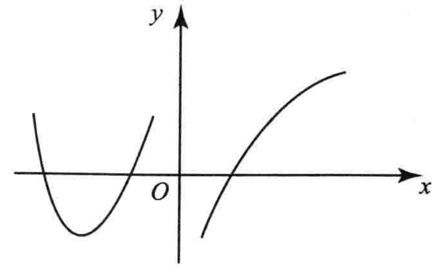


图 4-1

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是 ( )

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

(6) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充要条件是 ( )

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$,且 $\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第2列加到第1列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第2行与第3行得单位矩阵,记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$ ( )

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$. (B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$. (C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$. (D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是4阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

评分	评卷人

二、填空题:9～14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 3阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$ ______.

(10) 已知函数 $f(x)$ 连续,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos(xf(x))}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$,则 $f(0)=$ ______.