高等院校教材同步辅导
及考研复习用书

理工社®

线性代数辅导

同济·六版

张天德◎主编

·同济六版·
全新升级

年销量8万册《线性代数辅导》

考点图解+题型归总+真题精讲+习题全解

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等院校教材同步辅导
及考研复习用书

理工社

线性代数辅导

同济·六版

张天德◎主编
董新梅、尹爱芹◎副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

线性代数辅导：同济六版/张天德主编. —北京 ：北京理工大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-5682-0233-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 017469 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 彩虹印刷有限公司
开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 / 17.75
字　　数 / 318 千字
版　　次 / 2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 / 26.80 元

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前 言

线性代数是理工类专业的一门重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《线性代数》是一部深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材。为了帮助读者学好线性代数，我们编写了《线性代数辅导(同济六版)》，该书与同济大学数学系主编的《线性代数(第六版)》配套，汇集了编者几十年的丰富经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中。本书将会成为读者学习线性代数的良师益友。

本书的章节划分和内容设置与同济大学数学系主编的《线性代数(第六版)》教材完全一致。在每一章的开头先对本章知识进行简要的概括，然后用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

讲解结构六大部分

一、知识结构　用结构图解的形式对每节涉及的基本概念、基本定理和基本公式进行系统的梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需要注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、考点精析　分类总结每章重点题型以及重要定理，使读者能更扎实地掌握各个知识点，最终提升读者应试能力。

三、例题精解　这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题及全国大学生数学竞赛试题研究的经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研和数学竞赛中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量精选例题深入讲解，使读者扎实掌握每一个知识点，并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动，一举突破，从而获得实际应用能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”“方法点击”，更是巧妙点拨，让读者举一反三、触类旁通。

四、本章知识总结　对本章所学的知识进行系统的回顾，帮助读者更好地复习、总结、提高。

五、本章同步自测　精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年研究生入学考试和大学生数学竞赛试题)，以此检测、巩固读者所学知识以达到提高应试水平的目的。

六、教材习题全解　为了方便读者对课本知识进行复习巩固，对教材课后习题作详细解答，这与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，本书对部分有代表

性的习题设置了“思路探索”，以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；本书安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。针对部分习题，还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维的能力。

内容编写三大特色

一、重新修订、内容完善　本书是《线性代数辅导(同济五版)》的最新修订版，前一版在市场上受到了广大学子的欢迎，每年销量都在 8 万册以上。这次修订增加了大学生数学竞赛试题，更新了研究生入学考试试题，改正了原来的印刷错误，使其内容更加完善，体例更为合理。

二、知识清晰、学习高效　知识点讲解清晰明了，分析透彻到位，既有对重点及常考知识点进行归纳，同时又对基本题型的解题思路、解题方法和答题技巧进行了深层次的总结。据此，读者不仅可以从全局上对章节要点有整体性的把握，更可以纲举目张，系统地把握数学知识的内在逻辑性。

三、联系考研、经济实用　本书不仅是一本教材同步辅导书，也是一本不可多得的考研复习用书，书中内容与研究生入学考试联系紧密。在知识全解版块设置“考研大纲要求”版块，例题精解和自测题部分选取大量考研真题，让读者在同步学习中完成考研的备考。

本书由张天德任主编，董新梅、张锋、吕洪波任副主编。衷心希望我们的这本《线性代数辅导(同济六版)》能对读者有所裨益。由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，不足之处敬请读者批评指正，以便不断完善。

张天德

目　　录

教材知识全解

教材习题全解

教材知识全解

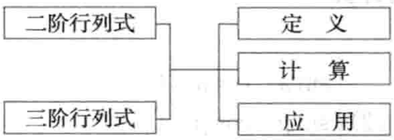
第一章 行列式

行列式是整个线性代数的基础，它要求我们在概念上要清晰，运用时要灵活，对知识的衔接与内在联系要掌握好. 一方面，要掌握行列式的计算方法，另一方面，要注意行列式与其他数学知识的结合. 本章的重点是行列式的计算，要学会利用行列式的性质及按行(列)展开等基本方法来简化行列式的运算，并掌握两行(列)交换、某行(列)乘数、某行(列)加上另一行(列)的 k 倍这三类运算.

第一节 二阶与三阶行列式

知识全解

【知识结构】



【考点精析】

1. 二阶与三阶行列式定义.

名称	定义	备注
二阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$	①行列式从本质上讲就是一个数； ②注意在行列式展开过程中各项的正负号是否正确
三阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$	

2. 二阶行列式的应用.

问题	应用	说明
解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$	记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$	这个应用推广到一般情况就是克拉默法则(第二章第四节)

3. 对应习题.

习题一第 1 题(教材 P_{21}).

例题精解

基本题型Ⅰ:二阶行列式的计算

例 1 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 1 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$.

【解析】 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1\times3-2\times(-1)=5$;

(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 1 & x^2-x+1 \end{vmatrix}=(x+1)(x^2-x+1)-x=x^3-x+1$.

【方法点击】 二阶行列式可由定义直接计算.读者应熟练掌握二阶行列式的定义.

基本题型Ⅱ:三阶行列式的计算

例 2 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin v & \cos v & 1 \end{vmatrix}$.

【解析】 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}=2\times1\times(-1)+1\times0\times3+1\times1\times(-7)-1\times1\times3-1\times1\times(-1)-2\times0\times(-7)=-11$;

(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin v & \cos v & 1 \end{vmatrix}=\sin\alpha\cos\beta+\sin v\cos\alpha+\sin\beta\cos v-\sin v\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos v$

$=\sin(\alpha-\beta)+\sin v(\beta-v)+\sin(v-\beta)$.

【方法点击】 三阶行列式可利用对角线法则直接计算.读者应熟练掌握三阶行列式的定义,并要特别注意各项的正负号.

基本题型Ⅲ:二阶、三阶行列式的应用

例 3 用行列式解线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2=3, \\ 3x_1-4x_2=-2. \end{cases}$

【解析】 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=1\times(-4)-(-2)\times3=2\neq0$,

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & -4\end{vmatrix}=3\times(-4)-(-2)\times(-2)=-16,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1\times(-2)-3\times3=-11,$$

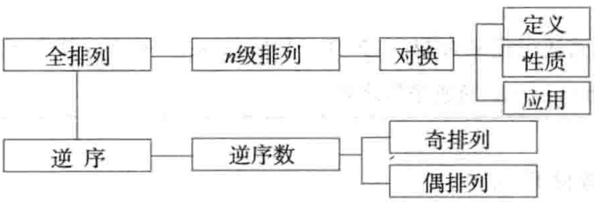
所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{16}{2}=-8, x_2=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{11}{2}$.

【方法点击】 本题是行列式的一个初步应用.读者应注意观察 D, D_1, D_2 与方程组系数的对应关系,找出其规律.事实上,此规律可推广到更高阶线性方程组,读者在后面的章节中将会学到.

第二节 全排列和对换

知识全解

【知识结构】



【考点精析】

1. 全排列.

概念	n 个不同元素排成一列,称为 n **个元素的全排列**
特例	n 个自然数的排列
所有排列种数	$P_n=n!$

2. 逆序数.

名称	内容	备注
逆序	排列中的某两个元素的先后次序与标准次序(规定的)不同,就说有一个**逆序**	常用标准次序是从小到大
逆序数	一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中所有逆序的总和称为这个**排列的逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$	τ 为奇数,称为奇排列;τ 为偶数,称为偶排列

续表

名称	内容	备注
逆序数公式	(1)**第一种算法**:$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=$(i_2 前面比 i_2 大的数的个数)+(i_3 前面比 i_3 大的数的个数)+…+(i_n 前面比 i_n 大的数的个数); (2)**第二种算法**:$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=$(i_1 后面比 i_1 小的数的个数)+(i_2 后面比 i_2 小的数的个数)+…+(i_{n-1}后面比 i_{n-1}小的数的个数)	

3. 对换.

定义	在排列中,将任意两个元素对换,其余不动,称为**对换**
性质	一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性
	奇排列变成标准排列的对换次数为**奇数**;偶排列变成标准排列的对换次数为**偶数**
应用	n 阶行列式也可定义为 $D=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$,其中 τ 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数
	n 阶行列式还可定义为 $D=\sum(-1)^{\tau}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,其中 τ 为行标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数之和

4. 对应习题.

习题一第 2 题(教材 P_{21}).

例题精解

基本题型Ⅰ:逆序数的求法

例 1 求下列排列的逆序数:

(1)134782695; (2)987654321.

用第一种算法

3 4 7 8 2 6 9 5

【解析】 (1)$\tau(134782695)=0+0+0+0+4+2+0+4=10$;

用第二种算法

9 8 7 6 5 4 3 2

(2)$\tau(987654321)=8+7+6+5+4+3+2+1=36$.

【方法点击】 求逆序数一般按上面给出的公式依次来算,对初学者来说,可按本例给出的虚线对应,以避免出错.通过本题,读者应充分理解逆序和排列的逆序数的定义,并掌握求排列的逆序数所常用的两种方法.

例2 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1)$n \quad (n-1) \cdots 2 \quad 1$;　(2)$1 \quad 3 \cdots (2n-1) \quad 2 \quad 4 \cdots (2n)$;

(3)$1 \quad 3 \quad 5 \cdots (2n-1) \quad (2n) \quad (2n-2) \cdots 4 \quad 2$.

【解析】 (1)由第一种计算法,有

$$\tau(n \quad (n-1) \cdots 2 \quad 1)=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

对$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性判断,需按以下情况进行讨论:

请注意:为什么要分四种情况而不是两种?

当 $n=4k$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$为偶数;

当 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$为偶数;

当 $n=4k+2$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$为奇数;

当 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$为奇数;

因此,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,此排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,此排列为奇排列($k\in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$).

(2)由第二种计算法,排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$之间不构成逆序,后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$之间也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序,因此

$$\tau(1 \quad 3 \quad 5 \cdots (2n-1) \quad 2 \quad 4 \quad 6 \cdots (2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

由(1)可知,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,此排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,此排列为奇排列($k\in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$).

(3)由第二种计算法,有

$$\begin{aligned}\tau(1 \quad 3 \quad 5 \cdots (2n-1) \quad (2n) \quad (2n-2) \cdots 4 \quad 2)&=0+1+\cdots+n-1+n-1+\cdots+1+0\\&=n(n-1).\end{aligned}$$

因为对任意 $n\in \mathbf{Z}^+$,$n(n-1)$均为偶数,故所给排列为偶排列.

基本题型Ⅱ:求抽象排列的逆序数

例3 设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为k,则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?

【解析】 在 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中,任选两个元素 x_i,x_j,则 x_i 与 x_j 必然在排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 和排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中的一个排列中构成逆序,所以,这两个排列的逆序数之和等于从 n 个元素中取两个元素的组合数,即 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$,于是

$$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\frac{n(n-1)}{2}-\tau(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)=\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

【方法点击】 通过考查 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中逆序与 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中逆序之间的关系,加深对逆序及排列逆序数的理解.

第三节　n 阶行列式的定义

知识全解

【知识结构】

- n阶行列式
  - 定义
  - 特殊行列式
    - 对角行列式
    - 上三角形行列式
    - 下三角形行列式

【考点精析】

1. n 阶行列式.

名称	定义	理解
n 阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$	①τ 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数；②n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的元素之积的代数和

2. 几种特殊行列式

名称	定义
对角行列式	$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
副对角行列式	$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
下三角形行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$
上三角形行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

3. 对应习题.

习题一第 3 题和第 7 题(教材 $P_{21\sim22}$).

例题精解

基本题型Ⅰ:求行列式中项的符号

例 1 若 $a_{i1}a_{2k}a_{13}a_{m2}$是四阶行列式中的项,则 i,k,m 应为何值?此时该项的符号是什么?

【解析】 由行列式定义知,四阶行列式的每一项是取自不同行不同列的四个元素之积,所以 $k=4$,且有 $i=3,m=4$ 或 $i=4,m=3$.

当 $i=3,m=4,k=4$ 时,所给项按元素的行标为自然顺序改写为 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$,列标构成的排列为 3412,其逆序数为 4. 所以,此时该项的符号为正.

当 $i=4,m=3,k=4$ 时,所给项按元素的行标为自然顺序改写为 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$,列标构成的排列为 3421,其逆序数为 5. 所以,此时该项的符号为负.

基本题型Ⅱ:利用定义计算含零元素较多的行列式

例 2 用 n 阶行列式的定义直接计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} (其中 a_i\neq0,i=1,2,\cdots,n).$$

【解析】 由于该行列式中每一行及每一列只有一个非零元素,由 n 阶行列式定义知,D_n 只含一项 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$,其中元素的下标正好是它们所在行的下标,恰好按自然序排列,而它们所在列的下标构成的排列为

$$(n-1)\quad(n-2)\cdots 2\ 1\ n,$$

其逆序数为 $\tau=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. 故 $D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$.

例 3 证明:$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

【证明】 根据行列式的定义,项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

行列式的第 1 行只有 a_{1n}为非零元,第 2 行除 $a_{2,n-1}$和 a_{2n}外全为零,故第 2 行只能取 $a_{2,n-1}$,…,第 n 行只能取 a_{n1},则行列式只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$这一项为非零元,而这一项的列下标所成的排列的逆序数为

$$\tau(n\quad(n-1)\cdots 2\quad 1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

于是 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$

【方法点击】 计算含零较多的行列式时，通常是先按定义写出其一般项，然后结合所给行列式元素的特点分析列下标的可能取值，再进行计算.

例 4 证明：(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0$；

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

【证明】 (1)由行列式定义知，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5},$$

若 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5} \neq 0$，由题设知 j_3, j_4, j_5 只能等于 4 或 5，从而 j_3, j_4, j_5 中至少有两个相等，这与 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 是 1,2,3,4,5 的一个全排列矛盾，故 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5} = 0$，于是 $D=0$.

(2)由行列式定义知，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

由题设，要使 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4} \neq 0$，必须 j_1, j_2 取 1 或 2，而 $j_1j_2j_3j_4$ 是 1,2,3,4 的一个全排列，故 j_3, j_4 取 3 或 4，于是

$$D = (-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + (-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + (-1)^{\tau(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43},$$