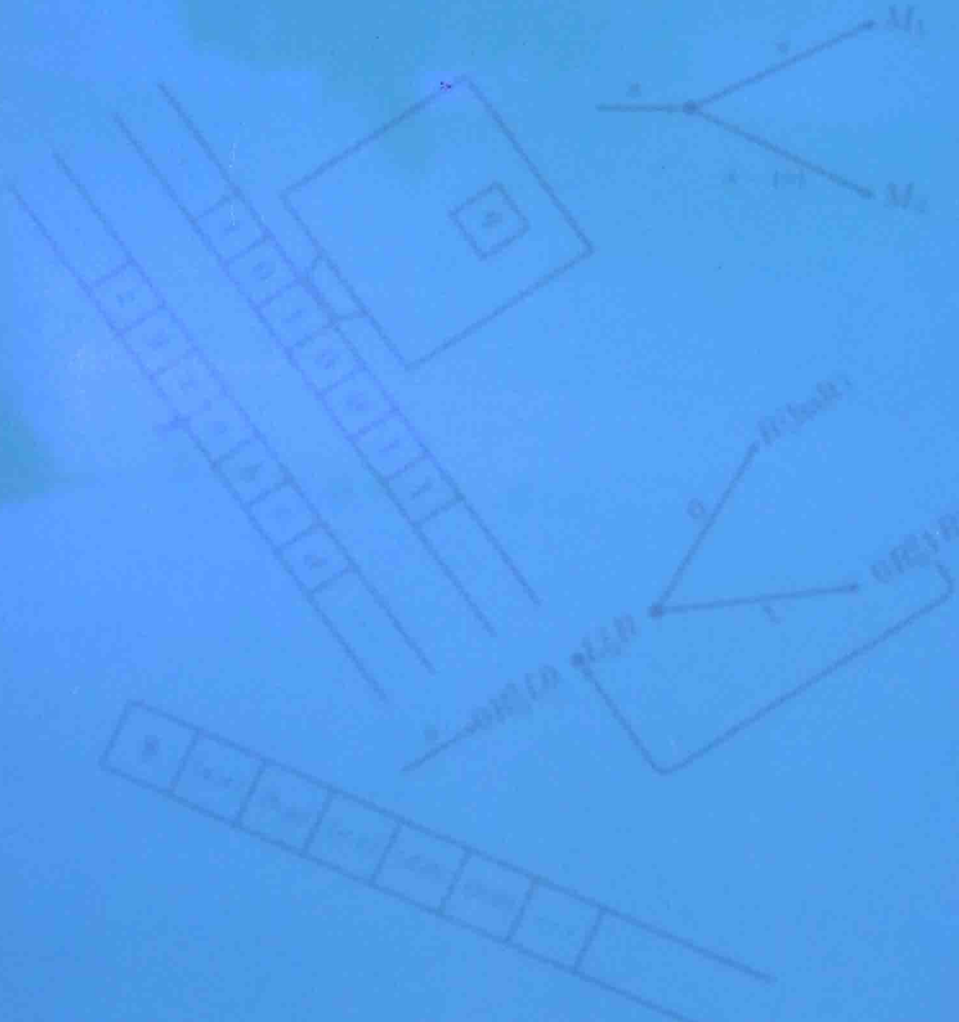
逻辑与形而上学教科书系列

数理逻辑

证明及其限度

郝兆宽　杨睿之　杨　跃　著



复旦大学出版社

逻辑与形而上学教科书系列

数理逻辑

证明及其限度

郝兆宽 杨睿之 杨 跃 著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑:证明及其限度/郝兆宽,杨睿之,杨跃著.—上海:复旦大学出版社,2014.11
(逻辑与形而上学教科书系列)
ISBN 978-7-309-11025-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①郝…②杨…③杨… Ⅲ.数理逻辑-高等学校-教材 Ⅳ.O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 236762 号

数理逻辑:证明及其限度
郝兆宽 杨睿之 杨 跃 著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海肖华印务有限公司

开本 787×1092 1/16 印张 16.5 字数 289 千
2014 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-11025-8/O·554
定价:36.00 元

引言：什么是数理逻辑？

就字面意思而言，“数理逻辑”至少包含两方面的含义。一是“使用数学”，即，以数学为工具来研究逻辑；二是“为了数学”，以数学里面出现的或是数学家常用的逻辑为研究对象。首先，我们使用数学的符号语言，这种语言本质上可定义为自然数和自然数的序列这样的数学对象。我们还频繁地使用数学中的各种工具，如数学归纳法、紧致性定理，等等；频繁地引用数学中的定理，如数论基本定理、中国剩余定理、佐恩引理，等等；并且我们的研究成果（所下的结论）也都是以数学定理的形式表述的。从这一角度来看，与用数学研究几何图形或物理方程没有太多区别，只不过我们的研究对象是逻辑而已。

其次，数理逻辑的研究目标归根到底是要指出哪些命题是真的，而且是不依赖于物理世界的事实而为真的；哪些证明或推理的形式是正确的，它们正确的依据又是什么。例如，$2+2=4$ 是真的，但这不依赖于“两双鞋子的总数”或“汽车前轮加后轮的个数”这样的物理事实。它的真必定植根于关于另外一个世界的另外一些事实中。再例如，勾股定理的证明是正确的，它的正确性并不依赖于我们对任何一个直角三角形的直角边和斜边的测量结果，而必定依赖于另外一些非物理对象的属性。这些例子足以说明，为什么只有在逻辑与数学结合后才成为深刻、“伟大”①的学科。因为究其本性，逻辑研究的现象是超越于物理世界和物理事实之上的。在这里，没有任何物理意义上的偶然性。另外还值得一提的是，虽然这个超越物理世界的宇宙尚属于神秘之域，我们对其知之甚少，但有一点是可以肯定的：它是无穷的。而处理无穷世界带来的困难是数理逻辑发展的主要推动力之一。

以上两点综合起来，就是沙拉赫②所说的，数理逻辑是以“数学的方式研究数学”。事实上，数理逻辑主要研究的是数学证明形式的“对错”，数

---

① 蒯因（W. V. Quine）曾说：“逻辑是一门古老的科学，但 1879 年以后成为一门伟大的科学。”1879 年弗雷格出版了《概念文字》（*Begriffsschrift*），标志着现代数理逻辑的诞生。

② 沙拉赫（Saharon Shelah, 1945—　），以色列逻辑学家、数学家。

学语句的真假以及数学结构的性质。所谓“以数学的方式研究数学”，就是将数学语句、数学结构、数学证明等作为数学对象，然后用已有的数学理论研究它们的性质。

当然仅停留在字面上的解读是远远不够的，比如，从以上的解读中，我们还看不出数理逻辑和哲学有什么关系，看不出为什么全世界的哲学系都要开设数理逻辑的课程。这当然很难用简短的篇幅进行解释，也不是本书要解决的问题。不过，那个逻辑事实植根于其中的超越于物理世界的宇宙是什么样的存在呢？无穷究竟有哪些特别的性质呢？这些不都是关乎根本的哲学问题吗？

也许，只有通过学习数理逻辑，熟练地掌握它的内容、方法和技巧以后，才能真正开始讨论“什么是数理逻辑？”这个问题。不过到那时候，你可能又会想起陶潜的诗句：“此中有真意，欲辨已忘言。”

下面我们简单介绍数理逻辑早期发展的历史（近期的发展请参照结束语部分）。这类似于勾勒一个本学科的简明“历史地图”，也许有助于读者了解自己所处的位置和我们将要前进的方向。

0.1 逻辑史早期的几个重要里程碑

亚里士多德①

亚里士多德（见图1）是古希腊思想的集大成者（不仅限于逻辑学）。他研究了三段论和其他各种形式推理，逻辑学代表作为《工具论》②。在之后的千多年中，尽管有中世纪的宗教学家和学者有零星的逻辑学研究成果，但没有重大突破。康德③曾经说过：“……从亚里士多德时代以来，逻辑在内容方面就收获不多，而就其性质来说，逻辑也不能再增加什么内容。”④亚里士多德的形式逻辑不能称为数理逻辑。他使用自然语言，而且也没有讨论量词等等概念。

莱布尼兹⑤

在人类文明史上，莱布尼兹是可以与文艺复兴时代的巨匠们相提并论的一位大师。他 26 岁时的工作使他与牛顿⑥共享发明微积分的荣誉。在逻

① 亚里士多德（Aristotle，前 384—前 322），古希腊哲学家。
② 工具论，英文为 *Organon*。
③ 康德（Immanuel Kant，1724—1804），德国哲学家。
④ 康德《逻辑学讲义》，许景行译，商务印书馆，北京，1991。
⑤ 莱布尼兹（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716），德国数学家和哲学家。
⑥ 牛顿（Issac Newton，1642—1727），英国物理学家，数学家。

图 1: 柏拉图和亚里士多德（图片来自维基）

辑史上，他被称为数理逻辑之父。他有一个伟大的设想，试图建立一个能够涵盖所有人类思维活动的“通用符号演算系统”，让人们的思维方式变得像数学运算那样清晰。一旦有争论，不管是科学上的还是哲学上的，人们只要坐下来算一算就可以毫不费力地辨明谁是对的。他的名言是：“让我们来算吧。”这一伟大的设想后来被称为“莱布尼兹的梦想”。但是，莱布尼兹的许多工作在当时并不被人所知，在他死后很久才得以发表，或许这也是康德认为没人超越亚里士多德的原因吧。值得一提的是，很多哲学家研究逻辑的出发点都是试图为人类理智建立一个坚实的框架或系统，而这样的框架或系统很自然地涉及到数学工具。

布尔①

布尔的主要贡献是把逻辑变成了代数的一部分，从而向“让我们来算吧”的方向跨出了重要一步。粗略地说，布尔把逻辑中对真假的判断变成了代数中符号的演算。所谓布尔 代数即是以他命名的。大致上说，亚里士多德形式逻辑的所有规则都可以用布尔代数重新表述出来。

弗雷格②

弗雷格一生致力于数学基础的研究，试图实现把数学当成逻辑的一个分支这一逻辑主义纲领。他的工作对分析哲学（有人称他为分析哲学之父）、现代逻辑和数学基础都有极其深远的影响。我们将要学习的谓词

① 布尔（George Boole，1815—1864），英国数学家。

② 弗雷格（Gottlob Frege，1848—1925），德国哲学家。

演算很大程度上归功于他，比如，量词的引进。当他快要成功的时候，罗素①于 1902 年写信给他："只有一点我遇到些困难……"

说到这里，我们需要涉及一点点数学史，尤其是 19 世纪末 20 世纪初数学基础方面的争论。从古到今，数学大致是沿着从具体到抽象、从含混到准确、从庞杂到精纯的方向发展。以微积分为例，在古希腊时代，阿基米德 ②已经有了近似于现代定积分的概念。到了 17 世纪，牛顿和莱布尼兹独立发明了微积分。但用现代数学的标准来衡量，当时的微积分领域里有很多概念是不精确的。比如莱布尼兹用无穷小量来表述导数，而无穷小量有如下性质：它可以参与所有的算术运算，小于所有的正实数但又不是零。无穷小这一概念当时即受到很多批评，其后 200 多年也一直不被人接受。③ 尽管如此，牛顿 和莱布尼兹 的直观是完全与物理世界吻合的，微积分理论也获得了巨大成功。直到 19 世纪，柯西④和魏尔斯特拉斯⑤引入了数学分析中的 ε-δ 方法，才给微积分奠定了坚实的基础。首先，微积分中的最根本的概念"微分"和"积分"都可以用极限来定义，而极限的概念又可以通过 ε-δ 方法建立在实数理论的基础上。之后数学家又用有理数定义实数、用整数定义有理数、用自然数定义整数。在康托尔⑥创立集合论之后，人们又用集合作为最根本的概念来定义自然数。因此，人们自然会想：也许集合论和逻辑就是莱布尼兹当年梦想的通用语言？也许整个数学（甚至整个科学，甚至人类全部精神活动）都可以归约到逻辑？这就是逻辑主义的历史背景。

让我们回到困扰罗素的那一点。罗素在弗雷格的逻辑体系中找到了一个矛盾，后来被称为罗素悖论。罗素悖论的具体内容我们这里不提。在 20 世纪初，有很多与罗素悖论类似的其他悖论。这些悖论的共同点是它们都涉及非常大的集体。这些悖论让人们怀疑我们是否越过了我们能力的极限，或者说，数学理论是不是太抽象了，抽象到人们对它的真假完全没有感觉了。因此不少人基于哲学的考虑，想给数学概念和方法加一些人为的限制，以保证数学基础的坚实，起码避免悖论。其中比较极端的主张是以布劳威尔⑦为代表的直觉主义。直觉主义者只承认潜无穷，对无穷（起码对不可数的无穷）持完全否定的态度。这样一来，数学里面绝大部分内容都被摒

① 罗素（Bertrand Russell，1872—1970），英国哲学家。

② 阿基米德（约前 287—约前 212），古希腊数学家。

③ 亚·罗宾逊（Abraham Robinson，1918—1974）用模型论的方法，在 1960 年代成功地为无穷小量奠定了坚实的基础，这一学科分支称为非标准分析。

④ 柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789—1857），法国数学家。

⑤ 魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815—1897），德国数学家。

⑥ 康托尔（Georg Cantor，1845—1918），德国数学家。

⑦ 布劳威尔（Luitzen Egbertus Jan Brouwer，1881—1966），荷兰数学家和哲学家。

弃掉了。康托尔的集合论也就失去意义了。

希尔伯特①

希尔伯特是对 20 世纪数学发展影响最大的数学家之一。对数学的许多领域都有杰出的贡献。希尔伯特强烈反对直觉主义者对数学的限制。他的名言是："没有人能把我们从康托尔创造的乐园中驱逐出去"。在 20 世纪初，他提出了希尔伯特纲领，期望一劳永逸地为数学奠定坚实的基础。纲领大致如下：首先分离出数学中的大家公认的手段，即本质上是有穷的数学证明。对于有争议的涉及无穷的命题，暂时不去考虑它们的意义，而只是看成机械的推导。或者说暂时把语义和语法分开，只研究语法部分。这样一来，如何保证证明系统是一致②的就成为头等重要的了。希尔伯特期望有足够强的形式系统，其本身能够证明它自身的一致性，而且只使用本质上有穷的数学去证明全部数学的一致性。

哥德尔③

哥德尔被称为亚里士多德以来最伟大的逻辑学家。他的主要成就包括一阶逻辑的完全性定理、一阶算术的不完全性定理（这两个定理将是本课程的主要内容）以及选择公理和连续统假设与集合论公理系统的相对一致性。哥德尔的成果遍及数理逻辑的几乎所有领域，而且对很多领域来说是开创性的。这些成果从根本上影响和推动了数理逻辑的发展，直到今天依然如此。在哥德尔所有这些惊世骇俗的成就中，不完全性定理不仅对逻辑，甚至对整个人类文明的发展都有深远的影响。我们只谈逻辑。哥德尔定理改变了逻辑发展的进程，其中一个重要的原因就是它彻底否定了（依原本设想方式的）希尔伯特纲领。假设皮亚诺④公理系统 PA⑤代表经典数论的形式化系统，按照希尔伯特纲领的要求，我们必须从 PA 出发，只使用严格的"有穷主义"的手段来证明 PA 的一致 性。但是，哥德尔不完全性定理告诉我们，除非 PA 是不一致的，PA 的一致 性不能在 PA 中得到证明。以后的发展请看本书结尾。

0.2 课程大纲

本教材可以提供两学期课程的容量。下述第一到第四部分构成一门完整的数理逻辑入门课程，其后部分可以作为进阶课程的教材。

① 希尔伯特（David Hilbert，1862—1943），德国数学家。

② consistent，consistency，也常译为协调、相容、和谐、无矛盾，等等。

③ 哥德尔（Kurt Gödel，1906—1978），奥地利和美国数学家和哲学家。

④ 皮亚诺（Giuseppe Peano，1858—1932），意大利数学家。

⑤ 皮亚诺公理系统的定义见后文。

第一部分 命题逻辑

在这一部分，我们将全面讨论有关命题逻辑的内容。由于几乎所有的逻辑问题在命题逻辑中都显得十分直接和简明，因此这一部分可以看做一阶逻辑内容的简明版本，我们把它当作热身。主要内容包括：命题逻辑的形式语言，真值指派，合式公式的无歧义性，命题连接词的互相可定义性，命题演算的（若干）公理系统，命题逻辑的完全性定理，以及模态逻辑简介。

第二部分 一阶逻辑的语法

从这里开始正式学习一阶逻辑的内容。首先我们给出一阶语言的初始符号和形成规则，然后讨论有关一阶语言的一些重要概念，这包括子公式、自由和约束变元、代入和替换。我们还会学习如何用这种形式的语言翻译自然语言中的语句，这主要是来自数学和哲学中的一些命题，通过练习我们会发现，一些传统上困难而模糊不清的哲学问题在这种翻译下会得到更好的辨析。

然后我们在定义的形式语言中建立一个形式的公理系统。还会介绍一种有根岑[1]建立的自然推演系统，对于有计算机背景或者喜欢直觉主义逻辑的读者，这样的系统会显得更为“自然”。通过这些，读者会学习和掌握形式证明的概念和技巧。

第三部分 一阶语言的结构和真值理论

这一部分讨论塔斯基[2]的形式语言中的真概念。我们首先定义一阶语言的结构，然后解释“一阶语言的公式在一个结构中为真”这一重要概念。事实上这一概念是模型论建立的基石。借助这一概念我们会讨论逻辑后承这一逻辑学的核心概念，以及有效式、矛盾式、可满足、不可满足等一阶逻辑语义学的核心内容。

然后我们将讨论数学中常见的同构以及可定义性等概念，这些概念在今后的数理逻辑课程中会被广泛地使用。对初学者或许可先放一放，等今后用到时再详细阅读。

第四部分 哥德尔完全性定理

本章会证明一阶逻辑的可靠性定理和完全性定理，从而把语法和语义两方面联系起来。此外还会学习紧致性定理及其一些有趣的应用，从中会发现一阶逻辑的一些局限。

到这里为止，我们精确定义了一些数理逻辑中的基本概念，如真和可证。并且建立了它们之间如下的联系：$\Gamma \models \sigma$ 当且仅当 $\Gamma \vdash \sigma$。用通俗语

[1] 根岑（Gerhard Gentzen，1909—1945），德国数学家。

[2] 塔斯基（Alfred Tarski，1901—1983），波兰和美国数学家。

言说，如果我们把真解释成放之四海而皆准，那么真的就刚刚好是可证的。这些内容大部分是 1930 年前的成果，它们可以构成一门完整的数理逻辑初阶课程。让我们可以领会形式化方法的强大。

然而，我们也从完全性定理的推论——紧致性定理中看到了形式化方法的局限性。其实，紧致性定理揭露的还只是冰山的一角。在本教材接下来的部分中。读者会看到哥德尔的两个不完全性定理的证明，从而能更深刻地理解逻辑方法的局限。在不完全性定理的证明中，大家可以更深地体会到把基本概念精确化的必要性。毕竟，只说明真的刚好是可证的并没有什么令人惊奇的地方。我们将会看到：恰恰是揭示了逻辑方法的局限的不完全性定理才充分体现了数理逻辑的真正精髓！

第五部分　递归论简介

哥德尔不完全性定理的一个副产品就是对递归函数的研究。后者与图灵①发展的可计算性概念不谋而合。我们将介绍原始递归函数、部分递归函数概念，定义图灵机与图灵可计算函数。我们将证明部分递归函数与图灵机可计算函数是等价的概念，并由此引出丘奇②论题。我们还将介绍递归可枚举集。

第六部分　简化版本的自然数模型

我们将在这部分回到关于模型论的内容。我们会引入一些模型论的技巧，介绍几个简化版本的自然数模型，并运用前者证明这些简化版本的自然数模型存在完全的公理化理论。

第七部分　哥德尔不完全性定理

运用教材中已介绍的概念与工具，我们将证明哥德尔的两个不完全性定理。我们选取罗宾逊算术作为一阶理论的代表。我们将展示如何通过算术的语法化在罗宾逊算术中表示主要的语法事态。不动点引理是不完全性定理证明的核心，我们将证明不动点引理并运用它构造哥德尔句。我们会先证明弱版本的第一不完全性定理，再介绍由罗瑟③改进的对强版本的第一不完全性的证明。一般认为，哥德尔第二不完全性定理是第一不完全性定理的推论。而实际上到第二不完全性定理的证明并不平凡。其中，对诸如皮亚诺 算术满足 3 个可证性条件的证明颇费周折。我们将给出较详尽的证明过程。

本书针对的是对逻辑和数学基础有兴趣的的读者。随着逻辑教育的普及，可供大家选择的逻辑学书籍也越来越多。但由于著者的动机不同，彼

① 图灵（Alan Turing，1912—1954），英国逻辑学家、数学家。

② 丘奇（Alonzo Church，1903—1995），美国逻辑学家、数学家。

③ 罗瑟（J.Barkley Rosser，1907—1989），美国数学家、逻辑学家。

此的侧重点也自然有很大的不同。例如，面向计算机科学的数理逻辑可能把逻辑作为离散数学的一部分，更注重与程序有关的机械规则和形式推演；也有的课本把逻辑作为严格推理训练的一部分，因而也把重点放在推演部分；还有很多书籍把逻辑作为素质教育的一部分，因而从语言到例子都避开数学，等等。相对于以上的逻辑书，我们的教材把逻辑与元数学连在一起，更多地介绍语义部分和强调语法语义的统一。此外，本教材另一个重要目的是为了后继课程做准备，因此它的确是引大家入数理逻辑之门的导论。希望读者掌握了本导论的内容之后，继续学习更深、更专门也更有意思的内容。

各章的依赖关系如图2所示。根据课程安排，可以略过对自然推演系统和模态逻辑的介绍（第二章的2.4节、2.5节、2.7节、2.9节，第四章的4.5节以及第六章的6.3节）而不影响主线。第二章作为之后内容的热身也并非必要，稍作调整后可以直接从第三章开始。第八章的内容对于哥德尔不完全性定理的证明不是必要的，但有助于理解不完全性定理的前提与意义。

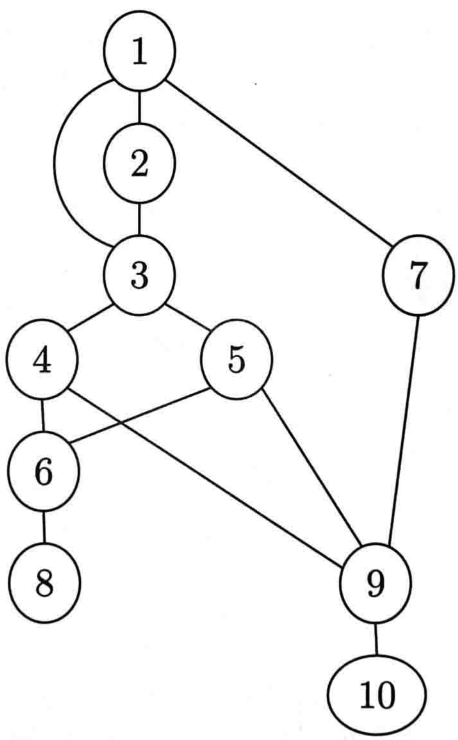


图 2: 各章依赖关系

由于数理逻辑已是非常成熟的学科，本教材中的大部分内容都是 1940

年以前的成果。本教材作者仅仅根据教学经验，将经典内容理顺，以期减少读者学习的阻力而已。在写作过程中，作者从已有的众多的中外教科书中受益匪浅，其中对作者影响最大的是安德顿①的 [3]，该书是作者教学时选用教材的首选。事实上，安德顿一书的高水准是激励我们写好教材的动力之一。在编写过程中，陈翌佳（上海交通大学）、庄志达（新加坡国立大学）、丁德诚（南京大学）、沈恩绍（上海交通大学）、施翔晖（北京师范大学）、俞锦炯（新加坡国立大学）和喻良（南京大学）等老师和同学对初稿提出了宝贵的修改意见，在此表示深深的感谢。

① 安德顿（Herbert Enderton，1936—2010），美国数学家。

目录

引言：什么是数理逻辑？ i

0.1 逻辑史早期的几个重要里程碑 ii

0.2 课程大纲 v

第一章 预备知识 1

1.1 证明的必要性 1

1.2 集合 3

1.3 关系 6

1.4 函数 10

1.5 等价关系与划分 15

1.6 序 19

1.7 结构的例子 21

第二章 命题逻辑 25

2.1 引言 25

2.2 命题逻辑的语言 26

2.3 真值指派 30

2.4 唯一可读性 36

2.5 其他联词 38

2.6 命题逻辑的一个推演系统 42

2.7 命题逻辑的自然推演 45

2.8 命题逻辑的可靠性和完全性定理 48

2.9 模态逻辑简介 55

第三章 一阶逻辑的语言 **63**
3.1 一阶逻辑的语言的定义和例子 63
3.2 自由出现和约束出现 70

第四章 形式证明 **73**
4.1 一阶逻辑的一个公理系统 73
4.2 推理和元定理 76
4.3 其他元定理 80
4.4 前束范式 83
4.5 自然推演 84

第五章 一阶语言的结构和真值理论 **89**
5.1 一阶语言的结构 89
5.2 可定义性 95
5.3 同态和同构 98

第六章 哥德尔完全性定理 **105**
6.1 可靠性定理 105
6.2 完全性定理 107
6.3 自然推演系统的可靠性和完全性 114
6.4 紧致性定理及其应用 117

第七章 递归论的基本知识 **121**
7.1 原始递归函数 121
7.2 递归函数 128
7.3 图灵机 132
7.4 图灵可计算函数与部分递归函数 138
7.5 递归可枚举集 146

第八章 简化版本的自然数模型 **151**
8.1 紧致性定理及其应用 151
8.2 可判定的理论 156
8.3 只含后继的自然数模型 160
8.4 包含后继和序的自然数模型 164
8.5 普莱斯伯格算术模型 168

第九章 哥德尔第一不完全性定理 **173**

9.1 可表示性 173

9.2 语法的算术化 185

9.3 不动点引理和递归定理 191

9.4 不可定义性、不完全性和不可判定性 195

第十章 哥德尔第二不完全性定理 **201**

10.1 可证性条件 202

10.2 第二可证性条件 (D2) 的证明 204

10.3 第三可证性条件 (D3) 的证明 216

10.4 哥德尔第二不完全性定理 224

10.5 自然的不可判定语句 228

第十一章 结束语 **231**

附录 **239**

哥德尔的生平 239

哥德尔的主要数学工作 240

参考文献 **243**

索引 **245**

第一章　预备知识

从引言可以看出本教材会假定读者有一定的数学基础。但是我们也注意到大量对逻辑感兴趣的读者不一定对纯数学有那么强烈的兴趣。甚至有些读者会觉得太多的数学反而会与我们的目的南辕北辙，会把辩证的“活”的逻辑搞得太机械以至弄“死”。这种怀疑是有一定道理的。我们并不声称数学方法或更广义的理性方法是研究逻辑的唯一途径。但我们要强调，这一点读者在后文也会看到，数理逻辑的一个重要的特点就是它能清楚地告诉我们各种（包括数学）方法的局限，从而间接提示我们突破局限的方法和需要添加的工具。

在本章中我们罗列一些预备知识，数学基础好的读者可以略过这一章。

1.1　证明的必要性

数学不同于实验性科学，如物理或生命科学。对实验性科学来说，重要的是设计并动手做实验，收集数据；根据观察到的事实，提出理论并作出预测，再用实验数据来检验理论的正确性。数据（基本）吻合了，理论也就成功了。有极少数的特例问题不大。而数学则不同。数学的论证必须是“滴水不漏”或是“无可置疑”的，不允许有任何例外。注意，在这一点上数学对论证的要求比思辨性科学（包括哲学）也要高。

我们看几个例子，说明仅仅列举大量事实不能代替数学论证。这也是普通归纳法的缺陷。

例 1.1.1. 我们称一个正整数 p 为一个**素数**，如果 $p \neq 1$ 并且 p 只能被 1 和 p 整除。观察：31 是一个素数，331 是一个素数，3331 也是一个素数，33331 和 333331 也都是素数，是不是所有形如 $33\ldots3331$ 的整数都是素数？

答案：不是，例如 333333331 不是素数。

例 1.1.2. 费马[1]在 1637 年注意到：对任何整数 $n \geq 3$，方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有 x, y 和 z 的正整数解。经过几代数学家的努力，直到 1995 年，怀尔斯[2]才证明了这一结论。在怀尔斯之前，人们验证了几乎人类计算极限内的所有整数，涉及的数字达到 4,000,000 的 4,000,000 次方，超过了整个宇宙中所有基本粒子的数目，都没有发现例外。但这些都不能成为数学证明。我们现在考察一些与之近似的命题：方程 $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$ 没有 x, y, z 和 w 的正整数解。方程 $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ 又如何呢？

答案：方程 $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ 有解 $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$。方程 $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$ 是否有正整数解留给读者解答。

注：首先我们没有贬低实验科学中观察及猜想的重要性。好的猜想需要深刻的洞察力，经常需要神来之笔。其次，从具体例子着手研究也是数学中普遍实行的方法。我们只不过想强调大量的个例并不构成数学证明。

在数学研究中，反例是非常重要的。错误的猜想经常是被反例推翻的。例如，例 1.1.1 中的 333333331 就是一个反例。这使前面 7 个例子不重要了，我们也不需要更多的反例。

那数学中怎样证实猜想呢？方法是给出数学证明。大体上说，我们从大家公认的事实出发。这些公认的事实被称为“公理”。公理是数学证明的起点。接下来我们一步步地列出一系列的命题，每一步都是根据逻辑规则得出的。这些逻辑规则保证如果你承认上一步结论的正确性，你就一定承认下一步结论的正确性。在证明中，已经被证明的事实和公理在任何时候都可以被引用。这一系列命题的终点就是我们要证实的猜想。一旦猜想被证明了，它就被称为定理。

数学证明的目的是让读者相信其正确性。因此证明通常都是从简单到复杂依照逻辑规则展开。与之无关的内容一概放弃。从证明中经常看不出数学家的思考过程。这也是数学证明让初学者感到困惑的地方之一。

下面给出两个经典证明的例子。它们是古希腊数学的两颗明珠，既简单又优雅。

例 1.1.3. 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

证明. 假定 $\sqrt{2}$ 是有理数，即可以写成两个整数 a 和 b 之比 $\frac{a}{b}$。我们可以进一步假定 a 和 b 没有大于 1 的公因子。

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}。$$

[1] 费马（Pierre de Fermat，1601(?)—1665)，法国数学家。

[2] 怀尔斯（Andrew Wiles，1953—)，英国数学家。