21世纪高等院校创新规划教材

线性代数全程辅导

Linear Algebra

主编 李曦 袁达明

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

线性代数全程辅导

主 编 李 曦 袁达明

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数全程辅导/李曦,袁达明主编. —杭州:浙江大学出版社,2014.8

ISBN 978-7-308-13444-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李… ②袁… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第137821号

线性代数全程辅导

主编 李 曦 袁达明

责任编辑 邹小宁

文字编辑 叶梦箫

封面设计 王聪聪

出　　版 浙江大学出版社

(杭州市天目山路148号 邮政编码 310007)

(网址:http://www.zjupress.com)

排　　版 杭州教联文化发展有限公司

印　　刷 浙江省良渚印刷厂

开　　本 787mm×1092mm 1/16

印　　张 9.25

字　　数 214千

版 印 次 2014年8月第1版 2014年8月第1次印刷

书　　号 ISBN 978-7-308-13444-6

定　　价 20.00元

前 言

作为多年工作在大学数学教学第一线的教师,我们深知大学生对大学数学课程的重视程度,知道他们学习大学数学课程的艰难程度,也知道他们对一本好的数学辅导书的渴求程度。笔者根据多年的线性代数教学经验和线性代数考研辅导班讲义编写了这本线性代数全程辅导,一方面旨在帮助大学生更好地理解和掌握线性代数理论体系和解题方法,顺利应对课程考试;另一方面,也考虑到学生考研的需要,通过归纳总结主要题型及考研题型,有针对性地开展线性代数考研复习。希望能为广大学生提供一本合适的辅导书。

概念是一切理论的基础,任何科学都离不开概念,数学尤其如此。概念越抽象,其外延就越丰富,应用就越广泛,线性代数就是这样一门数学课程。线性代数的特点是:概念多、符号多、运算法则多、结论多;内容纵横交错,前后联系紧密,相互渗透,抽象性和逻辑性较强,这些都给学生的学习带来一定困难。为了更好地把握线性代数知识体系,本书在概念及方法的叙述方面基本是以文字形式为主,目的是为了表述线性代数相关概念的本质,让学生更好地理解概念。

全书共分六讲,外加一个附录,分别介绍行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值及特征向量、二次型,每讲均由内容提要、主要题型及解题点方法、基础训练题、考研真题、模拟测试题五部分组成。(1)内容提要:明确了本讲知识的主要内容,同时也为学生提供了概念的重点和难点。(2)主要题型及解题方法:归纳总结了本讲课程考试及考研中的主要题型,并给出了相应的解题方法,便于学生复习考试。(3)基础训练题:结合工科院校线性代数课程考试试卷,围绕本讲主要内容给出了典型例题及解答思路,方便掌握课程考试重点。(4)考研真题:结合历年考研试题,给出了精选例题,让学生认识考研题的演变。(5)模拟测试题:根据每章的基本要求和重点、难点,精选了适量的习题,并附有参考答案,以帮助学生的对学习效果进行检验和评估。附录中包括线性代数的常见错误及模拟测试试卷。常见错误部分罗列了大学生在学习线性代数课程中容易出现的常见错误,给出了正确的解析,有利于学生更好地理解相关内容。线性代数全程辅导在章节的顺序安排和内容取舍上与教材略有不同,主要是为了方便同学们总结归纳以及更好地掌握知识间的相互渗透与转换。

本书由李曦教授、袁达明副教授主编,第六讲由袁达明副教授编写,全书其余内容

由李曦教授编写。编写过程中，郑华盛教授提出了一些宝贵和中肯的建议，并对全书内容进行审阅，谨籍此致谢。

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者和同行批评指正。

编　者

2014 年 04 月

目　录

第1讲　行列式

1.1　内容提要

1.1.1　逆序数

排列逆序数的计算方法:①列举法;②与前面比大;③与后面比小.

在线性代数中,逆序数主要用来讨论行列式中每项所带的符号:其符号由该项中行标排列及列标排列的逆序数之和的奇偶性决定,在一个排列中对换改变排列的奇偶性.

例1　求下列排列的逆序数.

①53412;　　　② $n(n-1)321$

解　①应用列举法,有(5,3),(5,4),(5,1),(5,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),则 $\tau(53412)=8$

②应用与后面比小法,则 $\tau(n(n-1)321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

例2　求 i, j 使排列 $397\,i\,125\,j\,4$ 为奇排列.

解　排列中缺少6和8. 而当 $i=6$, $j=8$ 时, $\tau(397612584)=20$.

故当 $i=8$, $j=6$ 时,该排列为奇排列.

例3　确定五阶行列式中 $a_{21}\,a_{32}\,a_{44}\,a_{53}\,a_{15}$ 的符号.

解　因行标排列逆序数 $\tau(23451)=4$,列标排列逆序数 $\tau(12435)=1$,故该项的符号为$(-1)^{4+1}=-1$,即为负号.

1.1.2　n阶行列式定义

$$D=\det(a_{ij})=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

n阶行列式有 n^2 个元素排列成 n 行 n 列,其结果为代数和,该代数和共有 $n!$ 项. 而且正负项各占一半,每一项由位于不同行不同列的n个元素的乘积,其所带的符号由其行标排列和列标排列的逆序数之和的奇偶性决定.

例4　写出包含 $a_{21}a_{32}$ 的四阶行列式中的所有项.

解　因为该项中含有元素 $a_{21}a_{32}$,它的行标为2,3,缺1,4;列标为1,2;缺3,4,所以包含 $a_{21}a_{32}$ 的可能项有 $a_{21}a_{32}a_{43}a_{14}$ 或 $a_{21}a_{32}a_{44}a_{13}$. 再考虑其符号,故包含元素 $a_{21}a_{32}$ 的

两项分别为 $-a_{21}a_{32}a_{43}a_{14}$ 和 $a_{21}a_{32}a_{44}a_{13}$.

例5 证明一个 n 阶行列式中若等于零的元素个数大于 n^2-n ,则此行列式等于零.

证明 行列式中共有 n^2 个元素,若条件成立,则其非零元素个数小于n. 而行列式中每一项都是不同行不同列 n 个元素的乘积,故其中至少有一个零元素,说明每一项结果均为零,则该行列式等于零.

例6 求 $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & x & 1 & 2 \\ 4 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数.

解 含有 x^4 的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 组成的项,故其系数为3;含有 x^3 的项只可能是 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$,故 x^3 的系数为-4.

1.1.3 行列式性质

行列式性质主要有:行列式与其转置行列式相等;互换两行(列),行列式变号;数乘行列式等于此数乘行列式的某一行(列);行列式某两行(列)成比例或相同,则此行列式为零;行列式某行(列)元素是两数之和,则此行列式可拆分为两个行列式求和的形式;行列式某行(列)乘数 k 加到另一行(列),行列式不变. 行列式性质主要用来简化行列式的计算,也可将行列式通过性质转化为目标行列式,由此计算该行列式.

例7 计算 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$

解 原式$=\begin{vmatrix} 3 & 100 & 204 \\ -1 & 200 & 395 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}=100\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=2000$.

例8 设 α_1 , α_2 , α_3 均为三维列向量, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_2+3\alpha_3, 3\alpha_3)$,且 $|A|=2$,求 $|B|$.

解 $|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \quad 2\alpha_2 \quad 3\alpha_3|+|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \quad 3\alpha_3 \quad 3\alpha_3|$

$=|\alpha_1+\alpha_2 \quad 2\alpha_2 \quad 3\alpha_3|+|\alpha_3 \quad 2\alpha_2 \quad 3\alpha_3|=|\alpha_1 \quad 2\alpha_2 \quad 3\alpha_3|=6|A|=12.$

例9 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

解 $D\xlongequal[\gamma_1-5\gamma_2]{\gamma_3-2\gamma_1}\begin{vmatrix} 0 & -9 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -9 & 2 & -6 \\ 3 & -2 & -8 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & -4 & -30 \\ 0 & -5 & -29 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}=34$.

1.1.4 余子式及代数余子式

元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行,第 j 列后剩下的 $n-1$ 阶行列

式，其结果是一个数；其代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 余子式主要用于求矩阵的秩. 代数余子式一方面用于行列式按行（列）展开定理；另一方面用于矩阵产生伴随矩阵 $A^*=(A_{ji})$.

例10 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$,求 A 的伴随矩阵 A^* .

解 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=-1$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=-2$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1$,

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=1$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\-1&1\end{vmatrix}=4$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=-3$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=2$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=2$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=-2$,

故 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&4&2\\1&-3&-2\end{pmatrix}$.

例11 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&1&-1&0\\0&6&2&4\end{pmatrix}$,求 $R(A)$及A的一个最高阶非零子式 .

解 因为 $A\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&-1&-2\\0&6&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&3&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,所以 $R(A)=2$,且A 的一个最高阶非零子式可取为 $\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3\neq0$.

1.1.5 行列式换行（列）展开定理

$$D=\det(a_{ij})=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} .$$

其形式是把n阶行列式转化为n个 $n-1$ 阶行列式进行计算，其实质是将高阶行列式计算转化为相对较低阶的行列式进行计算；因此从理论上说，任何n阶行列式最终均可转化为二阶行列式的计算.

其推论 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$（ $i\neq j$ ）在实际计算中经常使用，要注意灵活使用.

例12 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\-1&0&2&1\\0&2&1&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$.

解 $D\xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&2&2&2\\0&2&1&1\\0&-1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&2\\2&1&1\\-1&1&2\end{vmatrix}=-2$.

例 13 设 $D=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\2&2&3&4\end{vmatrix}$，计算① $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$；② $M_{12}+M_{22}+M_{32}+M_{42}$.

解 ① $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-6&0&2\\1&0&2&3\\1&0&1&2\\1&0&0&0\end{vmatrix}=6$；

② $M_{12}+M_{22}+M_{32}+M_{42}=-A_{12}+A_{22}-A_{32}+A_{42}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&1&3\\1&1&3&4\\1&-1&2&3\\2&1&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&2&1\\1&0&1&0\\1&3&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&1\\0&1&0\\3&1&-2\end{vmatrix}=-7.$$

例 14 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&4\\2&2&3&3&3\\4&5&1&1&1\\4&4&2&2&2\\1&0&-1&2&3\end{vmatrix}$，计算 $A_{31}+A_{32}$ 及 $A_{33}+A_{34}+A_{35}$.

解 依据行列式按行(列)展开定理的推论有

$$\begin{cases}2(A_{31}+A_{32})+3(A_{33}+A_{34}+A_{35})=0\\4(A_{31}+A_{32})+2(A_{33}+A_{34}+A_{35})=0\end{cases}$$

由此得 $\begin{cases}A_{31}+A_{32}=0\\A_{33}+A_{34}+A_{35}=0.\end{cases}$

1.1.6 克莱姆法则

克莱姆法则是应用行列式求解线性方程组的一种方法．但该法则要求方程组满足两个条件：①方程个数与方程中未知元素的个数相等；②系数行列式 $D\neq0$．因此由于条件所限，应用相对较少，但对齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\quad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$，该方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式 $\det(a_{ij})=0$．

例 15 问 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\lambda x_3=0\\2x_1-x_3=0\\4x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$ 有非零解.

解 依题意，该系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1&\lambda&\lambda\\2&0&-1\\4&1&-2\end{vmatrix}=0$，即 $2\lambda+1=0$

即得 $\lambda=-\frac{1}{2}$，故当 $\lambda=-\frac{1}{2}$时，该方程组有非零解。

1.2 主要题型及解题方法

1.2.1 一般行列式的计算

课程考试中常见低阶(如四阶)行列式的计算,最常用方法是:利用行列式性质将该行列式化为某一行(列)只有一个非零元素,再利用行列式按行(列)展开法则计算. 该类型行列式计算经常用于矩阵特征多项式的计算,向量组线性相关性的判定,线性方程组的求解,二次型正定性的判别及矩阵求逆等方面.

例 16 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$,求 A 的特征值.

解 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda&4-\lambda&4-\lambda&4-\lambda\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-\lambda&0&0\\0&0&-\lambda&0\\0&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(-\lambda^3)=0$$

解得 A 的特征值为:$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$,$\lambda_4=4$.

高阶(n 阶)行列式计算相对而言较难,一般先观察行列式的特征,然后根据特征选择适用的计算方法. 常见的计算方法主要有:①按某行(列)展开;②化为上(下)三角行列式计算;③加边法;④拆为多个行列式求和;⑤递推法;⑥数学归纳法;⑦其他方法等.

1.2.1.1 按某行(列)展开计算

该方法理论上对任何行列式均可使用,但实际上常用于行列式中非零元素较少的行列式计算.

例 17 计算 $D_n=\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}$.

解 按第一列展开得

$$D_n=x\cdot\begin{vmatrix}x&y&\cdots&0&0\\0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x&y\\0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\cdot\begin{vmatrix}y&0&\cdots&0&0\\x&y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&y&0\\0&0&\cdots&x&y\end{vmatrix}=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

1.2.1.2 化为上(下)三角行列式计算

该方法主要适用于形如 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n-1}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn-1}&a_{n}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&0&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1n-1}&a_{n-1n}\\a_{n1}&0&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n-1}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&0&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}$ 的三线型行列式(爪型行列式)计算，利用行列式性质化为上(下)三角行列式后计算结果.

例 18 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}$

解 D_n 为三线行列式，故采用后列加前列的方法化为三角行列式.

$$D_n\xlongequal[\substack{\cdots\\ C_1+C_2}]{\substack{C_{n-1}+C_n\\ C_{n-2}+C_{n-1}}}\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&\frac{n(n+1)}{2}-1&\cdots&2n-1&n\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-n+2&0\\0&0&\cdots&0&-n+1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{n-1}(n-1)!=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)!}{2}$$

1.2.1.3 加边法

该方法主要适用于行列式行(列)中，具有较多相同元素的行列式. 其方法为构造一个与所求 n 阶行列式相等的 $n+1$ 阶行列式进行计算.

例 19 计算 $D_n=\begin{vmatrix}a_1&b&b&\cdots&b\\b&a_2&b&\cdots&b\\b&b&a_3&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a_n\end{vmatrix}$，其中 $b\neq a_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a_1&b&\cdots&b\\0&b&a_2&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&b&b&\cdots&a_n\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{\gamma_i-\gamma_1}\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\-1&a_1-b&0&\cdots&0\\-1&0&a_2-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&a_n-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{C_1+C_i\frac{1}{a_{i-b}}}\begin{vmatrix}1+b\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-b}&b&\cdots&b\\0&a_1-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_n-b\end{vmatrix}=(1+b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-b})(a_1-b)\cdots(a_n-b).$$

1.2.1.4　拆为多个行列式之和进行计算

该方法适用于行列式各行(列)元素中有较多成比例元素的行列式.

例20　计算 $D_n=\begin{vmatrix}x+a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&x+a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&x+a_n\end{vmatrix}$（其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq0$).

解

$$D_n=\begin{vmatrix}x+a_1&a_2&\cdots&0\\a_1&x+a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x+a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&x+a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{vmatrix}=x\cdot D_{n-1}+a_n\begin{vmatrix}x+a_1&a_2&\cdots&1\\a_1&x+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=x\cdot D_{n-1}+a_n\begin{vmatrix}x&0&\cdots&1\\0&x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_nx^{n-1}$$

由

$$D_n=xD_{n-1}+a_nx^{n-1}$$

得

$$D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1}x^{n-2}\ ,\ \cdots\ ,D_1=(x+a_1)$$

代入得

$$D_n=x^n+x^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\ .$$

1.2.1.5　递推法

该方法适用于三线行列式中每条线上元素均相同的行列式

例21　计算 $D_n=\begin{vmatrix}3&2&0&\cdots&0&0\\1&3&2&\cdots&0&0\\0&1&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&3&2\\0&0&0&\cdots&1&3\end{vmatrix}$

解 将 D_n 按第一行展开并计算得

$$D_n=3D_{n-1}-2D_{n-2} \tag{1}$$

设

$$D_n-xD_{n-1}=y(D_{n-1}-xD_{n-2}) \tag{2}$$

比较(1)(2)得 $\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=1\\ y_1=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=2\\ y_2=1\end{cases}$ 将上述结果分别代入(2)得

$$D_n-D_{n-1}=2(D_{n-1}-D_{n-2})=\cdots=2^{n-2}(D_2-D_1)=2^n,$$
$$D_n-2D_{n-1}=D_{n-1}-2D_{n-2}=\cdots=D_2-2D_1=1,$$

两式联立得

$$D_n=2^{n+1}-1\,.$$

1.2.1.6 *数学归纳法*

该方法适用于已知 n 阶行列式结果的相关证明.

例22 证明 $D_n=\begin{vmatrix}2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a\end{vmatrix}=(n+1)a^n$

证明 当 $n=1$ 及 $n=2$ 时，结论成立.

设当 $n<k$ 时，结论成立.

则当 $n=k$ 时，有 $D_k=2aD_{k-1}+(-1)a^2\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a\end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}&=2ak\cdot a^{k-1}+(-1)a^2\cdot D_{k-2}\\ &=2ka^k-a^2\cdot(k-1)a^{k-2}\\ &=(k+1)a^k,\end{aligned}$$

故由数学归纳法得证

$$D_n=(n+1)a^n.$$

1.2.2 抽象行列式的计算

抽象行列式是指元素未给定的某行列式，其计算主要利用行列式的性质及相关概念，内容主要涉及矩阵的运算，特征值，矩阵相似等.

例23 设 A 为 n 阶方阵，而且 $AA^T=E$，$|A|<0$，求 $|A+E|$.

解 $|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||E^T+A^T|=|A||E+A|$，

即得 $(1-|A|)|E+A|=0$. 而 $|A|<0$，故 $1-|A|>0$

即得证

$$|A+E|=0\,.$$

例24 设 A 为 n 阶非零矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，当 $A^*=A^T$ 时，证明 $|A|\neq0$.

解 由已知 $A^*=A^T$，即得 $A_{ij}=a_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n$.

由于 $A\neq 0$，不妨设 A 中第 i 行存在非零元素，
则

$$\begin{aligned}|A| &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\\ &= a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2>0,\end{aligned}$$

故 $|A|\neq 0$.

例 25 设 A 为三阶方阵，$|A|=2$，①将 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，计算 $|\alpha_2-3\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_3|$；②求 $\left|(2A)^{-1}+\frac{1}{2}A^*\right|$.

解 ① $|\alpha_2-3\alpha_1,\ 2\alpha_1, \alpha_3|=|\alpha_2, 2\alpha_1, \alpha_3|-3|\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_3|=-2\,|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|-0=-2\times 2=-4$.

② $A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$,

$$\left|(2A)^{-1}+\frac{1}{2}A^*\right|=\left|\frac{1}{2}A^{-1}+A^{-1}\right|=\left|\frac{3}{2}A^{-1}\right|=(\frac{3}{2})^3\left|A^{-1}\right|=\frac{27}{16}.$$

1.2.3 行列式为零的应用

在线性代数中，涉及确定参数值的问题，一般要联想到是否有某行列式为零. 行列式为零主要涉及到矩阵的秩及子式，齐次线性方程组是否有非零解，矩阵的特征值及特征向量等.

例 26 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&\lambda&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}$，$B$为三阶非零矩阵，且$AB=0$，求$\lambda$。

解 由 $AB=0$，则B的各列为 $AX=0$ 的解.

而 $B\neq 0$，故 $AX=0$ 有非零解，则 $|A|=0$.

而 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&\lambda&-1\\-1&1&2\end{vmatrix}=5\lambda+2=0$，故 $\lambda=-\frac{2}{5}$.

例 27 设 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 为矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&a&1\\-1&b&1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求参数a，b及 ξ 对应的特征向量.

解 设 ξ 对应的特征值为 λ，则 $A\xi=\lambda\xi$，即

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&a&1\\-1&b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases}\lambda=-1\\a=-2\\b=1\end{cases}.$$

1.2.4 证明某行列式为零，即 $|A|=0$

常用方法：① $|A|=-|A|$；②反证法；③构造齐次线性方程组 $AX=0$，说明其有非零解；④利用矩阵秩的定义，证明 $R(A)<n$；⑤证明0是其一个特征值.

例 27 设 A，B 均为 n 阶正交矩阵，$|A|=-|B|$，证明 $|A+B|=0$.

证明 因 A，B 均为 n 阶正交矩阵，则 $A^{-1}=A^T, B^{-1}=B^T$，

$$|A+B|=\left|AA^{-1}B+AB^{-1}B\right|=\left|A(A^{-1}+B^{-1})B\right|$$
$$=|A||B|\left|A^{-1}+B^{-1}\right|=-|A|^2\left|A^T+B^T\right|=-\left|(A+B)^T\right|=-|A+B|,$$

故 $|A+B|=0$.

例 28 设 A 为奇数阶反对称矩阵，证明 $|A|=0$.

证明 因 A 为反对称矩阵，则有 $A^T=-A$.

不妨设 A 的阶数为奇数 $2n-1$；则 $|A|=\left|A^T\right|=|-A|=(-1)^{2n-1}|A|=-|A|$，

故 $|A|=0$.

1.3 基础训练题

基础训练题主要考核基本概念及方法的掌握程度，难度相当于高等院校课程考试，其例题主要来自一些高校线性代数期终考试试卷. 行列式对应的是一个数值. 对高阶行列式常用加边法、数学归纳法、递推法求解；对一般行列式可利用行列式性质对行列式进行恒等变形，化简之后再按行或列展开；注意范德蒙行列式的使用. 行列式的考查内容主要有：低阶的数字型行列式计算和高阶抽象行列式的计算、含参数的行列式的计算等，课程考试中重点为低阶数值型行列式的计算.

例 29 填空题

①排列 634125 的逆序数为________；

②按第三行展开行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=$ ________；

③设三阶行列式 $|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2$，则 $|2\alpha_2-\alpha_1,\alpha_2,3\alpha_3|=$ ________；

④在四阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中，项 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 的符号应取________；

⑤设 $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2$，则 $x=$ ________；

⑥设齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=$ ________

解

①考查逆序数的计算. $\tau(634125)=5+2+2=9$

②考查行列式展开定理.