理工社®

[2015 · 张宇考研数学系列丛书]

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（试卷分册 · 数学二）

史上最全
含1987–2014年
全部真题

AUTHENTIC EX-
AMINATION PAPERS
WITH ANSWERS

Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

理工社®

[张宇考研数学系列丛书

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（试卷分册 · 数学 二）

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 试卷分册. 数学二 / 张宇主编 . —北京:北京理工大学出版社,2014. 7
ISBN 978—7—5640—9481—2

Ⅰ. ①张…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解　Ⅳ. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 148162 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
82562903(教材售后服务热线)
68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 5
字　　数 / 122 千字
版　　次 / 2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 40. 00 元(共 2 册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

Contents 目录

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (1)
1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (3)
1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (5)
1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (8)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (10)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (12)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (14)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (16)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (18)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 …… (20)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (23)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (26)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (29)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (32)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (35)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (38)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (41)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (44)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (47)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (50)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (53)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (56)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (59)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (62)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (65)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (68)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (71)
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… (74)

1987 年全国硕士研究生入学统一考试
数学试题

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷Ⅲ为现在的数学二.

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $y=\ln(1+ax)$,则 $y'=$________,$y''=$________. P43,2.1 题

(2)曲线 $y=\arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是________;法线方程是________.

P43.2.2 题

(3)积分中值定理的条件是________,结论是________. P83.3.2 题

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=$________. P12.1.1 题

(5)$\int f'(x)\mathrm{d}x=$________;$\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x=$________. P83,3.1 题

二、(本题满分 6 分)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$. P17,1.1 题

三、(本题满分 7 分)

设$\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5(1-\cos t),\end{cases}$求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. P52,2.3 题

四、(本题满分 8 分)

计算定积分$\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x$. P91,3.1 题

五、(本题满分 8 分)

设 D 是由曲线 $y=\sin x+1$ 与三条直线 $x=0,x=\pi,y=0$ 所围成的曲边梯形,求 D 绕 Ox 轴旋转一周所生成的旋转体的体积. P91,3.3 题

六、证明题(本题满分 10 分)

(1)证明:若 $f(x)$在(a,b)内可导,且导数 $f'(x)$恒大于零,则 $f(x)$在(a,b)内单调增加.

P51,2.1 题

(2)若 $g(x)$在 $x=c$ 处二阶导数存在,且 $g'(c)=0,g''(c)<0$,则 $g(c)$为 $g(x)$的一个极大值.

P52,2.2 题

七、(本题满分 10 分)

计算$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x$,其中 a,b 是不全为 0 的非负数. P91,3.4 题

八、(本题满分 10 分)

(1)求微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y$ 满足条件 $y\big|_{x=\sqrt{2}}=0$ 之解. P140,6.1 题

(2)求微分方程 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^x$ 的通解. P140,6.2 题

九、选择题(本题共 4 小题,每小题 4 分,满分 16 分)

(1)$f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是 P3,1.1 题

(A)有界函数.　(B)单调函数.　(C)周期函数.　(D)偶函数.

(2) 函数 $f(x)=x\sin x$ 　P3,1.2 题

(A)当 $x\to\infty$ 时为无穷大.　(B)在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(C)在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.　(D)当 $x\to\infty$ 时有有限极限.

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于 　P28,2.1 题

(A) $f'(a)$.　(B) $2f'(a)$.　(C) 0.　(D) $f'(2a)$.

(4) 设 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 连续，$s>0,t>0$，则 I 的值 　P74,3.1 题

(A)依赖于 s,t.　(B)依赖于 s,t,x.

(C)依赖于 t,x，不依赖于 s.　(D)依赖于 s 不依赖于 t.

十、(本题满分 10 分)

在第一象限内求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点，使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小，并求此最小面积. 　P91,3.2 题

答案速查

一、填空题

(1) $\dfrac{a}{1+ax}$；$-\dfrac{a^2}{(1+ax)^2}$.　(2) $y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}(x-1)$；$y-\dfrac{\pi}{4}=-2(x-1)$.

(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(4) e^{-3}.　(5) $f(x)+C$；$\dfrac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]$.

二、 $\dfrac{1}{2}$.　**三、** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{5(1-\cos t)^2}$.

四、 $\dfrac{\pi}{8}$.　**五、** $\dfrac{\pi}{2}(8+3\pi)$.

六、略.

七、当 $a\neq 0,b\neq 0$ 时，$\int\dfrac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{ab}\arctan\left(\dfrac{a}{b}\tan x\right)+C$.

当 $a=0,b\neq 0$ 时，$\int\dfrac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{b^2}\tan x+C$.

当 $a\neq 0,b=0$ 时，$\int\dfrac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a^2}\cot x+C$.

八、(1) $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}$.　(2) 通解为 $y(x)=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{4}(x-1)\mathrm{e}^{x}$.

九、选择题

(1)(D).　(2)(C).　(3)(B).　(4)(D).

十、所求点为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{3}\right)$，最小面积为 $\dfrac{2}{9}(2\sqrt{3}-3)$.

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant 0,\\ e^{x}(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,则 $a=$________. P12,1.2 题

(2) 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$________. P43,2.3 题

(3) 设 $f(x)$连续,且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$,则 $f(7)=$________. P83,3.4 题

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$________. P12,1.3 题

(5) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________. P83,3.3 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点$(0,1)$处切线与 x 轴交点坐标是 P28,2.2 题

(A)$\left(-\dfrac{1}{6},0\right)$. (B)$(-1,0)$. (C)$\left(\dfrac{1}{6},0\right)$. (D)$(1,0)$.

(2) 设 $f(x)$与 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上皆可导,且 $f(x)<g(x)$,则必有 P74,3.2 题

(A)$f(-x)>g(-x)$. (B)$f'(x)<g'(x)$. (C)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. (D)$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

(3) 若函数 $y=f(x)$,有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 P28,2.3 题

(A)与 Δx 等价无穷小. (B)与 Δx 同阶无穷小.
(C)比 Δx 低阶的无穷小. (D)比 Δx 高阶的无穷小.

(4) 由曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x(0\leqslant x\leqslant\pi)$与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为 P74,3.3 题

(A)$\dfrac{4}{3}$. (B)$\dfrac{4}{3}\pi$. (C)$\dfrac{2}{3}\pi^2$. (D)$\dfrac{2}{3}\pi$.

(5) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$线性无关的充分必要条件是 P159,1 题

(A)有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$.
(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关.
(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量,它不能用其余向量线性表出.
(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

三、(本题共 3 小题 ,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$并写出它的定义域. P17,1.2 题

(2) 已知 $y=1+xe^{xy}$,求$y'|_{x=0}$及$y''|_{x=0}$. P52,2.4 题

(3) 求微分方程 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$的通解(一般解). P141,6.3 题

四、(本题满分 12 分)

作函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$的图形,并填写下表. P52,2.6 题

单调增加区间		凹(∪)区间	
单调减少区间		凸(∩)区间	
极值点		拐　点	
极　值		渐近线	

五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形，问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小.
P52,2.5 题

六、(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$.
P141,6.4 题

七、(本题满分 7 分)

设 $x\geqslant -1$，求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t$.
P91,3.5 题

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数，且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

(1)求 $\lim\limits_{a\to+0}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t$；(2)证 $\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t-f(x)\right|\leqslant M-m\ (a>0)$.
P92,3.6 题

答案速查

一、填空题

(1)1.　(2)$(1+2t)e^{2t}$.　(3)$\frac{1}{12}$.　(4)1.　(5)$2(e^2+1)$.

二、选择题

(1)(A).　(2)(C).　(3)(B).　(4)(B).　(5)(D).

三、(1)$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.　(2)$y'|_{x=0}=1$，$y''|_{x=0}=2$.　(3)$y=\frac{1}{x}(\arctan x+C)$.

四、

单调增加区间	$(-\infty,1)$
单调减少区间	$(1,+\infty)$
极值点	1
极　值	2
凹区间	$(-\infty,0)$ 及 $(2,+\infty)$
凸区间	$(0,2)$
拐点	$\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 及 $\left(2,\frac{3}{2}\right)$
渐近线	$y=0$

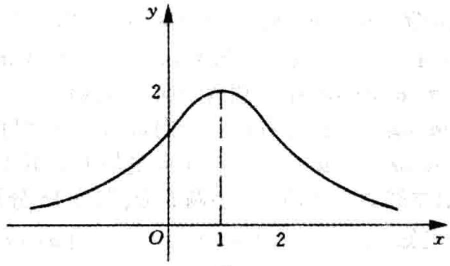

图 1

五、两段铁丝各长为 $\frac{4a}{4+\pi}$ 和 $\frac{\pi a}{4+\pi}$.　六、$y=(1-2x)e^x$.

七、当 $-1\leqslant x<0$ 时，原式 $=\frac{1}{2}(1+x)^2$. 当 $x\geqslant 0$ 时，原式 $=1-\frac{1}{2}(1-x)^2$.　八、(1)$f'(0)$.　(2)略.

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 7 小题,每小题 3 分,满分 21 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$________. P12,1.4 题

(2) $\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t=$________. P84,3.5 题

(3)曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在点(0,0)处的切线方程是________. P84,3.6 题

(4)设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$,则 $f'(0)=$________. P44,2.4 题

(5)设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,则 $f(x)=$________. P84,3.7 题

(6)设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是________. P12,1.5 题

(7)设 $\tan y=x+y$,则 $\mathrm{d}y=$________. P44,2.5 题

二、(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1)已知 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$,求 y'. P53,2.8 题

(2)求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$. P92,3.7 题

(3)求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$. P17,1.3 题

(4)已知 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. P53,2.7 题

(5)已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}$,$f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$,求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$. P92,3.8 题

三、选择题(本题共 6 小题,每小题 3 分,满分 18 分)

(1)当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ P28,2.4 题

(A)有且仅有水平渐近线. (B)有且仅有铅直渐近线.

(C)既有水平渐近线,也有铅直渐近线. (D)既无水平渐近线,也无铅直渐近线.

(2)若 $3a^2-5b<0$,则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ P28,2.5 题

(A)无实根. (B)有唯一实根.

(C)有三个不同实根. (D)有五个不同实根.

(3)曲线 $y=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴所围成的图形,绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为 P74,3.4 题

(A) $\dfrac{\pi}{2}$. (B) π. (C) $\dfrac{\pi^2}{2}$. (D) π^2.

(4)设两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值,则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处 P29,2.6 题

(A)必取极大值. (B)必取极小值.

(C)不可能取极值. (D)是否取极值不能确定.

(5)微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数) P135,6.1 题

(A)ae^x+b. (B)axe^x+b. (C)ae^x+bx. (D)axe^x+bx.

(6)设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 P29,2.7 题

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$存在. (B)$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在.

(C)$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在. (D)$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}(0<x<+\infty)$满足 $y(1)=0$ 的解. P141,6.6 题

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$为连续函数,求 $f(x)$. P141,6.5 题

六、(本题满分 7 分)

证明:方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$ 在区间$(0,+\infty)$内有且仅有两个不同实根. P53,2.9 题

七、(本题满分 11 分)

对函数 $y=\frac{x+1}{x^2}$填写下表 P53,2.10 题

单调减区间	
单调增区间	
极 值 点	
极 值	
凹 区 间	
凸 区 间	
拐 点	
渐 近 线	

八、(本题满分 10 分)

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点,当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时 $y\geqslant0$,又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为$\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c,使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小. P92,3.9 题

答案速查

一、填空题

(1)$\frac{1}{2}$. (2)π. (3)$y=2x$. (4)$n!$. (5)$x-1$. (6)$a=b$. (7)$\cot^2y\mathrm{d}x$.

二、

(1) $-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x(1-e^{-2\sqrt{x}})}}$.　(2) $-\frac{1}{\ln x}+C$.　(3) e^2.　(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2t},\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$.　(5) 0.

三、选择题

(1)(A).　(2)(B).　(3)(C).　(4)(D).　(5)(B).　(6)(D).

四、$y=\frac{e^x}{x}(e^x-e)$.

五、$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$.

六、略.

七、

单调减少区间	$(-\infty,-2),(0,+\infty)$	凹区间	$(-3,0),(0,+\infty)$
单调增加区间	$(-2,0)$	凸区间	$(-\infty,-3)$
极值点	-2	拐点	$\left(-3,-\frac{2}{9}\right)$
极值	$-\frac{1}{4}$	渐近线	$x=0$ 和 $y=0$

八、$a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2},c=0$.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题

（试卷Ⅲ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 处的法线方程是________． P44，2.6 题

(2) 设 $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$，则 $y'=$________． P44，2.7 题

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=$________． P84，3.8 题

(4) 下列两个积分大小关系式：$\int_{-2}^{-1}\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x$ ________ $\int_{-2}^{-1}\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$． P84，3.9 题

(5) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$________． P12，1.6 题

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分）

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则 P3，1.3 题

(A) $a=1,b=1$．　(B) $a=-1,b=1$．

(C) $a=1,b=-1$．　(D) $a=-1,b=-1$．

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]$ 等于 P74，3.5 题

(A) $f(x)$．　(B) $f(x)\mathrm{d}x$．　(C) $f(x)+C$．　(D) $f'(x)\mathrm{d}x$．

(3) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

P29，2.8 题

(A) 不可导．　(B) 可导，且 $f'(0)\neq 0$．

(C) 取得极大值．　(D) 取得极小值．

(4) 设 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0, \\ f(0), & x=0, \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

P29，2.9 题

(A) 连续点．　(B) 第一类间断点．

(C) 第二类间断点．　(D) 连续点或间断点不能由此确定．

三、（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a． P17，1.4 题

(2) 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$． P54，2.11 题

(3) 求曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x>0)$ 的拐点． P54，2.12 题

(4) 计算 $\int\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$． P93，3.11 题

(5)求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y\Big|_{x=\mathrm{e}}=1$ 的特解． P142,6.8 题

四、(本题满分 9 分)

在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的第一象限部分上求一点 P,使该点处的切线,椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小(其中 $a>0,b>0$). P54,2.13 题

五、(本题满分 9 分)

证明:当 $x>0$ 时,有不等式 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$. P54,2.14 题

六、(本题满分 10 分)

设 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$,其中 $x>0$,求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. P93,3.12 题

七、(本题满分 10 分)

过点 $P(1,0)$作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$的切线,该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形,求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积. P93,3.10 题

八、(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$的通解,其中 a 为实数. P141,6.7 题

答案速查

一、填空题

(1)$y=\sqrt{3}x-1$.　(2)$-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\left(\sec^2\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

(3)$\dfrac{4}{15}$.　(4)$>$.　(5)1.

二、选择题

(1)(C).　(2)(B).　(3)(D).　(4)(B).

三、

(1)$a=\ln 3$.　(2)$\mathrm{d}y=\dfrac{x}{2x-y}\mathrm{d}x$.　(3)$(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4})$.　(4)$\dfrac{\ln x}{1-x}+\ln\dfrac{|1-x|}{x}+C$.

(5)$y=\dfrac{1}{2}\left(\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

四、$P\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

五、略.

六、$\dfrac{1}{2}\ln^2 x$.

七、$\dfrac{\pi}{6}$.

八、$y=\begin{cases}(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{1}{(a+2)^2}\mathrm{e}^{ax}, & \text{当 } a\neq-2,\\ \left(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-2x}, & \text{当 } a=-2.\end{cases}$

1991 年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题

（试卷Ⅲ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 设 $y=\ln(1+3^{-x})$，则 $\mathrm{d}y=$________. P44，2.8 题

(2) 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的上凸区间是________. P44，2.9 题

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=$________. P84，3.10 题

(4) 质点以 $t\sin t^2$ 米/秒作直线运动，则从时刻 $t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2=\sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于________米. P84，3.11 题

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=$________. P12，1.7 题

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，其中 a,b 是常数，则 P30，2.10 题

(A) $a=0,b=-2$. (B) $a=1,b=-3$. (C) $a=-3,b=1$. (D) $a=-1,b=-1$.

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$0\leqslant x\leqslant 2$，则 P75，3.6 题

(A) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{x^2}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大点，则 P30，2.11 题

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点. (B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小点.

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小点. (D) 对一切 x 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$.

(4) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于 P127，5.1 题

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (D) 0.

(5) 如图 2，x 轴上的一线密度为常数 μ，长度为 l 的细杆，有一质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a，已知引力系数为 k，则质点和细杆之间引力的大小为 P75，3.7 题

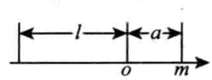

图 2

(A) $\int_{-l}^{0}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$.　(B) $\int_{0}^{l}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$.　(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a+x)^2}$.　(D) $2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a+x)^2}$.

三、(本题共5小题,每小题5分,满分25分)

(1) 设$\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t,\end{cases}$求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.　P54,2.15题

(2) 计算$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}$.　P93,3.13题

(3) 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2(\mathrm{e}^x-1)}$.　P18,1.5题

(4) 求$\int x\sin^2x\mathrm{d}x$.　P93,3.14题

(5) 求微分方程$xy^2+y=x\mathrm{e}^x$满足$y(1)=1$的特解.　P142,6.10题

四、(本题满分9分)

利用导数证明:当$x>1$时,$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.　P55,2.16题

五、(本题满分9分)

求微分方程$y''+y=x+\cos x$的通解.　P142,6.9题

六、(本题满分9分)

曲线$y=(x-1)(x-2)$和x轴围成一平面图形,求此平面图形绕y轴旋转一周所成的旋转体的体积.　P93,3.15题

七、(本题满分9分)

如图3,A,D分别是曲线$y=\mathrm{e}^x$和$y=\mathrm{e}^{-2x}$上的点,AB和DC均垂直x轴,且$|AB|:|DC|=2:1$,$|AB|<1$.求点B和C的横坐标,使梯形$ABCD$的面积最大.　P55,2.17题

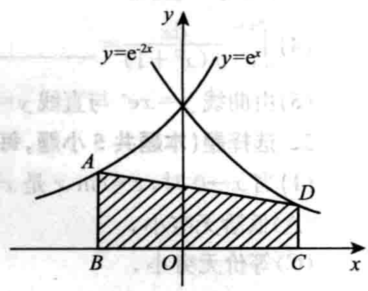

图3

八、(本题满分9分)

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$且$f(x)=x,x\in[0,\pi)$,计算$\int_{\pi}^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

P94,3.16题

答案速查

一、填空题

(1)$-\frac{\ln 3}{3^x+1}\mathrm{d}x$.　(2)$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.　(3)1.　(4)$\frac{1}{2}$.　(5)$-1$.

二、选择题

(1)(D).　(2)(B).　(3)(B).　(4)(A).　(5)(A).

三、

(1)$\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}$.　(2)$2\ln\frac{4}{3}$.　(3)$\frac{1}{6}$.　(4)$\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$.　(5)$y=\frac{x-1}{x}\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}$.

四、略.

五、$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x$.

六、$\frac{1}{2}\pi$.

七、点B和C的横坐标分别为$\frac{1}{3}\ln 2-1$和$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$.

八、π^2-2.

1992 年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题

（试卷Ⅲ）

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设$\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\y=f(e^{3t}-1),\end{cases}$其中 f 可导,且 $f'(0)\neq0$,则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$________. P44,2.10 题

(2)函数 $y=x+2\cos x$ 在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大值为________. P45,2.11 题

(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$________. P13,1.8 题

(4)$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=$________. P85,3.12 题

(5)由曲线 $y=xe^x$ 与直线 $y=ex$ 所围成图形的面积 $S=$________. P85,3.13 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)当 $x\to0$ 时,$x-\sin x$ 是 x^2 的 P3,1.4 题

(A)低阶无穷小. (B)高阶无穷小.

(C)等价无穷小. (D)同阶但非等价无穷小.

(2)设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\x^2+x, & x>0,\end{cases}$则 P3,1.5 题

(A)$f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant0,\\-(x^2+x), & x>0.\end{cases}$ (B)$f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\-x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$

(C)$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\x^2-x, & x>0.\end{cases}$ (D)$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\x^2 & x\geqslant0.\end{cases}$

(3)当 $x\to1$ 时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限 P4,1.6 题

(A)等于 2. (B)等于 0. (C)为∞. (D)不存在但不为∞.

(4)设 $f(x)$连续,$F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}f(t^2)dt$,则 $F'(x)$等于 P75,3.8 题

(A)$f(x^4)$. (B)$x^2f(x^4)$. (C)$2xf(x^4)$. (D)$2xf(x^2)$.

(5)若 $f(x)$的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$有一个原函数为 P75,3.9 题

(A)$1+\sin x$. (B)$1-\sin x$. (C)$1+\cos x$. (D)$1-\cos x$.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1)求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$. P18,1.6 题

(2)设函数 $y=y(x)$由方程 $y-xe^y=1$ 所确定,求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$的值. P55,2.19 题

(3)求$\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$. P94,3.17 题

(4)求$\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$. P94,3.20 题

(5)求微分方程$(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$的通解. P143,6.12题

四、(本题满分9分)

设$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$求$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$. P94,3.19题

五、(本题满分9分)

求微分方程$y''-3y'+2y=xe^x$的通解. P142,6.11题

六、(本题满分9分)

计算曲线$y=\ln(1-x^2)$上相应于$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$的一段弧的长度. P95,3.21题

七、(本题满分9分)

求曲线$y=\sqrt{x}$的一条切线l,使该曲线与切线l及直线$x=0,x=2$所围成图形面积最小.

P94,3.18题

八、(本题满分9分)

设$f''(x)<0,f(0)=0$,证明对任何$x_1>0,x_2>0$,有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$. P55,2.18题

答案速查

一、填空题

(1)3. (2)$\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$. (3)0. (4)$\frac{1}{2}\ln 2$ (5)$\frac{1}{2}e-1$.

二、选择题

(1)(B). (2)(D). (3)(D). (4)(C). (5)(B).

三、

(1)$e^{-\frac{3}{2}}$. (2)$2e^2$. (3)$\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$. (4)$4(\sqrt{2}-1)$. (5)$y=C\sqrt{x}-\frac{1}{5}x^3$.

四、$\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$.

五、$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)e^x$.

六、$\ln 3-\frac{1}{2}$.

七、$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

八、略.