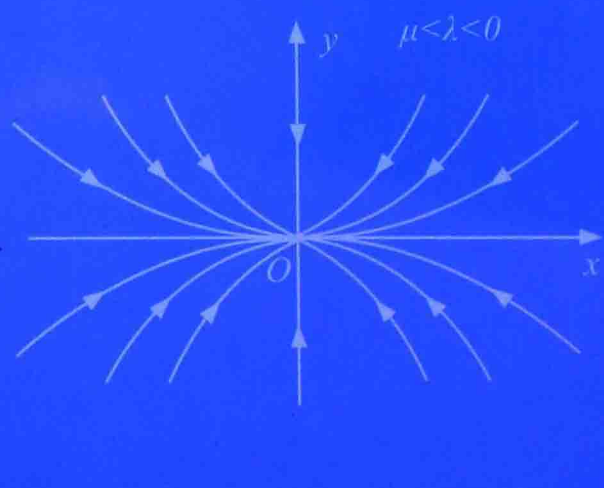
普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书主编：朱长江　彭双阶
执行主编：何　穗

常微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG

李必文　赵临龙　张明波◎主编



華中师範大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

常微分方程

主　编：李必文　赵临龙　张明波
副主编：郑绿洲　王勤龙　吴庆华

华中师范大学出版社

内容提要

本书系统地介绍了常微分方程的基本理论和基本解法，内容包括常微分方程的基本概念、一阶微分方程的初等解法、解的存在唯一性定理、n阶线性微分方程、线性微分方程组、定性与稳定性理论初步、常微分方程在数学建模中的应用。本书在体系安排上与传统教材略有不同，更显科学合理，语言风格上更是注重通俗易懂，以便能适应各个不同层面的读者群。

本书可作为普通高等院校本科生教材，亦可作为常微分方程理论研究者和教育工作者的参考用书。

新出图证(鄂)字10号

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/李必文　赵临龙　张明波主编.—武汉：华中师范大学出版社，2014.8
(普通高等教育"十二五"规划教材/新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材)

ISBN　978-7-5622-6679-2

Ⅰ.①常…　Ⅱ.①李…　②赵…　③张…　Ⅲ.①常微分方程—高等学校—教材　Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第121166号

常微分方程

© 李必文　赵临龙　张明波　主编

编 辑 室：第二编辑室　　**电　　话**：027－67867362
责任编辑：冯红亮　袁正科　　**责任校对**：王　胜　　**封面设计**：胡　灿　　**封面制作**：张　蕾
出版发行：华中师范大学出版社
社　　址：湖北省武汉市洪山区珞喻路152号　　**邮　　编**：430079
销售电话：027－67863426/67863280(发行部)
邮购电话：027－67861321　　**传　　真**：027－67863291
网　　址：http://www.ccnupress.com　　**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
印　　刷：仙桃市新华印务有限公司　　**督　　印**：章光琼
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　**印　　张**：11.75
字　　数：270千字
版　　次：2014年8月第1版　　**印　　次**：2014年8月第1次印刷
印　　数：1—2000　　**定　　价**：21.60元

欢迎上网查询、购书

普通高等教育“十二五”规划教材

新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书编写委员会

丛书总序

未来社会是信息化的社会，以多媒体技术和网络技术为核心的信息技术正在飞速发展，信息技术正以惊人的速度渗透到教育领域中，正推动着教育教学的深刻变革。在积极应对信息化社会的过程中，我们的教育思想、教育理念、教学内容、教学方法与手段以及学习方式等方面已不知不觉地发生了深刻的变革。

现代数学不仅是一种精密的思想方法、一种技术手段，更是一个有着丰富内容和不断向前发展的知识体系。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010－2020 年)》指明了未来十年高等教育的发展目标："全面提高高等教育质量"、"提高人才培养质量"、"提升科学研究水平"、"增强社会服务能力"、"优化结构办出特色"。这些目标的实现，有赖于各高校进一步推进数学教学改革的步伐，借鉴先进的经验，构建自己的特色。而数学作为一个基础性的专业，承担着培养高素质人才的重要作用。因此，新形势下高等院校数学教学改革的方向、具体实施方案以及与此相关的教材建设等问题，不仅是值得关注的，更是一个具有现实意义和实践价值的课题。

为推进教学改革的进一步深化，加强各高校教学经验的广泛交流，构建高校数学院系的合作平台，华中师范大学数学与统计学学院和华中师范大学出版社充分发挥各自的优势，由华中师范大学数学与统计学学院发起，诚邀华中和周边地区部分颇具影响力的高等院校，面向全国共同开发这套"新世纪新理念高等院校数学系列精品教材"，并委托华中师范大学出版社组织、协调和出版。我们希望，这套教材能够进一步推动全国教育事业和教学改革的蓬勃兴盛，切实体现出教学改革的需要和新理念的贯彻落实。

总体看来，这套教材充分体现了高等学校数学教学改革提出的新理念、新方法、新形式。如目前各高等学校数学教学中普遍推广的研究型教学，要求教师少讲、精讲，重点讲思路、讲方法，鼓励学生的探究式自主学习，教师的角色也从原来完全主导课堂的讲授者转变为学生自主学习的推动者、辅导者，学生转变为教学活动的真正主体等。而传统的教材完全依赖教师课堂讲授、将主要任务交给任课教师完成、学生依靠大量的被动练习应对考试等特点，已不能满足这种新教学改革的推进。如果再叠加脱离时空限制的网络在线教学等教学方式带来的巨大挑

战，传统教材甚至已成为教学改革的严重制约因素。

基于此，我们这套教材在编写的过程中注重突出以下几个方面的特点：

一是以问题为导向、引导研究性学习。教材致力于学生解决实际的数学问题、运用所学的数学知识解决实际生活问题为导向，设置大量的研讨性、探索性、应用性问题，鼓励学生在教师的辅导、指导下于课内课外自主学习、探究、应用，以加深对所学数学知识的理解、反思，提高其实际应用能力。

二是内容精选、逻辑清晰。整套教材在各位专家充分研讨的基础上，对课堂教学内容进一步精炼浓缩，以应对课堂教学时间、教师讲授时间压缩等方面的变革；与此同时，教材还在各教学内容的结构安排方面下了很大的功夫，使教材的内容逻辑更清晰，便于教师讲授和学生自主学习。

三是通俗易懂、便于自学。为了满足当前大学生自主学习的要求，我们在教材编写的过程中，要求各教材的语言生动化、案例更切合生活实际且趣味化，如通过借助数表、图形等将抽象的概念用具体、直观的形式表达，用实例和示例加深对概念、方法的理解，尽可能让枯燥、繁琐的数学概念、数理演绎过程通俗化，降低学生自主学习的难度。

当然，教学改革的快速推进不断对教材提出新的要求，同时也受限于我们的水平，这套教材可能离我们理想的目标还有一段距离，敬请各位教师，特别是当前教学改革后已转变为教学活动“主体”的广大学子们提出宝贵的意见！

朱长江
于武昌桂子山
2013 年 7 月

前　言

常微分方程是伴随着微积分的产生和发展而成长起来的一门历史悠久的学科。早在十七世纪，它就作为牛顿力学的得力助手，在天体力学和机械力学等研究领域发挥了巨大的作用。这里仅举出科学史上一件大事为证：在海王星被实际观测到之前，这颗行星的存在就被天文学家用微分方程推算出来了。时至今日，常微分方程仍然是最有生命力的数学分支之一。

常微分方程是数学类专业一门重要的专业基础课，是学习物理、经济、工程等学科不可缺少的基础课程之一。比如，它是数学物理方程、动力系统定性理论、生物数学、数学模型、数理经济、生物学等许多后续课程学习的基础。从数学发展的角度看，常微分方程分为经典和现代两部分，经典部分以数学分析、高等代数为工具，以求常微分方程的解为主要目的；现代部分主要是用泛函分析、拓扑学等知识来研究解的性质。常微分方程对先修课程（如数学分析、高等代数等）及后继课程（如微分方程数值解法、偏微分方程、微分几何、泛函分析）的学习起到了承前启后的作用，是数学理论中不可缺少的一个知识板块，也是学生进一步深入地学习其他数学课程的基础，对培养和提升学生分析问题和解决问题的能力有着重要的促进作用。

本书是根据普通高等院校常微分方程的教学大纲，由多年从事本门课程教学的一线教师共同编写。与其他同类教材相比，本书力求重点、难点更为突出，数学理论的文字表述更为通俗易懂，以便能更全面地适应不同院校学生的需求。同时添加了“常微分方程在数学建模中的应用”一章，目的是想借此章的学习，能更好地培养学生的创新意识、创新思维。

在编写此书的过程中，我们得到了华中师范大学数学与统计学学院、荆楚理工学院数理学院、湖北工程学院数学与统计学院、安康学院数学与统计系、贺州学院理学院以及湖北师范学院数学与统计学院的大力支持，得到了华中师范大学出版社的的鼎力相助，在此对他们一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在诸多不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

编者
2014 年 5 月

目　录

第 1 章

绪 论

常微分方程是伴随着微积分的产生和发展而成长起来的一门历史悠久的学科，是研究自然科学和社会科学中事物的演化规律、物体的运动规律和现象的变化规律最为基本的数学理论和方法。常微分方程在自然科学和社会科学领域都有着广泛的应用，如牛顿的运动定律、万有引力定律、机械能守恒定律、能量守恒定律、人口发展规律、生态种群竞争、疾病传染、遗传基因变异、股票的涨跌趋势、利率的浮动、市场均衡价格的变化、病毒的繁殖与扩散等。这些应用问题一旦加以精确的数学描述，往往会出现微分方程。牛顿通过解微分方程证实了地球绕太阳的运动轨道是一个椭圆。海王星的存在是天文学家先通过微分方程的方法推算出来，然后才实际观测到的。

同时，在数学学科内部的许多分支中，常微分方程也是经常要用到的重要工具之一，常微分方程推动着其他数学分支的发展。这一古老的学科，由于应用领域的不断扩大和新理论生长点的不断涌现，其发展至今仍充满着生机和活力。

本章先给出微分方程的一些基本概念，再介绍一些应用实例，最后简要介绍常微分方程的发展历史。

1.1 常微分方程的基本概念

1.1.1 常微分方程和偏微分方程

在初等数学中我们曾讨论过一些方程，如：

(1) $x^2-2x-3=0$； (2) $\sin x=x$；

(3) $x^2-y^2=1$； (4) $x^2+y^2+z^2=2$。

(1) 和(2) 要求的未知量 x 是一个或几个特定的数值。(1) 和(2) 是代数方程。(3) 和(4) 要求的是一个或几个函数，若 x 是自变量，则 y 和 z 是未知函数。(3) 和(4) 是包含自变量和未知函数的函数方程。

本书要研究的是另一类方程，这类方程包含自变量、未知函数及未知函数的导数，我们称之为**微分方程**。只有一个自变量的微分方程称为**常微分方程**，自变量的个数为两个或两个以上的微分方程称为**偏微分方程**。

例如，下面的方程都是常微分方程，其中 y 是未知函数且仅含一个自变量 x。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}, \tag{1.1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x), \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}+y=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{g}{l}\sin y=x。 \tag{1.4}$$

下面的方程都是偏微分方程，其中 T 是未知函数，x,y,z,t 是自变量。

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2T}{\partial t^2}。 \tag{1.6}$$

本书主要介绍常微分方程，因此本书中把常微分方程简称为“微分方程”，有时简称为“方程”。

1.1.2　微分方程的阶数

微分方程中出现的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶数**。例如，方程(1.1)、方程(1.3)是一阶常微分方程，方程(1.2)、方程(1.4)是二阶的常微分方程，而方程(1.5)、方程(1.6)是二阶的偏微分方程。

一般地，n 阶微分方程具有如下形式

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0, \tag{1.7}$$

这里 y 是未知函数，x 是自变量，$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)$ 是关于 $x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}$ 的已知函数，而且一定含有 $\frac{d^ny}{dx^n}$。

1.1.3　线性和非线性

如果方程(1.7)的左端为关于 y 及 $\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}$ 的一次有理整式，则称方程(1.7)为 n 阶**线性微分方程**，否则称为**非线性微分方程**。

如方程(1.2)是二阶线性方程，方程(1.3)是一阶非线性方程，方程(1.4)是二阶非线性方程。

一般地，n 阶线性微分方程具有如下形式

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x), \tag{1.8}$$

这里 $a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 是关于 x 的已知函数。

1.1.4　解和隐式解

满足微分方程的函数称为微分方程的**解**，即若函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程(1.7)中，使其成为恒等式，则称 $y=\varphi(x)$ 为方程(1.7)的解。

例如,容易验证 $y=\cos\omega x$ 是方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解。

如果关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 为方程(1.7) 的解,则称 $\Phi(x,y)=0$ 是方程(1.7) 的**隐式解**。

例如,一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

有解 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$,而关系式 $x^2+y^2=1$ 是方程的隐式解。

为简单起见,方程的解和隐式解统称为方程的解。

1.1.5　通解和特解

含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 称为 n 阶方程(1.7) 的**通解**。所谓函数 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 含有 n 个独立常数,是指存在$(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 的某一邻域,使得行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.9}$$

其中 $\varphi^{(k)}$ 表示 φ 对 x 的 k 阶导数。同样可以定义方程(1.7) 的**隐式通解**。为简单起见,方程的通解和隐式通解统称为方程的通解。

为了确定方程的一个特定的解,通常给出这个解所必需的条件,称为**定解条件**。方程满足特定条件的解称为方程的**特解**。常见的定解条件有**初值条件**和**边值条件**,也称为**初始条件**和**边界条件**。

n 阶微分方程(1.7) 的初始条件是指如下的 n 个条件:

当 $x=x_0$ 时

$$y=y_0,\frac{dy}{dx}=y_0^{(1)},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)}, \tag{1.10}$$

这里 $x_0,y_0,y_0^{(1)},\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数,初始条件(1.10) 有时可以写为

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0^{(1)},\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}。 \tag{1.11}$$

求方程满足定解条件的解的问题称为**定解问题**,当定解条件为初始条件或边界条件时,相应的定解问题称为初值问题和**边值问题**。本书主要讨论初值问题。

一般地,初值问题为

$$\begin{cases} F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \\ y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0^{(1)},\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}。\end{cases}$$

一般来说,初始条件不同特解也不同,特解可以通过初始条件的限制来确定通解中的

任意常数而得到。

例1 已知曲线上任意一点(x,y)处切线的斜率等于该点横坐标的2倍，且曲线经过点$(1,2)$，求该曲线。

解 设曲线方程为$y=f(x)$，由题意有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x, \tag{1.12}$$

积分得

$$y=x^2+c, \tag{1.13}$$

这里c是任意常数。又已知当$x=1$时，$y=2$，得$c=1$。

所以，所求曲线方程为

$$y=x^2+1。 \tag{1.14}$$

例1其实是求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,\\ y(1)=2,\end{cases}$$

的解。$y=x^2+c$是方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$的通解，$y(1)=2$是初始条件，$y=x^2+1$是方程满足初始条件的特解。

1.1.6 积分曲线和方向场

一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{1.15}$$

的解$y=\varphi(x)$表示xOy平面上的一条曲线，称为方程的**积分曲线**；通解$y=\varphi(x,c)$表示xOy平面上的一族曲线，称为方程的**积分曲线族**；满足初始条件$y(x_0)=y_0$的特解就是通过点(x_0,y_0)的一条积分曲线。

方程(1.15)的积分曲线上每一点(x,y)的切线斜率$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$刚好等于方程右端函数$f(x,y)$在这点的值，也就是说，积分曲线的每一点$(x,y)$及这点上的切线斜率$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$恒满足方程(1.15)；反之，如果一条曲线上每点的切线斜率刚好等于函数$f(x,y)$在这点的值，则这一条曲线就是方程(1.15)的积分曲线。

设函数$f(x,y)$的定义域为D，在D内每一点(x,y)处，画上一小线段，使其斜率恰好为$f(x,y)$，将这种带有小线段的区域D称为由方程(1.15)所规定的**方向场**，又称**向量场**。

在方向场中，方向相同的点的几何轨迹称为**等斜线**。方程(1.15)的等斜线方程为

$$f(x,y)=k, \tag{1.16}$$

其中k是参数。给出参数k的一系列充分接近的值，可得足够密集的等斜线族，借此可以

近似地描绘出方程的积分曲线。

例 2　方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y$在区域$D=\{(x,y)\,\big|\,|x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2\}$内的方向场和积分曲线如图 1-1、图 1-2 所示。

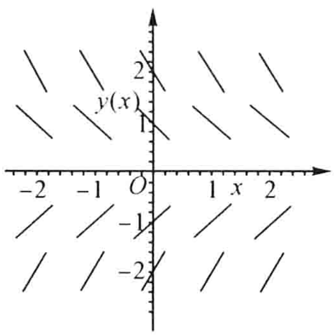


图 1-1　方向场示意图

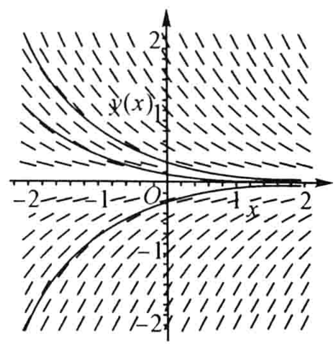


图 1-2　积分曲线

例 3　方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-y$的方向场和积分曲线如图 1-3、图 1-4 所示。

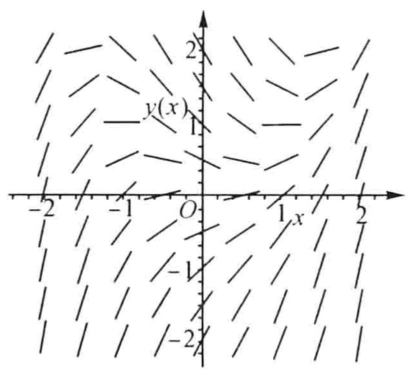


图 1-3　方向场

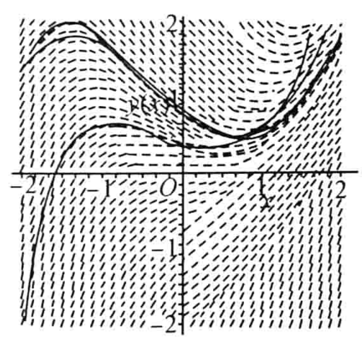


图 1-4　积分曲线

例 4　方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+xy$的方向场和积分曲线如图 1-5、图 1-6 所示。

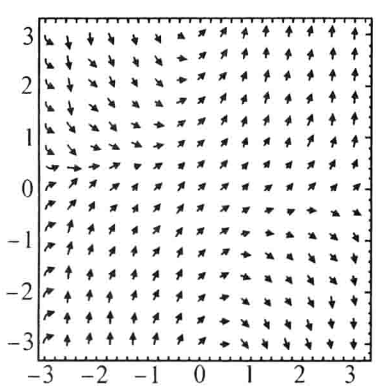


图 1-5　向量场

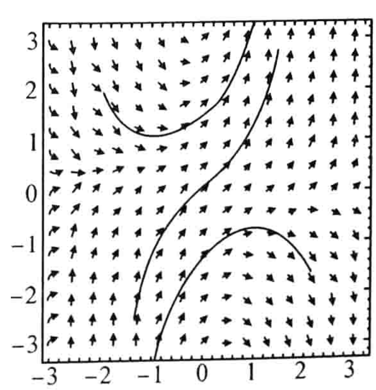


图 1-6　积分曲线

1.2 几个常微分方程应用的例子

在运用微积分知识解决一些实际问题时，根据科学定律和原理，常常会得到一些微分方程。下面给出几个常微分方程应用例子。

例 5 曲率处处为正数 α 的曲线方程。

设此曲线的方程为 $y=y(x)$，由微积分学的知识知道，$y=y(x)$ 在点 x 处的曲率为

$$\left| y''(x)\left[1+y'^{2}(x)\right]^{-\frac{3}{2}} \right|,$$

因此该曲线应满足方程

$$\left| y''(x)\left[1+y'^{2}(x)\right]^{-\frac{3}{2}} \right|=\alpha,$$

这就是一个二阶的非线性常微分方程。

例 6 嫌疑犯的确定。

根据牛顿冷却定律，高温物体冷却的速率与物体周围的温差成正比。现在已知此物体周围的温度是 d℃，最初 t_0 时刻物体的温度是 y_0℃，经过 t 分钟时的温度是 $y=y(t)$，则物体温度 $y(t)$ 应满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-k(y-d), \tag{1.17}$$

$$y(t_0)=y_0, \tag{1.18}$$

其中 k 为正常数，式(1.17) 是一个一阶线性常微分方程，式(1.18) 为初始条件，求方程(1.17) 满足初始条件(1.18) 的解的问题称为初值问题。

由方程(1.17) 得

$$y(t)=d+c\mathrm{e}^{-kt}, \tag{1.19}$$

将(1.18) 式代入，得方程(1.17) 满足初始条件(1.18) 的解为

$$y(t)=d+(y_0-d)\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}。$$

现发现一起命案，受害者的尸体于晚上 7:30 被发现，法医于晚上 8:20 赶到凶案现场，测得尸体温度为 32.6℃。一小时后，当尸体即将被抬走时，测得尸体温度为 31.4℃，室温在几个小时内始终保持 21.1℃。此案最大的嫌疑犯张某声称自己是无罪的，并有证人说："下午张某一直在办公室上班，5:00 时打完电话后就离开了办公室。"从张某到受害者家(凶案现场) 步行需 5 分钟，现在的问题是，张某不在凶案现场的证言能否被采信，使他排除在嫌疑犯之外？

首先应确定凶案的发生时间，若死亡时间在下午 5 点 5 分之前，则张某就不是嫌疑犯，否则不能将张某排除。

根据上述描述，$d=21.1$℃，记晚上 8:20 为 $t_0=0$，则 $y(t_0)=y(0)=32.6$℃，$y(1)=31.4$℃。假设受害者死亡时体温是正常的，即受害者死亡时的温度是37℃。尸体温度的变化率服从牛顿冷却定律，即尸体温度的变化律与他同周围的温度差成正比。现在要求 $y(T)=37$℃ 时的时刻 T，进而确定张某是否为嫌疑犯。

将 $y(0)=32.6$℃ 代入(1.19)式,得 $c=11.5$;

将 $y(1)=31.4$℃,$c=11.5$ 代入(1.19)式,得 $e^{-k}=\frac{103}{115}$,即 $k=-\ln\frac{103}{115}\approx 0.11$,则有

$$y(t)=d+ce^{-kt}=21.1+11.5e^{-0.11t}。$$

将 $y(T)=37$℃ 代入上式求得 $T=-2.95$ 小时 $=-2$ 小时 57 分,则

$$8\text{ 小时 }20\text{ 分}-2\text{ 小时 }57\text{ 分}=5\text{ 小时 }23\text{ 分},$$

即死亡时间大约在下午 5:23,因此张某不能被排除在嫌疑犯之外。

例 7 人口数预测。

英国人口统计学家马尔萨斯(Malthus,1766—1834)在担任牧师期间,查看了当地教堂100多年人口出生统计资料,发现一个现象——人口出生率是一个常数。1798年他在自己出版的《人口原理》一书中,提出了闻名于世的 Malthus 人口模型。其基本假设是在人口自然增长的过程中,净相对增长率(单位时间内人口的净增长数与人口总数之比)是常数,记此常数为 r(生命系数)。

在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内人口数量 $N=N(t)$ 的增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t,$$

于是 $N(t)$ 满足微分方程

$$\frac{dN}{dt}=rN\text{(Malthus 人口模型)}, \tag{1.20}$$

将上式改写为

$$\frac{dN}{N}=r dt,$$

于是变量 N 和 t 被"分离",两边积分得

$$\ln|N|=rt+c_1,$$

从而方程(1.20)的解为

$$N(t)=ce^{rt}, \tag{1.21}$$

其中,$c=\pm e^{c_1}$ 为任意常数,因为 $N=0$ 也是方程(1.20)的解。

如果设初始条件为,当 $t=t_0$ 时,有

$$N(t_0)=N_0, \tag{1.22}$$

代入式(1.21)可得 $c=N_0 e^{-rt_0}$,即方程(1.20)满足初值条件(1.22)的解为

$$N(t)=N_0 e^{r(t-t_0)}。 \tag{1.23}$$

上述结果虽然简单,但在估计1700—1961年间世界人口总数时却惊人的准确,但是在用上述公式预测未来人口数时出现了问题。因为如果 $r>0$,上式说明人口总数 $N(t)$ 将按指数规律无限增长,若按年增长率2%来计算,则1961年世界人口数为30.6亿,若仍然按年增长率2%计算,2000年世界人口数为66.5亿……结果是不可想象地出现"人口爆炸"。这说明 Malthus 人口模型仅在生物群体数目不大时可以较准确地反映生物群体的增长情况,而当群体数目很庞大时就不适用了。这是由于线性模型过于简单,不能反映生物个体之间为了争取生存空间、自然资源和食物所进行的竞争,所以 Malthus 模型在