普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地 国家级精品课程使用教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

概率论与数理统计

第二版

上海交通大学数学系 组编

武爱文 冯卫国 卫淑芝 熊德文 编

上海交通大學出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十二五"重点规划教材

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

概率论与数理统计

上海交通大学数学系　组编

武爱文　冯卫国　卫淑芝　熊德文　编

第二版

上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律性的学科. 本书共分 10 章,包括:随机事件和概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析. 各章均有适量的习题,并附有习题答案.

本书可作为高等学校理工类(除数学专业外)、经济管理类专业的教材或教学参考书,也可供各类专业技术人员参考.

读者联系邮箱:science@press.sjtu.edu.cn

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/武爱文等编. —2 版. —上海:
上海交通大学出版社,2014
ISBN 978-7-313-09750-7

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①武… Ⅲ. ①概率论②数理统计
Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 161607 号

概率论与数理统计(第二版)

组　　编:上海交通大学数学系
出版发行:上海交通大学出版社
邮政编码:200030
出 版 人:韩建民
印　　制:上海宝山译文印刷厂印刷
开　　本:787mm×960mm　1/16
字　　数:418 千字
版　　次:2011 年 5 月第 1 版　2014 年 9 月第 2 版
书　　号:ISBN 978-7-313-09750-7/O
定　　价:32.00 元

编　　者:武爱文 等
地　　址:上海市番禺路 951 号
电　　话:021-64071208
经　　销:全国新华书店
印　　张:21.75
印　　次:2014 年 9 月第 3 次印刷

前 言

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律性的学科.随机现象是在自然界和人们的社会生活中普遍存在的一种现象,随着人们日益重视研究随机现象,学习和掌握好概率论与数理统计这两门学科显得非常重要,当然也对相应的教材提出了更高要求,由此我们在以前教材的基础上,重新编写了本教材.

编写过程中,除了依据我们在长期教学和科研中所积累的经验以外,参考了国内外许多资料,还组织了几次专题研讨会,反复修改后才最终定稿.

在本教材中,我们充实了许多内容,不但可拓宽学生的视野还能为进一步深入学习打下必要的基础,同时对主要概念作出详细的叙述,以帮助学生对概念的理解;对主要定理都给出了证明,以保持内容的连贯性和系统性且方便学生自学.利用计算机软件,我们准确地绘制了各种分布的图形,同时还精心挑选和编写了各种类型的例题和习题,相信通过这些分布图形的直观表达以及例题的演示和习题的训练,学生的学习效果会有大的提高.

本书可作为高等学校理工类(除数学专业外)、经济管理类概率论与数理统计课程的教材,适合教学时间 36～54 学时.

本教材的引言部分及第 1, 7 章由武爱文撰写,第 2, 5, 6 章由冯卫国撰写,第 3, 9, 10 章由卫淑芝撰写,第 4, 8 章由熊德文撰写,最后由武爱文统稿完成.

本教材的出版得到了上海交通大学教务处、数学系的关心和支持,以及上海交通大学出版社的鼎力帮助,在这里表示深切的谢意.

限于编者水平,书中存在的疏漏与不妥之处,恳请读者批评指正.

编者于 2014 年 5 月

目录

引 言

1. 随机现象

纵观茫茫大千世界，无论是自然界还是我们人类社会生活中的许许多多现象真是形形色色、千姿百态，其中有一类现象称为**确定现象**，即在一定条件下可事先预知它是否会发生，如把一个足球踢到空中，足球会落下；在标准大气压下，把水加热到100℃时，水会沸腾；同性电荷会相互排斥、异性电荷会相互吸引等等. 然而还有一类现象，有不确定性，即在一定条件下可能会发生这样的结果，也可能会发生那样的结果，并且事先不能断定会发生哪种结果. 例如掷一枚硬币，虽然事先知道有两个结果：正面向上或反面向上，但在掷硬币之前是无法断定正面向上的；为了检查产品的质量，从生产流水线上抽取产品，虽然事先知道依据生产标准，产品分为一等品、二等品、次品三个等级，但在抽取之前是无法断定取到的产品必是一等品等. 这类在一定条件下可能出现的结果不止一个，至于出现哪一个结果事先是无法确定的现象称为**随机现象**.

随机现象，有不确定性，但人们发现只要在相同条件下进行大量的观察与实践时，随机现象的每个可能结果的发生都会呈现某种规律性. 例如：多次投掷一枚质地均匀的硬币，正面和反面向上的次数大致相等；在相同条件下多次射击同一靶子的中心，弹着点在靶子上会形成某种规律性. 因此随机现象在相同条件下进行大量重复试验时，会呈现规律性，这种规律性称为**统计规律性**.

概率论是研究随机现象统计规律性的一门数学学科. 而数理统计是以概率论为理论基础，通过对随机现象的观察以取得数据，然后对数据进行整理、分析和推断来研究随机现象的统计规律性的一门应用学科.

数理统计有很强的应用性，它的研究方法与概率论也不尽相同. 因此数理统计早就脱离了数学学科，成为一门独立的应用性学科.

2. 概率论与数理统计简史

概率论起源于对赌博问题的研究. 人们对随机现象的认识可追溯到公元前2750年，Mesopotamia（美索不达米亚）为希腊语，意思是指位于底格里斯河与幼发拉底河这两河之间的土地，当时所属古 Babyion（巴比伦），如今在伊拉克境内. 居住在那里

的人们发明了人类历史最早的随机数发生器——骰子. 他们认为掷骰子的结果是由神在操纵的,因此常常会在从事游戏和决策等活动中利用掷骰子来做出决定.

随机现象总是充满着神秘的色彩,人们对随机现象的本质却了解甚少,多少年来仅限于知道六面骰子每面出现的可能性相等这一简单事实,而对于同时掷多枚骰子的情况简直是束手无策. 直到文艺复兴之前,同时掷 3 枚骰子的所有可能的结果一直被认为是 56 种.

三四百年前,在欧洲许多国家,贵族之间盛行赌博. 他们经常使用掷骰子来进行打赌. 当时已经有许多人开始关注掷骰子时产生的一些简单问题. 意大利人在为同时掷 3 个骰子时点数之和为 9 与之和为 10 的可能性的大小而争论不休,由此请教了 Galileo(伽利略). 1613～1623 年间,Galileo 通过给 3 个骰子分别涂上不同颜色的方法,算出投掷 3 个骰子有 216 种不同结果并得到的结论是:同时掷 3 个骰子时点数之和为 10 的可能性大于之和为 9.

1651 年,有个法国人叫 de Méré(梅雷),他不但喜欢赌博,还喜欢研究因赌博而产生的许多问题. 一天他请教了当时非常有名的数学家 Pascal(帕斯卡)一个概率论历史上极其著名的"分赌本问题"(见第 1 章后习题 39). 由于初次碰到因随机现象而产生的数学问题,Pascal 一时解不出,但他对如何求解该问题非常感兴趣,经过 3 年的不懈努力,终于得出了初步的解法. 于 1654 年 7 月 29 日把该问题的解法寄给了他的一位好朋友 Femart(费马). 不久 Femart 在回信中也给出了不同的解法,以后他们通过不断的书信往来进行详细讨论并且亲自做赌博实验,以完善解法. 最终由 Pascal 解决了"分赌本问题".

从这以后,他们的研究成果引起了许多数学家的兴趣,纷纷加入了对随机现象研究的行列. 由于 Pascal 和 Femart 的开创性的工作,以后有人提议把 Pascal 第一次写信给 Femart 的日期 1654 年 7 月 29 日记为概率论的诞生日.

当时正在巴黎访问的荷兰数学家 Huygens(惠更斯)了解到了"分赌本问题",回到荷兰后也潜心研究. Huygens 经过几年的努力,不但给出了该问题解答,还解决了不少掷骰子中的许多数学问题,由此在 1657 年他完成了概率论历史上最早的一本专著《论赌博中的计算》.

1713 年,Bernoulli(伯努利)撰写了一本概率论的巨著《猜度术》,这本书是在他去世 8 年后出版的. 对于该书的评价,正如美国概率史专家 Hacking(海金)所说的"概率漫长的形成过程的终结与数学概率论的开端". 因此该书的出版也意味着作为数学学科的一个新的分支——概率论诞生了. 在书中他提出了概率论中的第一个基本极限定理"Bernoulli 大数定理". Bernoulli 从问题的提出到解决,这个过程是极其困难的,不但苦苦钻研,而且做了大量的实验,竟花费了 20 年的时间才得以证明. De Moivre(德莫佛)在 1730 年出版的著作《分析杂论》中给出了概率论中第二个基本极限定理的雏形"De Moivre - Laplace 中心极限定理". 1777 年,数学家 Buffon(蒲

丰)给出了第一个几何概型的例子——Buffon投针试验问题.

到了18、19世纪,传统数学发展到了一个很高的阶段,给予概率论以强大支撑. Laplace(拉普拉斯)在系统总结前人工作的基础上,写出了《分析概率论》,于1812年出版. 在这一著作中,首先明确地给出概率的古典定义,并在概率论中引入了有力的分析工具,如差分方程、母函数等,从而实现了概率论由单纯的组合计算到分析方法的过渡,将概率论推向一个新的发展阶段. Laplace又与几个数学家一起建立了关于"正态分布"及"最小二乘法"的理论. Poisson(泊松)将Bernoulli大数定律做了推广,建立了一种新的分布,即Possion分布.

从概率论的诞生起到20世纪初的这段时间里,概率论的发展简直到了使人着迷的程度. 继Laplace以后,概率论的中心研究课题是推广和改进Bernoulli大数定律及De Moivre - Laplace中心极限定理. 1866年Chebyshev(切比雪夫)用他所创立的Chebyshev不等式建立了有关独立随机变量序列的大数定律. 次年,又建立了有关各阶矩一致有界的独立随机变量序列的中心极限定理. 在Chebyshev所完成证明的基础上, Markov(马尔科夫)于1898年给出了补充证明. 1901年Lyapunov(李亚普诺夫)利用特征函数方法,对一类相当广泛的独立随机变量序列,证明了中心极限定理. 利用这一定理第一次科学地解释了为什么实际中遇到的许多随机变量近似服从正态分布.

Khintchine(辛钦)、Kolmogorov(柯尔莫哥洛夫)、Lévy(莱维)及Feller(费勒)等人在随机变量序列的极限理论方面作出了重要贡献.

虽然概率论在各个领域中获得许多成果,以及在其他基础学科和工程技术上得到广泛应用. 但是Laplace给出的概率定义显露出了局限性,甚至无法适用于一般的随机现象. 概率论要进一步发展,急需建立一个严格的理论体系.

1933年, Kolmogorov在测度论基础上定义了概率,即给出了概率的公理化定义,从而奠定了近代概率论的基础.

随着独立随机变量序列极限理论日趋完善,从20世纪初开始,特别是受到物理学的推动,一些数学家将兴趣逐渐转向研究随机现象随时间演变过程的规律性. 其中Markov, Wiener(维纳), Kolmogorov, Khintchine, Lévy, Doob(杜布),伊藤清等学者为现代概率论的建立和发展作出了杰出的贡献.

今天,在现代化技术进步的影响下,概率论的理论和应用方面更有着长足的发展. 概率论已被广泛应用于解决工农业生产、军事技术和科学技术中的问题. 概率论同其他知识领域相结合产生了很多分支学科如决策论、排队论、信息论、控制论、随机运筹学等.

数理统计早期的发展是结合其他学科进行的,没有形成完整的一套理论体系和应用方法. 1661年Graunt(葛朗特)进行的伦敦死亡人数调查是数理统计历史上最早的记载. 在天文学和测地学的应用中, Gauss(高斯)、Laplace(拉普拉斯)、

Legendre(勒让德)提出了最小二乘法和正态分布及其误差分析理论.在遗传学的应用中,Galton(高尔顿)提出了回归、相关等概念,创立了回归分析法.进入20世纪后,Gossett(哥色特,笔名"Student")、Fisher(费歇尔)、Neyman(奈曼)、Pearson(皮尔逊)、Wald(沃尔德)等一批学者在数理统计学的应用和理论体系创立上作出了杰出的贡献.1945年Gramer(克拉美)的《统计学的数学方法》一书的问世,标志着一门新型学科——数理统计学的诞生.

当今,随着计算机的诞生和其性能不断提高,促使数理统计在理论和应用方面有了迅速发展.数理统计还产生许多分支,如:统计质量管理、生物统计、医学统计、统计物理学、计量心理学、计量经济学等.

随机现象无处不在,作为专门研究随机现象数量规律的概率论与数理统计这两门学科担负起非常重要的角色,都是当今最为活跃的学科之一.

第1章 随机事件和概率

1.1 随机事件和运算

1.1.1 随机试验和随机事件

为了要研究随机现象的统计规律,则应该安排随机试验.这里所说的**随机试验**是指一种带有随机性质的试验.**试验**就是对随机现象进行观察、测量或科学实验并取得数据.若该试验还满足以下三个条件:

(1) 可在相同条件下重复进行.

(2) 所有可能结果不止一个,而且在试验之前应该是已知的.

(3) 每次试验后所得到的结果应该在已知所有可能结果中,并且事先是无法预知会出现哪个结果.

这种试验称为**随机试验**,为了方便起见以后简称为**试验**.

例 1.1 (抽取产品试验)一批产品共有 N 件,其中有 M 件次品.采取每次取一件进行测试,观察该件产品是正品还是次品后仍然放回,然后如此重复进行抽取共取 3 件.每次抽到的产品可能是正品也可能是次品.虽然每次取得的产品总是正品和次品之一,但抽取之前是无法预知会抽到哪个结果.

例 1.2 (投掷硬币试验)反复多次投掷一枚质地均匀的硬币,直至出现正面向上为止.因此每次出现的结果不止一个,虽然每次总是正面向上和反面向上中之一,但每次投掷之前是无法预知会哪一面向上.

例 1.3 (投飞镖试验)多次用镖掷向靶,受到各种因素的影响,镖击中靶的不同位置.虽然每次总是击中靶面上一点,但每次投掷之前是无法预知会击中哪一点.

试验的每个可能的结果称为**随机事件**,简称为**事件**.一般用大写的英文字母 A, B, C, …来表示.

例如,在例 1.1 中{取到 3 件产品中至少有 2 件为次品}是试验的一个可能的结果,因此是该试验的一个随机事件.在例 1.2 中{第 5 次时才出现正面向上 }是试验的一个可能的结果,因此也是该试验的一个随机事件.

每次试验中必然会出现的结果,称为**必然事件**,记为 Ω.而每次试验中必然不出现的结果,称为**不可能事件**,记为 Φ.要注意的是必然事件和不可能事件没有随机性,但为了方便起见,我们仍认为它们是特殊的随机事件.

在一个试验中,我们把其不能再分的而且是最简单的单一事件称为该试验的**样本点**或者称**基本事件**,通常用小写的字母 ω, υ, τ, …来表示.

例如,在例 1.1 中{取到3件产品中有 i 件次品}, $i=0, 1, 2, 3$, 均为该试验的样本点,有 4 个样本点. 在例 1.2 中{第 k 次时才出现正面向上}, $k=1, 2, \cdots$, 有无穷可数个样本点. 在例 1.3 中设 $(x, y)\in(0, a)$,则{飞镖击中点(x, y)}是该试验的样本点,有无穷不可数个样本点.

由所有的样本点组成的集合称为**样本空间**,记为 Ω. 例 1.1 中样本空间为 $\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, 在例 1.2 中样本空间为 $\Omega_2=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k, \cdots\}$, 在例 1.3 中样本空间为 $\Omega_3=\{(x, y)\mid x, y\in(0, a)\}$.

随机事件是由单个样本点或由样本点的集合组成的,所以随机事件是样本空间的一个子集. 如果试验得到的样本点 ω 在事件 A 内,此时称事件 A 发生了,记为 $\omega\in A$. 否则称事件 A 不发生,记为 $\omega\notin A$. 由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点,每次试验中 Ω 必然发生,因此 Ω 是必然事件. 空集 Φ 不包含任何样本点,每次试验中 Φ 必不发生,因此 Φ 是不可能事件.

1.1.2 随机事件之间的关系和运算

在样本空间 Ω 中有时会有多个事件,为了要研究它们之间某些规律性,将给出如下事件之间的关系和运算的定义. 设 A, B 为样本空间 Ω 中的事件.

1. 包含关系

如果事件 B 的发生必导致事件 A 发生,则称**事件 B 包含于事件 A**,记为 $B\subset A$;或称**事件 A 包含事件 B**,记为 $A\supset B$(见图 1.1).

2. 相等关系

如果 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$,则称**事件 A 与 B 相等**,记为 $A=B$.

3. 事件的并

由使得事件 A 与 B 中至少有一个发生的一些基本事件组成的事件,这个事件称为**事件 A 与事件 B 的并**,记为 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A\vee\omega\in B\}$(见图 1.2).

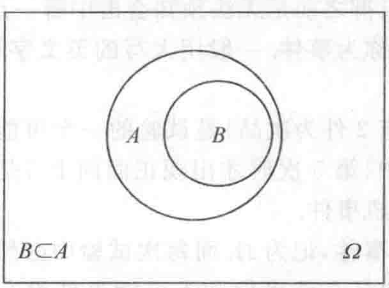

图 1.1 包含关系

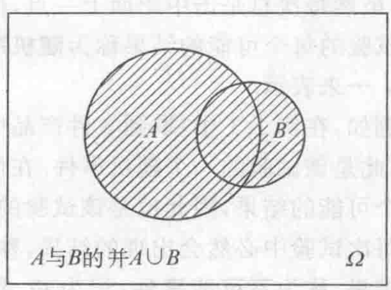

图 1.2 事件的并

一般地，由使得 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生的一些基本事件组成的事件，称 **n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并**，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

4. 事件的交

由使得事件 A 与 B 同时发生的一些基本事件组成的事件，称为**事件 A 与事件 B 的交**，记为 $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$. 在不至于混淆的情况下交的符号可省略，**事件 A 与 B 的交 AB 读作 A 乘 B**（见图 1.3）.

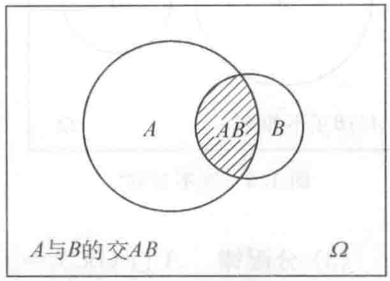

图 1.3　事件的交

一般地，由使得 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的一些基本事件组成的事件，称 **n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交**，记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，也可记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$.

5. 事件的差

由使得事件 A 发生而同时事件 B 不发生的一些基本事件组成的事件，称为**事件 A 与事件 B 的差**，记为 $A - B = \{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$（见图 1.4）.

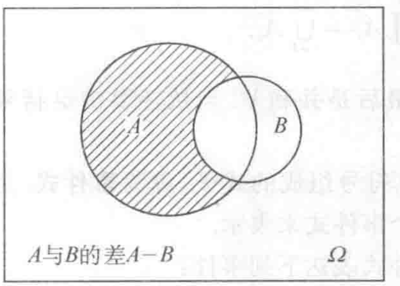

图 1.4　事件的差

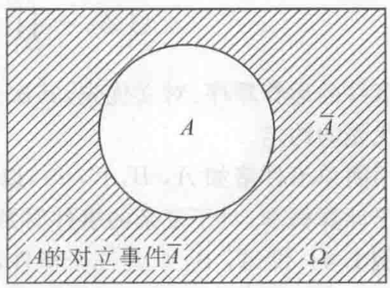

图 1.5　对立事件

6. 对立事件

样本空间 Ω 中所有不属于事件 A 的基本事件组成的事件，称为**事件 A 的对立事件或称逆事件**，记为 $\overline{A} = \{\omega \mid \omega \in \Omega \wedge \omega \notin A\}$.

事件 A 和它的对立事件 $\overline{A}$ 有一些常用的结果：$A \cup \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$. 另外利用对立事件，有 $A - B = A\overline{B}$. 显然必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 互为对立事件（见图 1.5）.

7. 互不相容

若 $AB = \varnothing$，则称**事件 A 与 B 互不相容或称互斥**. 一般地，对 n 个事件 A_1, $A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$，则称 **n 个事件 $A_1, A_2, \cdots,$**

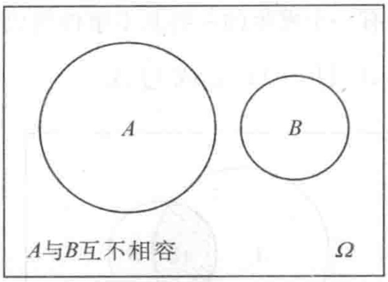

图 1.6　互不相容

A_n 互不相容.

从对立事件的定义可知,互为对立的两个事件必为互不相容,但反之未必成立.若事件 A 与 B 互不相容时,则事件 A 与 B 的并读作 A 加 B,记为 $A\cup B=A+B$(见图 1.6).

事件的运算规则:

(1) **交换律**　$A\cup B=B\cup A,\ AB=BA.$

(2) **结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\ (AB)C=A(BC).$

(3) **分配律**　$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C),\ A(B\cup C)=(AB)\cup(AC).$

(4) **对偶律(De Morgan 定理)**

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\ \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

一般地,对 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 或者可列为事件 A_i,也有以下类似的结果:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\prod_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\prod_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\ \overline{\prod_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

事件的运算顺序:对立优先,其次是交,最后是并和差.当然还要满足括号内的运算优先的约定.

用简单事件诸如 $A, B, C, \cdots$,以及运算符号组成的式子,称为**事件式**.为了以后便于计算概率,对于复杂的事件时常用一个事件式来表示.

例 1.4　设 A, B, C 为三个事件,用事件式表达下列事件:

(1) $\{A, B$ 中至少有一个不发生,C 必发生$\}$;

(2) $\{A, B, C$ 中恰有一个发生$\}$;

(3) $\{A, B, C$ 中不多于两个发生$\}$.

解　(1) $\{A, B$ 中至少有一个不发生,C 必发生$\}=\overline{AB}C$;

(2) $\{A, B, C$ 中恰有一个发生$\}=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(3) $\{A, B, C$ 中不多于两个发生$\}=\overline{ABC}$.

例 1.5　化简事件 $\overline{(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)\overline{AC}}$.

解　$\overline{(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)\overline{AC}}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\cup C}\cup\overline{\overline{AC}}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\cap\overline{C}\cup AC$

$=(A\cup B)\overline{C}\cup AC=A\overline{C}\cup B\overline{C}\cup AC=A(C\cup\overline{C})\cup B\overline{C}$

$=A\Omega\cup B\overline{C}=A\cup B\overline{C}.$