

考研数学命题人土豪金系列丛书

2016

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精练

考研数学命题人 复习全书

(数学一)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授
北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

增

本书每章习题答案与详解

北大、清华
数学满分秘笈

套原命题组成
员密押试卷

大考研命题人
快速解题方法

小时命题人
数学串讲精华

登录 www.buaapress.com.cn

获超多增值服务



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人土豪金系列

2016

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精练

考研数学命题人 复习全书

(数学一)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授
北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

本书每章习题答案与详解

+2

篇北大、清华
数学满分秘笈

+2

套原命题组成
员密押试卷

+5

大考研命题人
快速解题方法

+8

小时命题人数
学串讲精华

登录 www.buaapress.com.cn

获超多增值服务



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

作者根据教育部制定的《数学考试大纲》的要求,深入研究考研命题的特点及动态,结合多年数学命题、阅卷以及全国考研数学辅导班的经验,编写了这本复习全书。

本书详解大纲规定的所有考点,每章涵盖大纲的基本要求;详解基本概念、重要定理与方法,精辟分析典型例题。每章后都有历年真题链接,对历年统考中常见题型进行了归纳分类,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路。

本书精选了适量的同步辅导习题,并附有参考答案与解析。考生可以通过习题的演练将基本考点融会贯通,把握每章的命题特点与思路,从而从容应考,轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2016 考研数学命题人复习全书. 数学一 / 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会编著. -- 北京: 北京航空航天大学出版社, 2015.3

ISBN 978 - 7 - 5124 - 1692 - 5

I. ① 2... II. ① 全... III. ① 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 030224 号

版权所有,侵权必究。

2016 考研数学命题人复习全书(数学一)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

责任编辑 宋淑娟

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: bhpess@263.net 邮购电话:(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:50 字数:1 273 千字

2015 年 4 月第 1 版 2015 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5124 - 1692 - 5 定价:69.80 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

编 委 会

总主编	刘学元			
编 委	刘 佩	李春艳	叶 青	欧阳少波
	张晓燕	张 孜	黄 艳	王 宁
	张 杰	李 征	李智忠	黎兴刚
	汪 华	任丽娟	董 亮	王 欢
	陈冬冬	张飞飞	赵 娜	王光福
	郝显纯	高晓琼	李铁红	涂振旗
	童 武	姜宝静	杨 勇	王 宇
	陈 娟	王新会	崔杰凯	孟 楠
	陈昌勇	江海波	苗红宜	张永艳
	潘小春	王 静	尤承业	徐 荣
	刘德荫			

前言

考研整体形势分析

众所周知,“考研热”从兴起到如今的愈演愈烈已是不争的事实.我国每年报考硕士研究生的人数持续快速增长.考研的激烈竞争在不断升温.事实上,成功之路有多条,毕竟条条大路通罗马,但为什么我国的青年一代会把目光聚焦在考研这条路上呢?笔者认为,其中的原因是多方面的,但最根本的原因在于,考研这条路是将广大青年学子的个人发展与国家、社会的发展趋势紧密有机地联系在一起的,有着高度的内在统一性.我国从20世纪80年代开始改革开放,对内以经济建设为中心,对外学习西方先进科学技术,至今已逾30年.我国经济发展所取得的成就已为世界瞩目.中国为什么能成功?关键的因素就在于人才.国家的发展需要大量高素质、高学历的人才,这就为当代大学生提供了一个鲜明的导向.而从每个青年人渴望成功、实现自我价值的角度讲,将个人的前途和命运与国家、人民的需要结合起来,无疑是明智的选择.由此,考研成为广大青年学生的首选之路就不足为奇了.

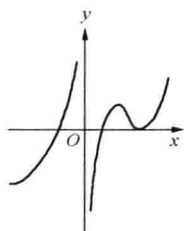
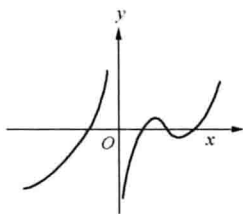
考研数学(数学一)考点分析与复习备考策略

一、考研数学(数学一)考点分析

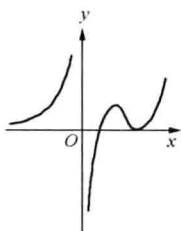
(一) 考查基本概念、基本理论、基本方法

从原则上讲,试卷中的选择题、填空题基本上都是反映出题者考查考生“三基”的意图的.

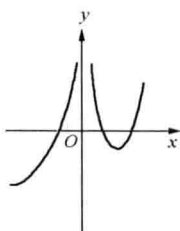
例1 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y=f(x)$ 的图形如右图所示,则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为().



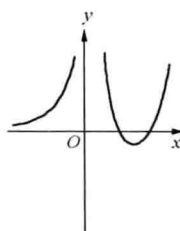
(A)



(B)



(C)



(D)



【解析】 本题考查考生对于函数及其导数的性态,包括单调性、极值点等的理解掌握情况.考生需熟悉以下结论: $f(x)$ 可导,则 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调上升; $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 单调上升不减;反之, $f(x)$ 在某区间可导并单调上升,则 $f'(x) > 0$.本题中,当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调上升,则显然 $f'(x) \geq 0 (x < 0)$,可排除(A),(C);当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 的变化情况是先升后降再升,所以 $f'(x)$ 相应的变化情况是正 $\rightarrow$ 负 $\rightarrow$ 正,所以(B)也可排除,综上知正确选项为(D).

【点评】 要求考生深刻理解函数及其导数的定义,各种性质之间的关系.这一部分内容属于较基础的范畴,但在考研试题中出现频率较高,应予以重视.

例2 设 $z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$, f, φ 具有二阶连续导数,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

【解析】 本题考查求复合函数的二阶混合偏导数的知识,求解步骤是常规性的,原则上本题为送分题,但仍有部分考生因概念不清而失分.利用混合偏导数在连续的条件与求导次序无关的特点,可先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$,选择标准是计算的繁简程度.若先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{1}{x}f'(xy)y + y\varphi'(x+y).$$

再求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2}f'(xy) \cdot x + \frac{1}{x}f''(xy)xy + \frac{1}{x}f'(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y) \\ &= f''(xy) \cdot y + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

【点评】 关于复合函数求导的题目是比较基本的题型,要注意分清中间变量与自变量,对哪个自变量求导,尤其是注意不要漏项.

例3 已知方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

无解,则 $a =$ _____.

【解析】 本题考查线性非齐次代数方程组无解的充分必要条件及增广矩阵,初等行变换等知识点,亦属于“三基”类题目.先对增广矩阵做初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & a-3 \end{array} \right].$$

若 $a = -1$,则增广矩阵成为 $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$,此时 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$,显然

方程组无解,即正确答案为 $a = -1$.本题较易使考生出错之处在于,当 $|A| = 0$ 时 $a = -1$ 或 $a = 3$,但却忽视了当 $|A| = 0$ 时,方程组可能无解也可能有无穷解的情况,这一点要牢记.

【点评】 线性代数方程组解的存在情况与系数矩阵、增广矩阵之间的关系要熟练掌握.

例4 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则().

(A) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$ (B) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$

(C) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$ (D) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$

【解析】 本题考查矩阵的秩、行列式的值等知识点. 由题设知, AB 是 $m \times m$ 矩阵. 方阵行列式为 0 的充分必要条件是秩小于方阵阶数, 此处即 $r(AB) < m$. 由于

$$r(AB) \leq r(B) \leq \min(m, n),$$

可见当 $m > n$ 时, 必有 $r(AB) \leq n < m$, 从而可得出结论(B).

【点评】 n 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 0 \Leftrightarrow$ 矩阵 A 不可逆 $\Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0$ 有非 0 解 $\Leftrightarrow 0$ 是矩阵 A 的特征值 $\Leftrightarrow A$ 的行或列向量线性相关.

例5 设随机变量 x 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 且二次方程 $y^2 + 4y + x = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\mu =$ _____.

【解析】 本题考点在于正态分布. 先定义事件 A 为“二次方程 $y^2 + 4y + x = 0$ 无实根”, 则知 $A = \{16 - 4x < 0\} = \{x > 4\}$. 由题设已知

$$P(A) = P\{x > 4\} = \frac{1}{2}, \quad \text{从而} \quad P\{x > 4\} = 1 - P\{x \leq 4\} = 1 - \Phi\left\{\frac{4 - \mu}{\sigma}\right\},$$

即

$$1 - \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}, \quad \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2},$$

因而 $\frac{4 - \mu}{\sigma} = 0$, 即 $\mu = 4$.

【点评】 概率论中正态分布是最重要的分布, 也是最常见的考点. 考生应熟悉其基本概念及计算方法.

例6 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _____.

【解析】 本题考点为随机事件独立性, 由题设知, A 与 B 独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$, 同样 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 亦独立, 即 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$, 由已知 $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{9}$, 以及

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(B\bar{A}) \Rightarrow P(A) - P(AB) = P(B) - P(BA) \Rightarrow P(A) = P(B) \\ &\Rightarrow P(\bar{A}) = P(\bar{B}) \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

所以正确答案为 $P(A) = \frac{2}{3}$.

【点评】 独立随机事件的概率计算问题也是常见考点. 考生只要概念清晰, 拿到这一部分的分应该不难.

(二) 考查重要定理、重要公式

数学中有不少重要定理和公式, 考生必须在正确理解的基础上加以灵活运用.

例7 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$. 试证: 在



$(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

【解析】 本题考查考生对零点定理、积分中值定理、罗尔定理等的灵活运用. 有以下两种较常见的做法:

证法 1 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ($0 \leq x \leq \pi$), 显然 $F(0) = F(\pi) = 0$. 由题设知

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0, \quad \text{即} \quad \int_0^{\pi} \cos x dF(x) = 0,$$

从而

$$F(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx = 0.$$

由积分中值定理知, 存在 $0 < \alpha < \pi$ 使 $\pi F(\alpha) \sin \alpha = 0$, 而 $\sin \alpha \neq 0$, 所以 $F(\alpha) = 0$. 综上所述可知 $F(0) = F(\alpha) = F(\pi) = 0$, 由罗尔定理知, $\exists \xi_1 \in (0, \alpha), \xi_2 \in (\alpha, \pi)$, 使 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$, 证毕.

证法 2 反证法. 首先由积分中值定理知, $\exists \xi_1 \in (0, \pi)$, 使 $f(\xi_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = 0$.

然后假设 ξ_1 是 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内的唯一零点, 则 $f(x)$ 在 $(0, \xi_1)$ 与 (ξ_1, π) 内不变号. 而由 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$ 知 $f(x)$ 在 $(0, \xi_1)$ 与 (ξ_1, π) 内异号. 不失一般性, 设 $(0, \xi_1)$ 内 $f(x) > 0$, 则 (ξ_1, π) 内 $f(x) < 0$. 由已知 $\int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0, \int_0^{\pi} f(x) dx = 0$ 及 $\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 内单调递减,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx \\ &= \int_0^{\xi_1} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx + \int_{\xi_1}^{\pi} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx > 0 \end{aligned}$$

矛盾. 由此在 $(0, \pi)$ 内除 ξ_1 外 $f(x)$ 至少还存在一个零点 ξ_2 . 结论得证.

【点评】 高等数学中零点定理、积分中值定理等概念性、技巧性都很强, 需经过大量练习才能掌握并灵活运用.

例 8 设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

【解析】 本题是求证函数不等式的问题, 有以下两种基本证明方法:

证法 1 将待证不等式化为 $\frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b - a} > \frac{4}{e^2}$ 的形式, 观察此结构形式, 可知是适用于

拉格朗日中值定理的形式, 所以令 $f(x) = \ln^2 x$, 在 $[a, b]$ 区间上由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b - a} = f'(\xi) = 2 \frac{\ln \xi}{\xi},$$

其中 $\xi \in (a, b) \subset (e, e^2)$. 引入辅助函数 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$, 当 $x > e$ 时

$\varphi'(x) < 0$, 从而 $\varphi(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 内单调下降, 因此 $\varphi(\xi) = \frac{\ln \xi}{\xi} > \varphi(e^2) = \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$,

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 2 \frac{\ln \xi}{\xi} > \frac{4}{e^2}$. 综上所述得出结论

$$\frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b - a} > \frac{4}{e^2}.$$

证毕.

证法 2 引入辅助函数 $F(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x - a)$, 显然

$$F'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}, \quad F''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}.$$

当 $x > e$ 时, $F''(x) < 0$, 则 $F'(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 内单调下降.

当 $e < x < e^2$ 时, $F'(x) > F'(e^2)$, 而 $F'(e^2) = 0$, 所以 $F'(x) > 0 (x \in (e, e^2))$.

由此知 $F(x)$ 在 (e, e^2) 内单调上升, 所以 $F(b) > F(a) = 0$, 即 $\ln^2 b - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(b - a) > 0$, 证毕.

【点评】 证明函数不等式问题的实质是利用导数性质判断函数正负号的问题, 常用思路是利用单调性、极值点或中值定理加以证明.

(三) 考查综合运用多个知识点

例 9 设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中, 其侧面积满足方程 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米, 时间单位为小时), 已知体积减小的速率与侧面积成正比 (比例系数为 0.9), 问: 高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时?

【解析】 本题综合考查多个知识点, 如计算曲面面积, 已知截面面积求立体体积, 常微分方程求解等, 综合性较强. 由题设, 设 t 时刻雪堆体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$. 已知侧面积满足方程 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-4x}{h(t)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4y}{h(t)}$, 从而

$$S(t) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\stackrel{\substack{\text{采用极坐标} \\ \text{变换}}}{=} \frac{1}{h(t)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}h(t)} \sqrt{h^2(t) + 16r^2} \cdot r dr = \frac{13}{12}\pi h^2(t),$$

$V(t) = \int_0^{h(t)} dz \iint_{D_z} dx dy$, 其中 D_z 为 $\frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)} \leq h(t) - z(t)$, 即 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}[h^2(t) - h(t)z]$, 则

$$V(t) = \int_0^{h(t)} \frac{\pi}{2} [h^2(t) - h(t)z] dz = \frac{\pi}{4} h^3(t).$$

由题设知 $\frac{dV}{dt} = -0.9S$, 将 $V(t)$, $S(t)$ 的表达式代入可得

$$\frac{\pi}{4} \cdot 3h^2(t) \frac{dh}{dt} = -0.9 \times \frac{13\pi}{12} h^2(t),$$

即 $\frac{dh}{dt} = -\frac{13}{10}$, 而 $h(0) = 130$, 解之得 $h(t) = -\frac{13}{10}t + 130$. 令 $h(t) = 0$, 解出 $t = 100$. 所以雪堆全部融化需要 100 小时.



例 10 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的, 则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} =$

$$\frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3} \quad (\quad).$$

(A) 相交于一点 (B) 重合 (C) 平行但不重合 (D) 异面

【解析】 本题考查空间两直线的关系, 是空间解析几何与线性代数的综合题, 涉及矩阵的秩、三向量共面的充要条件、直线方程与两直线的关系等知识点, 难度较大. 由题设, 将矩阵作变换

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{bmatrix},$$

该矩阵仍然满秩, 则向量 $\mathbf{v}_1 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ 与 $\mathbf{v}_2 = (a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 线性无关. 由此可排除(B), (C), 另一方面在题设两直线上各取一点 (a_3, b_3, c_3) 与 (a_1, b_1, c_1) 构造向量 $\mathbf{v}_3 = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$, 计算出混合积

$$[\mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \\ a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

知应选(A).

二、考研数学(数学一)复习备考策略

研究生入学考试是选拔性考试, 当然重在考查考生能力的高低. 能力是建立在基础之上的, 基本功不扎实, 一切无从谈起. 从考试大纲来看, 要求考生对基本知识、基本概念、概念的掌握和理解要深、要透、要准, 尽管大学期间的期中、期末考试基本反映了这一要求, 但从程度上讲, 远没有考研的要求高. 因此, 狠抓基础是一项必要的工作, 虽然很多考生可能会认为基础的东西学起来有点费力不讨好, 短期收效不明显, 但笔者再三强调, 不可轻视基础, 必须夯实到理解得入木三分的程度.

总而言之, 考研准备工作的第一阶段(当然周期长短因人而异)应落脚于基础知识、基本概念的学习和巩固. 第二阶段的展开要以第一阶段为前提, 不可急功近利, 跨越阶段. 进入第二阶段的主要工作就是训练和提高能力. 能力反映在解答题目的准确性和速度上, 反映在思路是否开阔和严密上, 这就需要大量练习, 认真钻研各种题型. 在开始具体钻研考点、题目、技巧后, 注意不必强迫自己所有遇见的题目都要做出来, 做题时总会碰到百思不得其解的问题. 钻研固然是好事, 但钻牛角尖则费时费力, 得不偿失, 此时可以借助于解答, 只要彻底弄懂, 下次再遇到同样的或同类型的问题可以顺利解决就行了. 尤其要注意的一点是, 学习一个阶段后要善于自我归纳总结, 不断从各类题目中提炼出最本质、最精髓、最易于自己掌握和应用起来得心应手的东西. 学而不思则罔, 进入题海只是手段, 不是目的, 最终要跳出题海, 站在更高角度看待题海, 这就需要不断深入和卓有成效的思考.

经过了前两个阶段,考生应该已经有了长足的进步,最后一个阶段当然是冲刺阶段。此时每个考生都可能会感到疲惫,甚至厌学,出现这样的心理反应并不可怕,可怕的是不能正确对待,自我调整。临近考试,心理压力增大,体力、精力下降,学会自我调节、自我减负是顺利通过考试的有力保障。这一阶段应以查缺补漏、归纳总结、实战模拟为主要内容。其间,效率问题尤为重要,不能再过多投入精力于细枝末节,要着眼于以点带面,让所有知识点、难点在脑海中以系统化的状态呈现出来。实战模拟是不可或缺的,最好的模拟题当然就是历年的真题,但真题不仅要求做完、纠错这么简单,应该作为重点对象反复研究、体会,从中发现规律性的东西。除此之外,多做一些其他的模拟试题,以强化熟练程度和解题技巧。

关于临场应试经验或技巧,笔者认为最重要的是心理素质要过硬。经过长期准备之后,考生的大体水平已不会在短时间有大的改变,能否考出好成绩,甚至超水平发挥,基本上取决于临场发挥。考前最后阶段,考生一方面要学会调节心理状态,另一方面在实战模拟中培养考场上的应变能力。题目有难有易,会做的一定要拿分,不会的尽量多答出一些可以拿分的环节,争取结果最优,千万不可患得患失,影响大局。在实战模拟的每一套模拟题解答中,学会估计真正应试中自己会遇到哪些困难,思想准备充分了,才能临阵不乱。实际考试中,预料不到的困难也时有发生。这大体上分为两种情况:一种是非技术性因素,即与知识水平、考题难易无关的因素,如答题时看错题目或漏答题目,考试用具出现差错等,这些虽属于低级失误,却可能造成不堪设想的后果,考生应在考前充分考虑周到,坚决杜绝。另一种就是纯技术性因素了,如遇见无从下手的题目或似曾相识但却不知所措的题目,此时考生唯一要做的就是平心静气,积极思考应对方法,切不可自乱阵脚。事实上,考试意图中已包含了考查考生应付困难的能力,而不仅仅考查考生的知识水平。总而言之,知识水平高和应付困难的能力高者必然会脱颖而出。

本书是众多数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。其中的每一道试题,既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此,对照考试大纲分析、研究这些试题,考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出各部分内容的重点、难点,以及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,从而从容应考,轻取高分。

编者 于北大燕园

目 录

第一部分 高等数学

第1章 函数、极限与连续	1
第1节 函 数	1
一、基本概念	1
二、函数的基本特性	3
三、典型例题精解	4
第2节 极 限	11
一、基本概念	11
二、重要定理与性质	13
三、典型例题精解	15
第3节 函数的连续性	28
一、基本概念	28
二、重要定理与性质	28
三、典型例题精解	29
历年考研真题链接	31
题型强化练习	42
第2章 导数与微分	46
第1节 导数与微分及其实际意义	46
一、基本概念	46
二、基本公式与求导法则	47
三、典型例题精解	48
第2节 导数的计算与高阶导数	50
一、基本概念	50
二、基本求导法则	50
三、典型例题精解	51
第3节 微分中值定理与导数的应用	56
一、基本概念	57
二、重要定理与方法	58
三、典型例题精解	63
历年考研真题链接	75
题型强化练习	87



第3章 不定积分	95
第1节 不定积分的概念和性质	95
一、基本概念	95
二、重要定理与性质	95
三、典型例题精解	96
第2节 基本积分法及各类函数的积分方法	97
一、基本积分法	97
二、常见的几种凑微分的积分法	98
三、典型例题精解	98
历年考研真题链接	101
题型强化练习	103
第4章 定积分的计算及其应用	105
第1节 定积分的计算	105
一、基本概念	105
二、重要定理与性质	106
三、典型例题精解	108
第2节 定积分的应用	113
一、基本概念	113
二、定积分应用的计算公式	113
三、典型例题精解	115
历年考研真题链接	119
题型强化练习	131
第5章 向量代数和空间解析几何	136
第1节 向量代数	136
一、基本概念	136
二、向量的运算及其坐标表达式	136
三、典型例题精解	138
第2节 空间解析几何	139
一、基本概念	139
二、平面、直线与曲面	139
三、典型例题精解	142
历年考研真题链接	144
题型强化练习	145
第6章 多元函数的微分与应用	147
第1节 多元函数及其极限与连续性	147
一、基本概念	147
二、重要定理和性质	148
三、典型例题精解	148
第2节 偏导数与全微分	149

一、基本概念	149
二、重要定理与公式	150
三、典型例题精解	152
第3节 偏导数的应用	157
一、基本概念	157
二、重要定理及公式	157
三、典型例题精解	158
历年考研真题链接	165
题型强化练习	172
第7章 多元函数积分学	176
第1节 重积分	176
一、基本概念	176
二、重要性质与公式	177
三、重积分的应用与其他结论	178
四、典型例题精解	181
第2节 曲线积分、曲面积分及场论初步	194
一、基本概念	195
二、重要定理与公式	197
三、典型例题精解	203
历年考研真题链接	216
题型强化练习	229
第8章 无穷级数	234
第1节 常数项级数	234
一、基本概念	234
二、重要性质与判别法	235
三、典型例题精解	237
第2节 幂级数	243
一、基本概念	243
二、重要定理与性质	244
三、典型例题精解	246
第3节 傅里叶级数	254
一、基本概念	255
二、重要定理与函数的傅里叶级数展开式	255
三、典型例题精解	256
历年考研真题链接	258
题型强化练习	266
第9章 常微分方程	270
第1节 一阶微分方程	270
一、基本概念	270



二、一阶微分方程的分类及其解法	270
三、典型例题精解	272
第2节 可降阶的高阶微分方程	279
一、基本概念	279
二、可降阶的高阶微分方程及其解法	279
三、典型例题精解	280
第3节 高阶线性微分方程	283
一、基本概念	283
二、高阶线性微分方程的重要定理、性质及其解法	283
三、典型例题精解	286
第4节 微分方程的应用	291
一、导言	291
二、微分方程的几何应用	291
三、微分方程的物理应用	295
历年考研真题链接	299
题型强化练习	308

第二部分 线性代数

第1章 行列式	311
第1节 排列与逆序	311
一、基本概念	311
二、重要定理及公式	311
三、典型例题精解	311
第2节 n 阶行列式	312
一、基本概念	312
二、重要定理与性质	313
三、典型例题精解	315
历年考研真题链接	323
题型强化练习	324
第2章 矩 阵	326
第1节 矩阵的概念与运算	326
一、基本概念	326
二、矩阵的运算与运算规律	327
三、典型例题精解	328
第2节 逆矩阵	331
一、基本概念	331
二、重要性质与求逆矩阵的方法	331
三、分块矩阵及其运算法则	332

四、典型例题精解	333
第3节 矩阵的秩	338
一、基本概念	339
二、重要公式与结论	339
三、典型例题精解	339
历年考研真题链接	342
题型强化练习	348
第3章 向 量	352
第1节 向量组的线性相关与线性无关	352
一、基本概念	352
二、重要性质与定理	353
三、典型例题精解	354
第2节 向量组与矩阵的秩	358
一、基本概念	358
二、重要定理与公式	359
三、典型例题精解	359
第3节 n 维向量空间	363
一、基本概念	363
二、重要定理与性质	364
三、典型例题精解	365
历年考研真题链接	367
题型强化练习	371
第4章 线性方程组	375
第1节 线性方程组	375
一、基本概念	375
二、重要定理与方法	376
三、典型例题精解	377
第2节 线性方程组解的结构及判定	381
一、基本概念	381
二、重要定理与性质	382
三、典型例题精解	383
历年考研真题链接	391
题型强化练习	405
第5章 矩阵的特征值和特征向量	410
第1节 矩阵的特征值和特征向量	410
一、基本概念	410
二、重要定理与结论	410
三、典型例题精解	411
第2节 相似矩阵与矩阵的对角化	416



一、基本概念	416
二、重要定理与性质	417
三、典型例题精解	418
历年考研真题链接	421
题型强化练习	430
第6章 二次型	434
第1节 二次型和它的标准形	434
一、基本概念	434
二、重要定理与方法	435
三、典型例题精解	436
第2节 正定二次型与正定矩阵	442
一、基本概念	442
二、重要定理与性质	442
三、典型例题精解	443
历年考研真题链接	448
题型强化练习	453

第三部分 概率论与数理统计

第1章 随机事件与概率	454
一、基本概念	454
二、重要性质与公式	456
三、典型例题精解	458
历年考研真题链接	465
题型强化练习	467
第2章 随机变量及其概率分布	469
一、基本概念	469
二、基本性质与方法	471
三、典型例题精解	473
历年考研真题链接	480
题型强化练习	485
第3章 多维随机变量及其概率分布	488
一、基本概念	488
二、基本性质与方法	489
三、典型例题精解	492
历年考研真题链接	505
题型强化练习	510
第4章 随机变量的数字特征	514
一、基本概念	514