MOTAI LUOJI ZHONG DE DIANFAN WENTI YANJIU

模态逻辑中的典范问题研究

■ 裘江杰 / 著

中国社会科学出版社

MOTAI LUOJI ZHONG DE DIANFAN WENTI YANJIU

模态逻辑中的典范问题研究

■ 裘江杰 / 著

中国社会科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

模态逻辑中的典范问题研究／裘江杰著．—北京：中国社会科学出版社，2014.6
ISBN 978－7－5161－4106－9

Ⅰ.①模…　Ⅱ.①裘…　Ⅲ.①模态逻辑—研究　Ⅳ.①B815.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第062287号

出 版 人　赵剑英
责任编辑　凌金良
责任校对　夏晓牧
责任印制　王炳图

出　　版　中国社会科学出版社
社　　址　北京鼓楼西大街甲158号（邮编100720）
网　　址　http://www.csspw.cn
　　　　　中文域名:中国社科网　　010－64070619
发 行 部　010－84083685
门 市 部　010－84029450
经　　销　新华书店及其他书店

印　　刷　北京君升印刷有限公司
装　　订　廊坊市广阳区广增装订厂
版　　次　2014年6月第1版
印　　次　2014年6月第1次印刷

开　　本　710×1000　1/16
印　　张　16.25
字　　数　240千字
定　　价　47.00元

目　　录

第一章

绪　论

本章介绍全书的基础与背景。在第一节给出基本的概念，更进一步的概念放在相应的章节里；第二节是对典范问题诸方向研究的一个梳理，据此，我们了解研究现状并且明确典范问题研究的意义。在第三节中介绍全书的主要内容以及章节安排。

第一节　预备知识

在本节里我们给出全书所基于的基本框架，主要包括集合论、模型论以及模态逻辑本身的一些基本概念与结果，对各部分只介绍必要的定义，列出基本的命题，并且省略了对它们的证明，相应细节可以分别参考文献（K. Hrbacek, and T. Jech, 1999）、（C. C. Chang, and H. J. Keisler, 1990）及（Blackburn, Rijke and Venema, 2001）。

下面首先介绍用到的集合论的基本内容，除了极少的一两处，在那里也会交代清楚，全书的讨论都是在ZFC集论公理系统框架内进行的，我们不拟罗列全体的集论公理，接下来直接介绍要用到的集论概念与记号。

1.1.1 记号

（1）用$x \in X$表示x是集合X的元素。

（2）用符号$\emptyset$表示空集，它满足$\neg \exists x(x \in \emptyset)$。

（3）用$X \subseteq Y$表示X是Y的子集，即它们满足$\forall x(x \in X \to x \in Y)$。

（4）对任意给定的集合X、Y，用$X\cup Y$表示X与Y的并；用$X\cap Y$表示X与Y的交；用$X-Y$表示X与Y的差；更一般地，若Z是一个集合族，那么，用$\bigcup Z$表示Z的广义并，用$\bigcap Z$表示Z的广义交。

（5）对给定的集合X，用$\wp(X)$表示X的幂集，即它满足$\forall x(x\in\wp(X)\leftrightarrow x\subseteq X)$。

（6）用$\mathbb{N}$表示自然数集，对$\mathbb{N}$的每个非空子集X，用$minX$表示X中的最小元；用$maxX$表示X中的最大元，若最大元存在的话。

（7）对给定的集合X，用$|X|$表示X的基数。

（8）对给定的集合X、Y，用$X\times Y$表示X与Y的卡氏积；当$X=Y$时，则用X^2表示。

1.1.2 定义

对给定的集合X、Y，$X\times Y$的子集R称为X与Y上的二元关系；$R\subseteq X^2$则称为X上的二元关系，$\langle x,y\rangle\in R$也记为xRy。

1.1.3 定义

设R是X上的二元关系。

（1）称R是传递的，若它满足$\forall x\forall y\forall z(xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$。

（2）称R是自返的，若它满足$\forall x(xRx)$。

（3）称R是禁自返的，若它满足$\forall x(\neg xRx)$。

（4）称R是对称的，若它满足$\forall x\forall y(xRy\rightarrow yRx)$。

（5）称R是禁对称的，若它满足$\forall x\forall y(xRy\rightarrow\neg yRx)$。

（6）称R是反对称的，若它满足$\forall x\forall y(xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)$。

（7）称R是三歧的，若它满足$\forall x\forall y(xRy\vee yRx\vee x=y)$。

（8）称R是右不分叉的，若它满足$\forall x\forall y\forall z(xRy\wedge xRz\rightarrow yRz\vee zRy\vee y=z)$。

1.1.4 定义

设R是X上的二元关系。

（1）称R是X上的偏序，若它是自返、传递及反对称的。

（2）称R是X上的严格偏序，若它是禁自返及传递的。

（3）称R是X上的线序，若它是三歧的偏序。

（4）称R是X上的严格线序，若它是三歧的严格偏序。

1.1.5 命题

设R是X上的二元关系，下面命题成立。

（1）若R是偏序，那么$R-\{\langle a, a\rangle : a\in X\}$是严格偏序。

（2）若R是严格偏序，那么$R\cup\{\langle a, a\rangle : a\in X\}$是偏序。

1.1.6 定义

设R是X上的二元关系。

（1）Y是X的非空子集，$a\in Y$，称a是Y中的R极小元，若它满足$\forall x(x\in Y\to\neg xRa)$。

（2）Y是X的非空子集，$a\in Y$，称a是Y中的R最小元，若它满足$\forall x(x\in Y\to aRx\vee a=x)$。

（3）称R是良基的，若X的每个非空子集中都有R极小元。

（4）称R是良序，若它是良基的线序。

1.1.7 命题

设R是X上的线序，那么，R是良序，当且仅当，无X中的元素组成一个无穷长的R下降链。

1.1.8 定义

设f是X与Y上的二元关系。

（1）称f是X到Y的映射，若它满足$\forall x\in X\exists!\ y\in Y(xfy)$；这里$\exists!$表示“存在唯一”，当$f$是映射时，把$xfy$记为$f(x)=y$。

（2）称f是满射，若它是映射并且满足$\forall y\in Y\exists x\in X(f(x)=y)$；称$f$是单射，若它是映射并且满足$\forall x\in X\forall y\in X(f(x)=f(y)\to x=y)$；当上下文清楚时，也称满射是满的，单射是单的；即满又单的映射称为双射。

1.1.9 命题

设X与Y是两个集合，若有从X到Y的单（满）射，那么有从Y到X的满（单）射。

1.1.10 定义

设f是X到Y的映射。

（1）称X的基数小于等于Y的基数，记为$|X|\leqslant|Y|$，若有从X到Y的单射。

（2）称X的基数等于Y的基数，记为$|X|=|Y|$，若有从X到Y的双射。

（3）记$\mathbb{N}$的基数为ω；对集合X，当$|X|<\omega$时，称X是有穷集；当$|X|=\omega$时，称X是可数无穷集；当$|X|>\omega$时，称X是不可数无穷集。

1.1.11 命题

对任意的集合X，$|X|<|\wp(X)|$。

1.1.12 定义

设X是一个非空集，F是$\wp(X)$的一个子集。

（1）称F保持有穷交，若对F的每个非空有穷子集E，$\bigcap E\neq\varnothing$。

（2）称F是X上的一个滤，若它满足①$X\in F$并且$\varnothing\notin F$；②若Y、$Z\in F$，则$Y\cap Z\in F$；③若$Y\in F$，并且$Y\subseteq Z$，则$Z\in F$。

（3）称F是X上的一个超滤，若它是滤并且满足对任意的$Y\subseteq X$，$Y\in F$或者$X-Y\in F$。

1.1.13 命题

设X是一个非空集，$\varDelta$是$\wp(X)$的一个子集，若$\varDelta$保持有穷交，则有超滤F，$F\supseteq\varDelta$。

上面总结了全书要用到的集合论中最基本的概念与结果，接下来介绍一阶模型论中的相关内容。

1.1.14 定义

一个一阶语言$\mathcal{L}$由如下两两不相交的符号集组成。

（1）一集函数符号$\mathcal{F}$，对每个$f\in\mathcal{F}$，$n(f)$ 确定它的元数；

（2）一集关系符号$\mathcal{R}$，对每个$R\in\mathcal{R}$，$n(R)$ 确定它的元数；

（3）一集常元符号$\mathcal{C}$；

（4）一集变元符号$\mathcal{V}$；

（5）布尔连接词$\rightarrow$，$\neg$，$\leftrightarrow$，$\wedge$，$\vee$；

（6）量词$\forall$，$\exists$；

（8）等词$=$；

（7）辅助符号)，(。

其中$\mathcal{F}$、$\mathcal{R}$与$\mathcal{C}$可以是空集，它们的元素被称为是$\mathcal{L}$的非逻辑符号；而（4）至（8）中的元素被称为是逻辑符号，它们是所有的一阶语言公有的；变元集$\mathcal{V}$一般取为可数无穷集，但是在一些具体的讨论中，出于应用或者理论研究的需要，也会把它取为一个有穷集或者不可数无穷集。$\mathcal{L}$由它所有的非逻辑符号唯一确定，也用$\mathcal{L}=\mathcal{F}\cup\mathcal{R}\cup\mathcal{C}$强调这个事实。$\mathcal{L}$的基数$|\mathcal{L}|$定义为$|\mathcal{F}\cup\mathcal{R}\cup\mathcal{C}|+\omega$。

1.1.15 定义

一阶语言$\mathcal{L}$的项集$\mathcal{T}$是满足下面条件的最小集。

（1）$\mathcal{C}\cup\mathcal{V}\subseteq\mathcal{T}$；

（2）若$f\in\mathcal{F}$是n元函数符号，t_1，$\cdots$，$t_n\in\mathcal{T}$，则$f(t_1, \cdots, t_n)\in\mathcal{T}$。

1.1.16 定义

在一阶语言$\mathcal{L}$上，如下递归定义从$\mathcal{T}$到$\wp(\mathcal{V})$的映射$\mathcal{V}ar$，它给出了每个项的变元集。

（1）对$c\in\mathcal{C}$，$\mathcal{V}ar(c)=\emptyset$；

（2） 对$v\in\mathcal{V}$，$\mathcal{V}ar(v)=v$；

（3） $\mathcal{V}ar(f(t_1, \cdots, t_n))=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}\mathcal{V}ar(t_i)$。

1.1.17 定义

一阶语言$\mathcal{L}$的公式集$\mathcal{F}or(\mathcal{L})$是满足下面条件的最小集。

（1） 若t_1，t_2为项，那么$t_1=t_2\in\mathcal{F}or(\mathcal{L})$；

（2） 若$R\in\mathcal{R}$是n元关系符号，$t_1, \cdots, t_n\in\mathcal{T}$，则$R(t_1, \cdots, t_n)\in\mathcal{F}or(\mathcal{L})$；

（3） 若$\varphi\in\mathcal{F}or(\mathcal{L})$，则$\neg\varphi\in\mathcal{F}or(\mathcal{L})$；

（4） 若φ、$\psi\in\mathcal{F}or(\mathcal{L})$，$\otimes\in\{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$，则（$\varphi\otimes\psi$）$\in\mathcal{F}or(\mathcal{L})$；

（5） 若$\varphi\in\mathcal{F}or(\mathcal{L})$，$v\in\mathcal{V}$，则$\forall v\varphi$、$\exists v\varphi\in\mathcal{F}or(\mathcal{L})$。

由（1）与（2）得到的公式称为原子公式。

1.1.18 定义

在一阶语言$\mathcal{L}$上，如下递归定义的从$\mathcal{F}or(\mathcal{L})$到$\wp(\mathcal{V})$的映射$free$给出了每个公式的自由变元集。

（1） $free(t_1=t_2)=\mathcal{V}ar(t_1)\cup\mathcal{V}ar(t_2)$；

（2） $free(R(t_1, \cdots, t_n))=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}\mathcal{V}ar(t_i)$；

（3） $free(\neg\varphi)=free(\varphi)$；

（4） $free(\varphi\otimes\psi)=free(\varphi)\cup free(\psi)$，对$\otimes\in\{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$；

（5） $free(\forall v\varphi)=free(\varphi)-\{v\}$；

（6） $free(\exists v\varphi)=free(\varphi)-\{v\}$。

$free(\varphi)$中的变元称为φ的自由变元。用$\varphi(v_1, \cdots, v_n)$表示$free(\varphi)\subseteq\{v_1, \cdots, v_n\}$。没有自由变元的公式称为句子。

1.1.19 定义

在一阶语言$\mathcal{L}$上，如下递归定义的从$\mathcal{F}or(\mathcal{L})$到$\wp(\mathcal{F}or(\mathcal{L}))$的映射$sub$给出了每个公式的子公式集。

(1) $sub(t_1 = t_2) = \{t_1 = t_2\}$;

(2) $sub(R(t_1, \cdots, t_n)) = \{R(t_1, \cdots, t_n)\}$;

(3) $sub(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup sub(\varphi)$;

(4) $sub(\varphi \otimes \psi) = \{\varphi \otimes \psi\} \cup sub(\varphi) \cup sub(\psi)$,对$\otimes \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$;

(5) $sub(\forall v\varphi) = \{\forall v\varphi\} \cup sub(\varphi)$;

(6) $sub(\exists v\varphi) = \{\exists v\varphi\} \cup sub(\varphi)$。

设$\forall v\varphi \in sub(\psi)$,则称$\varphi$为$\forall v$在$\psi$的一个辖域,同理可定义$\exists v$的辖域。出现在$\forall v$或者$\exists v$的辖域中的$v$称为变元的一次约束出现。同样可以归纳定义公式的约束变元集。

1.1.20 定义

在一阶语言$\mathcal{L}$上,如下递归定义的从$\mathcal{F}or(\mathcal{L})$到$\wp$($\mathcal{V}$)的映射$bound$给出了每个公式的约束变元集。

(1) $bound(t_1 = t_2) = \emptyset$;

(2) $bound(R(t_1, \cdots, t_n)) = \emptyset$;

(3) $bound(\neg\varphi) = bound(\varphi)$;

(4) $bound(\varphi \otimes \psi) = bound(\varphi) \cup bound(\psi)$,对$\otimes \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$;

(5) $bound(\forall v\varphi) = bound(\varphi) \cup \{v\}$;

(6) $bound(\exists v\varphi) = bound(\varphi) \cup \{v\}$。

1.1.21 定义

一阶语言$\mathcal{L}$上的一个结构$\mathfrak{A}$是一个对$\langle A, \sigma\rangle$,满足下面的条件。

(1) A是非空集,称为$\mathfrak{A}$的论域;

(2) 对每个$c \in \mathcal{C}$,$\sigma(c) \in A$;

(3) 对每个n元函数符号$f \in \mathcal{F}$,$\sigma(f)$是A上n元函数;

(4) 对每个n元关系符号$R \in \mathcal{R}$,$\sigma(R)$是A上n元关系。

一般也分别用$c^{\mathfrak{A}}$、$f^{\mathfrak{A}}$、$R^{\mathfrak{A}}$表示$\sigma(c)$、$\sigma(f)$、$\sigma(R)$,并称它们为对应符号的解释。$\mathfrak{A}$的基数$|\mathfrak{A}|$取为$|A|$。

1.1.22 定义

设$\mathfrak{A}$是一个$\mathcal{L}$结构，从$\mathcal{V}$到$\mathfrak{A}$的论域A的映射称为$\mathfrak{A}$上的一个指派。对$\mathfrak{A}$上任意的指派β，$\mathcal{J}=\langle\mathfrak{A},\beta\rangle$ 称为一个$\mathcal{L}$解释。设β为$\mathfrak{A}$上的一个指派，$v\in\mathcal{V}$，$a\in A$，那么$\beta\frac{a}{v}$是一个新指派，它满足，对任意的$x\in\mathcal{V}$，若$x=v$，则 $\beta\frac{a}{v}(x)=a$；否则$\beta\frac{a}{v}(x)=\beta(x)$。记$\mathcal{J}\frac{a}{v}=\langle\mathfrak{A},\beta\frac{a}{v}\rangle$。

1.1.23 定义

设$\mathcal{J}=\langle\mathfrak{A},\beta\rangle$ 是一个$\mathcal{L}$解释，项在其上的解释如下递归得到。

（1） 对$c\in\mathcal{C}$，$\mathcal{J}(c)=c^{\mathfrak{A}}$；

（2） 对$v\in\mathcal{V}$，$\mathcal{J}(v)=\beta(v)$；

（3） $\mathcal{J}(f(t_1,\cdots,t_n))=f^{\mathfrak{A}}(\mathcal{J}(t_1),\cdots,\mathcal{J}(t_n))$。

1.1.24 定义

设$\mathcal{J}=\langle\mathfrak{A},\beta\rangle$ 是一个$\mathcal{L}$解释，公式在其上的满足关系递归定义如下。

（1） $\mathcal{J}\vDash t_1=t_2$，当且仅当$\mathcal{J}(t_1)=\mathcal{J}(t_2)$；

（2） $\mathcal{J}\vDash R(t_1,\cdots,t_n)$，当且仅当$\langle\mathcal{J}(t_1),\cdots,\mathcal{J}(t_n)\rangle\in R^{\mathfrak{A}}$；

（3） $\mathcal{J}\vDash\neg\varphi$，当且仅当不发生$\mathcal{J}\vDash\varphi$，记为$\mathcal{J}\nvDash\varphi$；

（4） $\mathcal{J}\vDash\varphi\to\psi$，当且仅当$\mathcal{J}\nvDash\varphi$或者$\mathcal{J}\vDash\psi$；

（5） $\mathcal{J}\vDash\varphi\wedge\psi$，当且仅当$\mathcal{J}\vDash\varphi$并且$\mathcal{J}\vDash\psi$；

（6） $\mathcal{J}\vDash\varphi\vee\psi$，当且仅当$\mathcal{J}\vDash\varphi$或者$\mathcal{J}\vDash\psi$；

（7） $\mathcal{J}\vDash\varphi\leftrightarrow\psi$，当且仅当$\mathcal{J}\vDash\varphi\to\psi$，并且$\mathcal{J}\vDash\psi\to\varphi$；

（8） $\mathcal{J}\vDash\forall v\varphi$，当且仅当对每个$a\in A$，$\mathcal{J}\frac{a}{v}\vDash\varphi$；

（9） $\mathcal{J}\vDash\exists v\varphi$当且仅当有$a\in A$，$\mathcal{J}\frac{a}{v}\vDash\varphi$。

当$\mathcal{J}\vDash\varphi$时，称φ在$\mathcal{J}$上真，或者$\mathcal{J}$是φ的模型。称$\mathcal{L}$公式集Σ在$\mathcal{J}$上真，记$\mathcal{J}\vDash\Sigma$，若对每个$\varphi\in\Sigma$，$\mathcal{J}\vDash\varphi$。对一个公式，或者一个公式集，当有解释使之在其上真，则称该公式（集）是可满足的，否则称

之不可满足。

1.1.25 命题（合同引理）

设$\mathcal{J}_1 = \langle \mathfrak{A}_1, \beta_1 \rangle$是$\mathcal{L}_1$结构，$\mathcal{J}_2 = \langle \mathfrak{A}_2, \beta_2 \rangle$是$\mathcal{L}_2$结构，它们有相同的论域$A$，设$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$。下面的命题成立。

（1）设t是一个$\mathcal{L}$项，若对t中出现的每个非逻辑符号k，$k^{\mathfrak{A}_1} = k^{\mathfrak{A}_2}$，对每个$v \in \mathcal{V}ar(t)$，$\beta_1(v) = \beta_2(v)$，那么，$\mathcal{J}_1(t) = \mathcal{J}_2(t)$。

（2）设φ是一个$\mathcal{L}$公式，若对φ中出现的每个非逻辑符号k，$k^{\mathfrak{A}_1} = k^{\mathfrak{A}_2}$，对每个$v \in free(\varphi)$，$\beta_1(v) = \beta_2(v)$，那么$\mathcal{J}_1 \vDash \varphi$当且仅当$\mathcal{J}_2 \vDash \varphi$。

命题1.1.25的一个特例是取$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$，$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}$，由合同引理可见，$\varphi$在基于$\mathfrak{A}$的解释上的真假只与指派部分对$\varphi$的自由变元的赋值有关，据此可以引入如下的记号：对$\varphi(v_1, \cdots, v_n)$，对$a_1, \cdots, a_n \in A$，$\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \cdots, a_n]$表示有$\mathfrak{A}$上的指派$\beta$使得$\beta(v_i) = a_i$并且$\langle \mathfrak{A}, \beta \rangle \vDash \varphi$；用$\mathfrak{A} \nvDash \varphi[a_1, \cdots, a_n]$表示有$\mathfrak{A}$上的指派$\beta$使得$\beta(v_i) = a_i$并且$\langle \mathfrak{A}, \beta \rangle \nvDash \varphi$。

1.1.26 命题

设φ为句子，$\mathfrak{A}$为结构，若有$\mathfrak{A}$上的指派β使得$\langle \mathfrak{A}, \beta \rangle \vDash \varphi$，那么，对$\mathfrak{A}$上任意的指派$\gamma$也都有$\langle \mathfrak{A}, \gamma \rangle \vDash \varphi$。

命题1.1.26表明，句子在结构上的真假与结构上的指派无关。因此，对任意的结构$\mathfrak{A}$与句子φ，当有$\mathfrak{A}$上的指派β使得$\langle \mathfrak{A}, \beta \rangle \vDash \varphi$，直接称$\varphi$在$\mathfrak{A}$上真，记为$\mathfrak{A} \vDash \varphi$。

1.1.27 定义

设$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$都是$\mathcal{L}$结构，它们的论域分别为A与B。A到B的单射η称为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的嵌入映射，若它满足下面的条件。

（1）对每个n元$f \in \mathcal{F}$，对每组$a_1, \cdots, a_n \in A$，$\eta(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\eta(a_1), \cdots, \eta(a_n))$；

（2）对每个n元$R \in \mathcal{F}$，对每组$a_1, \cdots, a_n \in A$，$\langle a_1, \cdots, a_n \rangle \in$

$R^{\mathfrak{A}}$，当且仅当$\langle\eta(a_1),\cdots,\eta(a_n)\rangle\in R^{\mathfrak{B}}$；

（3）对每个$c\in\mathcal{C}$，$\eta(c^{\mathfrak{A}})=c^{\mathfrak{B}}$。

若这时$A\subseteq B$，并且嵌入映射η是包含映射，即对每个$a\in A$，$\eta(a)=a$，则称$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{B}$的子结构，记为$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$。

若嵌入映射η还是满的，则称它为同构映射，记为η：$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$；对任意的结构$\mathfrak{A}$与$\mathfrak{B}$，若它们之间有同构映射，则称它们是同构的，记为$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$。

1.1.28 命题

（1）设η为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的嵌入映射，那么对每个无量词的公式$\varphi(v_1,\cdots,v_n)$，对每组$a_1,\cdots,a_n\in A$，$\mathfrak{A}\vDash\varphi[a_1,\cdots,a_n]$当且仅当$\mathfrak{B}\vDash\varphi[\eta(a_1),\cdots,\eta(a_n)]$。

（2）设η：$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$，那么对每个公式$\varphi(v_1,\cdots,v_n)$，对每组$a_1,\cdots,a_n\in A$，$\mathfrak{A}\vDash\varphi[a_1,\cdots,a_n]$当且仅当$\mathfrak{B}\vDash\varphi[\eta(a_1),\cdots,\eta(a_n)]$。

1.1.29 定义

设$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$都是$\mathcal{L}$结构，若$\mathcal{L}$句子无法区分它们，即对每个$\mathcal{L}$句子φ，$\mathfrak{A}\vDash\varphi$当且仅当$\mathfrak{B}\vDash\varphi$，则称$\mathfrak{A}$与$\mathfrak{B}$初等等价，记为$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$。

1.1.30 命题

对任意的$\mathcal{L}$结构$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$，若$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$，则$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$。

1.1.31 定义

设η为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的嵌入映射，若对每个公式$\varphi(v_1,\cdots,v_n)$，对每组$a_1,\cdots,a_n\in A$，$\mathfrak{A}\vDash\varphi[a_1,\cdots,a_n]$当且仅当，$\mathfrak{B}\vDash\varphi[\eta(a_1),\cdots,\eta(a_n)]$，则称$\eta$是初等嵌入映射。设$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{B}$的子结构，若对每个公式$\varphi(v_1,\cdots,v_n)$，对每组$a_1,\cdots,a_n\in A$，$\mathfrak{A}\vDash\varphi[a_1,\cdots,a_n]$当且仅当，$\mathfrak{B}\vDash\varphi[a_1,\cdots,a_n]$，则称$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{B}$的初等子结构，记为$\mathfrak{A}\preceq\mathfrak{B}$。

1.1.32 命题

（1）设η为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的嵌入映射，那么有一个结构$\mathfrak{S}$，使得$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{S}$，有$\theta$：$\mathfrak{S}\cong\mathfrak{B}$，并且$\theta$在$A$上的限制即为$\eta$。

（2）设η为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的初等嵌入映射，那么，有一个结构$\mathfrak{S}$，使得$\mathfrak{A}\leqslant\mathfrak{S}$，有$\theta$：$\mathfrak{S}\cong\mathfrak{B}$，并且$\theta$在$A$上的限制即为$\eta$。

1.1.33 定义

设$\mathcal{L}_1$与$\mathcal{L}_2$是两个语言，若$\mathcal{L}_1\subseteq\mathcal{L}_2$，则称$\mathcal{L}_2$是$\mathcal{L}_1$的膨胀，称$\mathcal{L}_1$是$\mathcal{L}_2$的归约；设$\mathcal{L}_1\subseteq\mathcal{L}_2$，$\mathfrak{A}$是$\mathcal{L}_1$结构，$\mathfrak{B}$是$\mathcal{L}_2$结构，若它们有相同的论域，并且对$\mathcal{L}_1$中每个非逻辑符号$k$，$k^{\mathfrak{A}}=k^{\mathfrak{B}}$，则称$\mathfrak{B}$为$\mathfrak{A}$在$\mathcal{L}_2$上的膨胀，称$\mathfrak{A}$为$\mathfrak{B}$在$\mathcal{L}_1$上的归约，记为$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\upharpoonright\mathcal{L}_1$。一种特殊的膨胀是对给定的$\mathcal{L}$结构$\mathfrak{A}$，取$\mathfrak{A}$的论域$A$的一个子集$X$，膨胀$\mathcal{L}$为$\mathcal{L}_X=\mathcal{L}\cup\{\underline{a}:a\in X\}$，那么$\mathfrak{A}$在$\mathcal{L}_X$上有自然的膨胀$\mathfrak{A}_X$，对$\mathcal{L}$中的非逻辑符号$k$，$k^{\mathfrak{A}_X}=k^{\mathfrak{A}}$，对新常元$\underline{a}$，$\underline{a}^{\mathfrak{A}_X}=a$。

1.1.34 定义

设$\mathfrak{A}$是$\mathcal{L}$结构，语言$\mathcal{L}_A$为在$\mathcal{L}$基础上增加新常量集$\{\underline{a}:a\in A\}$而得，$\mathcal{L}_A=\mathcal{L}\cup\{\underline{a}:a\in A\}$。令$\mathcal{D}(\mathfrak{A})=\{\varphi(\underline{a}_1,\cdots,\underline{a}_n):\varphi(\underline{a}_1,\cdots,\underline{a}_n)$为$\mathcal{L}_A$原子句子或者是$\mathcal{L}_A$原子句子的否定；$\varphi(\underline{a}_1,\cdots,\underline{a}_n)$为在$\mathcal{L}$公式$\varphi(v_1,\cdots,v_n)$中用新常量$\underline{a}_i$替换变元$v_i$而得，并且$\mathfrak{A}\vDash\varphi[a_1,\cdots,a_n]\}$，称$\mathcal{D}(\mathfrak{A})$是$\mathfrak{A}$的图；令$\mathcal{ED}(\mathfrak{A})=\{\varphi(\underline{a}_1,\cdots,\underline{a}_n):\varphi(\underline{a}_1,\cdots,\underline{a}_n)$为$\mathcal{L}_A$句子；$\varphi(\underline{a}_1,\cdots,\underline{a}_n)$为在$\mathcal{L}$公式$\varphi(v_1,\cdots,v_n)$中用新常量$\underline{a}_i$替换变元$v_i$而得，并且$\mathfrak{A}\vDash\varphi[a_1,\cdots,a_n]\}$，称$\mathcal{ED}(\mathfrak{A})$是$\mathfrak{A}$的初等图。

1.1.35 命题

设$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$是$\mathcal{L}$结构，那么下面的命题成立。

（1）$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$有嵌入映射，当且仅当，$\mathfrak{B}$在$\mathcal{L}_A$上有膨胀$\mathfrak{S}$，使得$\mathfrak{S}\vDash\mathcal{D}(\mathfrak{A})$。

（2）$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$有初等嵌入映射，当且仅当，$\mathfrak{B}$在$\mathcal{L}_A$上有膨胀$\mathfrak{S}$，使得$\mathfrak{S}\vDash\mathcal{ED}(\mathfrak{A})$。

1.1.36 命题

设$\mathfrak{A}$是一个无穷的$\mathcal{L}$结构，那么，对任意的无穷基数$\kappa\geqslant|\mathfrak{A}|+|\mathcal{L}|$，有基数为$\kappa$的$\mathcal{L}$结构$\mathfrak{B}$，使得$\mathfrak{A}$可初等嵌入到$\mathfrak{B}$中。

1.1.37 命题

设$\mathfrak{A}$是一个无穷的$\mathcal{L}$结构，B为$\mathfrak{A}$的论域的子集，并且$|\mathcal{L}|\leqslant|B|\leqslant|\mathfrak{A}|$，那么有$\mathfrak{A}$的初等子结构$\mathfrak{B}$使得$B$为$\mathfrak{B}$的论域的子集，并且$|\mathfrak{B}|=|B|$。

1.1.38 定义

设$\mathcal{L}$是一个语言，I是一个无穷集，$\mathfrak{A}_i$，$i\in I$是一族$\mathcal{L}$结构，$\mathcal{D}$是I上的一个超滤。

（1）在$\Pi_{i\in I}A_i=\{\eta$为从I到$\bigcup_{i\in I}A_i$的映射：对每个$i\in I$，$\eta(i)\in A_i\}$上如下定义关系$\sim_{\mathcal{D}}$，$\eta\sim_{\mathcal{D}}\theta$当且仅当$\{i\in I:\eta(i)=\theta(i)\}\in\mathcal{D}$，那么$\sim_{\mathcal{D}}$是等价关系，相应的等价类与商集分别记为$[\eta]$与$\Pi_{\mathcal{D}}A_i$；

（2）以$\Pi_{\mathcal{D}}A_i$为论域得到$\mathcal{L}$结构$\mathfrak{A}=\Pi_{\mathcal{D}}\mathfrak{A}_i$：（2）.1 对常元$c$，$c^{\mathfrak{A}}=[\eta_c]$，其中$\eta_c$是常映射，对每个$i\in I$，$\eta_c(i)=c^{\mathfrak{A}_i}$；（2）.2 对$n$元函数符号$f$，$f^{\mathfrak{A}}$是$\Pi_{\mathcal{D}}A_i$上的$n$映射，使得对每组$[\eta_1]$，…，$[\eta_n]$，$f^{\mathfrak{A}}([\eta_1],\cdots,[\eta_n])=[\langle f^{\mathfrak{A}i}(\eta_1(i),\cdots,\eta_n(i)):i\in I\rangle]$；（2）.3对$n$元关系符号$R$，对每组$[\eta_1]$，…，$[\eta_n]$，$\langle[\eta_1],\cdots,[\eta_n]\rangle\in R^{\mathfrak{A}}$，当且仅当$\{i\in I:\langle\eta_1(i),\cdots,\eta_n(i)\rangle\in R^{\mathfrak{A}i}\}\in\mathcal{D}$。称$\Pi_{\mathcal{D}}\mathfrak{A}_i$为$\mathfrak{A}_i$，$i\in I$的模$\mathcal{D}$的超积；当所有的$\mathfrak{A}_i$都相同，比如$\mathfrak{A}_i=\mathfrak{B}$，对每个$i\in I$，则称$\Pi_{\mathcal{D}}\mathfrak{A}_i$为$\mathfrak{B}$的模$\mathcal{D}$的超幂，特别记为$\Pi_{\mathcal{D}}\mathfrak{B}$。

1.1.39 命题

（1）（超积基本定理）设$\mathfrak{A}_i$，$i\in I$是一族$\mathcal{L}$结构，$\Pi_{\mathcal{D}}\mathfrak{A}_i$是相应的超积，那么对任意的$\mathcal{L}$公式$\varphi(v_1,\cdots,v_n)$，对任意的$[\eta_1]$，…，