普通高等教育应用型教学改革研究成果

大学物理学

◎主编 陈宜生

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

大学物理学

主　编　陈宜生
副主编　王　刚　王莉华
编　者　郝军华　野仕伟
何伟岩　陈宜生
（天津大学仁爱学院）
李　徽　穆春燕　王　刚
（北京科技大学天津学院）
张国丽　王莉华
（天津理工大学中环学院）

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学/陈宜生主编. —杭州：浙江大学出版社，2014.2
ISBN 978-7-308-12751-6

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①物理学—高等学校—教材 Ⅳ. ①04

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第004984号

大学物理学
主编 陈宜生

责任编辑 邹小宁
文字编辑 吴琦骏
封面设计 王聪聪
出　　版 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州教联文化发展有限公司
印　　刷 浙江万盛达实业有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 26.5
字　　数 612千
版 印 次 2014年2月第1版 2014年2月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-12751-6
定　　价 47.80元

前 言

这五光十色、变化万千、缤纷繁复的物质世界，多么神奇，多么迷人！可这一切都是由几条基本规律支配着。大学物理的任务就是要向大学生们介绍这几条基本规律，这些基本规律无孔不入地渗透在各个学科和工程及科技领域。这就是大学物理成为大学生重要基础课的原因。如果希望学好将从事的专业并有所创新的话，建议学好大学物理。

大学物理要介绍的基本规律包括：

(1)机械运动的规律(又称为牛顿力学)。所谓机械运动就是物体位置的变化。要表达物体什么时候在什么地方，这是对机械运动的描述问题，称为运动学。另外一个本质性的问题是，为什么那时刻物体定然在那儿，要搞清这个问题就要知道运动和运动变化的原因是什么，解答这个问题的表述称为动力学。

(2)高速运动的规律(又称狭义相对论)。牛顿力学只适于速度远小于光速的运动。对于高速运动，必须修改牛顿力学的绝对时空观，代之与运动有关的相对论时空观。

(3)热运动的规律(又称热学，包括分子动理论和热力学)。热运动是大量分子或微粒永不停息的杂乱运动。研究热运动的微观统计方法可以得到热运动的统计规律；研究热运动的宏观方法是热力学，以普遍能量守恒和转化观点研究过程中能量的传递和转换，以不可逆过程造成能量品质衰退来研究过程发展的方向和限度，进而明察自然现象的相互联系。

(4)电磁运动规律(又称电磁学)。物质世界只存在正、负两种电荷，这两种电荷的相互作用和运动演变出各种电磁现象。人们从实践中逐步认识到静止电荷通过静电场相互作用，奥斯特实验、安培实验揭示磁场起源于电流，运动电荷(电流)通过磁场相互作用。法拉第发现的电磁感应现象，表明随时间变化的磁场可以产生电场，麦克斯韦做出随时间变化的电场产生磁场的假设，将前人总结的电磁规律全部综合在他的麦克斯韦方程组中，使电场磁场统一起来，进而从理论上预见了电磁波的存在。没多久，赫兹便证实了电磁波确实存在。正处在信息时代的我们，怎能不感激电磁规律和电磁波给我们带来的方便和幸福！

(5)振动、波动和光的规律。振动、波动是不分力、热、电、磁、光，不分宏观和微观的普遍运动形式，其规律是对周期运动的描述和处理方法。

(6)微观粒子运动的规律(又称量子力学)。牛顿力学只适于宏观物体，不适于微观粒子。微观粒子具有波粒二象性，有些物理量具有跳跃式变化或量子化特征。对微观

世界，应该用量子力学取代牛顿力学。

大学物理不但传播物质世界的规律和知识，同时传授科学思维方式和认识世界的科学方法。因为物理学是充满认识论、方法论的学科，其思维很具哲理性。如对立统一，相反相成，物极必反，量变到质变，变中有不变，抓主要矛盾的建模法。物理学有一个思维习惯——寻根问底，从这个意义上说，大学物理也是一门素质课，在培养分析问题解决问题的能力，培养创新型人才上会起到重要的作用。

基于我们对大学物理课程的上述认识，根据教育部理工科类大学物理课程教学基本要求和所在院校的实际情况，天津大学仁爱学院、北京科技大学天津学院、天津理工大学中环学院联合编写了这本大学物理教材。为了使统一的基本要求与各专业的要求取得平衡，我们决定使教材内容具有较大的弹性，便于教师根据实际情况进行内容剪裁与补充。为了将内容活化和现代化，部分当代新成果和新科技已有机地融入本教材基本内容中。当这种理论与实际的结合有碍基本内容阐述的连贯性和教学的顺畅时，便以"阅读资料"的形式放在一章之末，用来开阔学生视野。做习题仍是物理课训练学生分析、解决问题的能力、理论联系实际的重要手段，我们精选了习题，并使题型和物理考试题型大体一致。

参加编写的有：郝军华（第1、2、3章）、何伟岩（第4章）、李徽（第6章）、张国丽（第7章）、野仕伟（第8、10章）、王莉华（第9章）、穆春燕（第11章）、王刚（第12章）、陈宜生（第5、13章）。最后由陈宜生统稿和修改。

在此要感谢为出书作出贡献的所有人员，也要感谢天津大学仁爱学院、北京科技大学天津学院、天津理工大学中环学院领导的大力支持。

由于编者水平所限，书中难免有错误与不足，欢迎读者指正。

编　者

2013年12月26日

目　录

第1章 质点运动学

1.1 物体运动的描述

现在假设你要描述远处一个正在飞行的直升机的运动情况,该如何下手呢?先应做点准备工作。

1.1.1 准备工作

1. 繁中求简——建立模型

直升飞机的形状有点像蜻蜓,其组成构件颇多,上面有垂直翼、尾翼等,内部还藏有复杂的机械和电子部件,飞行起来各点运动情况也不尽相同。但每一点都有向同一方向移动的共同的整体运动。不过对观察者的研究目标来说,了解各点的共同运动,忽略各点运动的差异(或内部运动),就可达到研究的要求,各点共同运动可以用一点的运动来表示。近处看直升飞机也不算小,但当观察者离直升机足够远(观察者到直升机距离≫直升机本身尺度)时,直升机各点到观察者距离的差异可以忽略不计,直升机可视为一点。将运动物体(如直升机)看成具有运动物体质量m以物体共同运动速度运动的点,称为**质点**。在研究物体运动或系统演化时,对物体或系统简化的过程叫**建模型**。将物体视为质点意味着忽略物体的大小和形状,意味着忽略物体的内部运动。建模是科学研究的普适方法。实际问题是复杂而繁乱的,建模就是将复杂问题简单化的过程,抓主要矛盾忽略次要矛盾的过程。

2. 找观察运动的立场——选定参考系

自然界中一切物体都在运动,绝对静止的物体是不存在的。为了描述一个物体的运动状态,我们需要认定一个物体静止,拿这个物体作为参考来描述其他物体相对参考物体的运动,选定作为参考的物体称为**参考系**。选取不同的参考系,物体运动的描述是不一样的,如匀速转动圆盘上的观察者认为自己正沿圆半径走向圆心是作直线运动,站在地面的观察者却认为他在作螺旋运动,这就是立场不同或参考系不同带来的后果。又如,我们平常所说的汽车的时速是60km/h,是以地面作为参考系的,若以太阳为参考系速度就不是这个值了。

3. 准备尺和钟——建立坐标系

要定量地描述物体的位置和运动，必须在参考系上建立坐标系。如图1-1所示，在参考系上选一点作为坐标原点O，过O点建立三个相互垂直的且有刻度的坐标轴X、Y、Z就构成了直角坐标系。另外还有极坐标系、自然坐标系、球坐标系，圆柱坐标系等。不同坐标系的选取以研究问题方便和运动对称性而定。

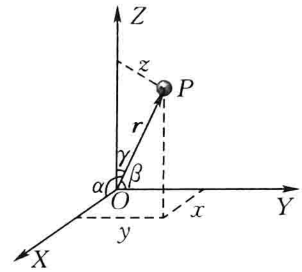

图1-1 位置矢量

做了上述准备后，为了描述运动，还要引入四个描写质点运动各方面特征的物理量。

1.1.2 引入描述运动特征的物理量

1. 位矢

为了表述质点的具体位置，从坐标原点O向质点所在的位置P点作一条有向线段$\boldsymbol{r}$来表示，如图1-1所示，$\boldsymbol{r}$称为位置矢量，简称**位矢**。位置矢量的大小即线段的长度，可用$\boldsymbol{r}$的模表示（记作$|\boldsymbol{r}|$）；位置矢量的方向由原点O指向质点所在位置P点，方向也可用径向单位矢$\hat{\boldsymbol{r}}$或用位矢与坐标轴的三个夹角α，β和γ表示。从数学上可知，质点的位置也可用其坐标(x, y, z)来表示。位矢$\boldsymbol{r}$和坐标(x, y, z)都可表示位置，在直角坐标系中二者的关系可以写为：

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

其中$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别表示沿X、Y、Z轴三个方向的单位矢量。单位矢量是专用来表示方向的，其大小是1，类似地可引入径向单位矢$\hat{\boldsymbol{r}}$、法向单位矢$\hat{\boldsymbol{n}}$、切向单位矢$\hat{\boldsymbol{\tau}}$。

2. 位移

质点运动中，位矢是随时间变化的。为了反映质点位置的变化，需要引入位移矢量。如图1-2所示，t时刻质点在A点，$t+\Delta t$时刻质点沿曲线轨迹运动到了B点。从A点向B点作一条有向线段$\Delta\boldsymbol{r}$，称为**位移**。它表明了质点位置变化的大小和方向，位移与位矢的关系可表达为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A \tag{1.2}$$

由(1.1)式知$\boldsymbol{r}_A=x_A\boldsymbol{i}+y_A\boldsymbol{j}+z_A\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_B=x_B\boldsymbol{i}+y_B\boldsymbol{j}+z_B\boldsymbol{k}$

故 $\Delta\boldsymbol{r}=(x_B-x_A)\boldsymbol{i}+(y_B-y_A)\boldsymbol{j}+(z_B-z_A)\boldsymbol{k}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$

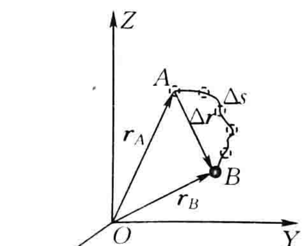

图1-2 位移矢量

图1-2中质点运动轨迹的长度为路程Δs。一般情况下，路程和位移的大小不相等也无确定的关系，即$\Delta s\neq|\Delta\boldsymbol{r}|$。但是当$\Delta t\to 0$时，有$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$。

运动中质点位移是随时间变化的，变化的快慢和方向怎样？需要一个物理量来表达。

3. 速度

速度$\boldsymbol{v}$是描述物体运动的快慢和方向的物理量。如图1-2所示，如果质点在Δt时间

内，位移为$\Delta \boldsymbol{r}$，路程为Δs，那么$\Delta \boldsymbol{r}$与Δt的比值称为**平均速度**

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.3}$$

平均速度的方向就是$\Delta \boldsymbol{r}$的方向，其大小为$|\bar{\boldsymbol{v}}|=|\Delta \boldsymbol{r}|/\Delta t$。在日常生活中，我们经常用到的是平均速率也就是路程与时间的比，即$v=\Delta s/\Delta t$。由于一般情况下$\Delta s \neq |\Delta \boldsymbol{r}|$，所以平均速率不等于平均速度的大小。

平均速度只能描述一段时间内物体运动快慢和方向的粗略情况，并不能精确描述某时刻物体运动的快慢和方向情况。为了描写质点在某时刻t运动的快慢和方向，只要对平均速度进行$\Delta t \to 0$的极限操作就能达到目的，即

$$\boldsymbol{v}(t)=\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

将(1.1)式代入上式可得

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

此时$\boldsymbol{v}$为质点t时刻的**瞬时速度**，简称**速度**。速度是矢量，它的方向为$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$的方向即t时刻物体所在处运动轨迹的切线方向；速度大小称为**速率**，可以表示为

$$v=|\boldsymbol{v}(t)|=\sqrt{\boldsymbol{v}_x^2+\boldsymbol{v}_y^2+\boldsymbol{v}_z^2}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

可见，速度的大小即速率，可以由速度的三个分量确定，也可由路程函数对时间的一阶导数求得。

在质点的某些运动中，速度也是随时间变化的，是一速度函数$\boldsymbol{v}(t)$。需要一个描写速度变化快慢和变化方向的物理量。

4. 加速度

加速度$\boldsymbol{a}$是表示物体速度变化快慢和变化方向的物理量。如果t时刻和$t+\Delta t$时刻的速度分别为$\boldsymbol{v}(t)$和$\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$，如图 1-3 所示，那么在这$\Delta t$时间段内速度的变化量为$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$。$\Delta \boldsymbol{v}$与$\Delta t$的比值我们定义为**平均加速度**，即

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

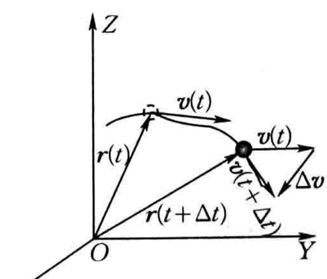

图 1-3　加速度

为了精确描述某时刻t速度变化的快慢，对上式取$\Delta t \to 0$的极限，得**瞬时加速度**，简称**加速度**

$$\boldsymbol{a}(t)=\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}\right)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.6}$$

将(1.1)式和(1.5)式代入(1.6)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t)&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

加速度也是矢量，它的方向是速度增量d$\boldsymbol{v}$的方向，其大小为

$$a=|\boldsymbol{a}(t)|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

1.1.3 运动全过程的描述——运动函数

质点在运动的过程中，质点的坐标(x, y, z)随着时间发生变化。例如t_0时刻质点所在位置的位矢为$\boldsymbol{r}(t_0)=x(t_0)\boldsymbol{i}+y(t_0)\boldsymbol{j}+z(t_0)\boldsymbol{k}$，那么任意时刻$t$质点的位矢就变成了

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.7}$$

我们把这个位矢的时间函数称为**运动函数**或**运动方程**，它能描述质点在任意时刻的位置。(1.7)式中位矢函数可以等效地用三个分量函数表达为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases} \tag{1.8}$$

(1.7)式是运动方程矢量表达，(1.8)式是运动方程的标量表达。已知一种表达方式可以找到另一种表达方式。利用运动方程的标量表达(1.8)式，联立消去时间t，就得到了质点的**轨道方程**，轨道方程是质点运动中坐标之间的函数关系，即质点的运动轨迹。

质点运动的全部信息包含在运动方程中，由它就实现了对运动的完美而简洁的描述。已知质点的运动方程$\boldsymbol{r}(t)$，可以求得任意时刻质点的速度$\boldsymbol{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，进而求得任意时刻的加速度$\boldsymbol{a}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$；反之，已知质点的加速度$\boldsymbol{a}(t)$，可以通过积分求得任意时刻的速度$\boldsymbol{v}(t)$、位矢$\boldsymbol{r}(t)$和轨道方程。

例题1.1 已知质点的运动方程为$\boldsymbol{r}(t)=5t\boldsymbol{i}+(1+3t-5t^2)\boldsymbol{j}$(SI)，试求：

(1)t=2s时刻质点的速度和加速度；

(2)轨道方程。

解：(1)利用(1.5)式将已知的运动方程对时间求导数，得到质点任意时刻的速度

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=5\boldsymbol{i}+(3-10t)\boldsymbol{j}$$

速度函数再对时间求导数，得到质点任意时刻的加速度

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-10\boldsymbol{j}$$

由速度函数，令t=2s，得2s时刻的速度$\boldsymbol{v}(2)=5\boldsymbol{i}-17\boldsymbol{j}$，速率为$v(2)=\sqrt{5^2+17^2}=17.72\mathrm{m/s}$，方向为与$X$轴夹角$\alpha=\arctan(\dfrac{v_y}{v_x})=\arctan(\dfrac{-17}{5})=-73°37'$

令t=2s，得加速度为$\boldsymbol{a}(2)=-10\boldsymbol{j}$，加速度大小为$a(2)=10\mathrm{m/s^2}$，方向为$Y$轴的反方向。

(2)运动方程的分量形式

$$\begin{cases}x=5t\\y=1+3t-5t^2\end{cases}$$

消去时间t得到轨道方程$y=1+\dfrac{3x}{5}-\dfrac{x^2}{5}$

1.2　运动的分解与合成

1.2.1　匀加速运动

加速度恒定的运动，称为匀加速运动，即加速度大小和方向都不随时间发生变化，如日常生活中的平抛运动、自由落体运动等。

假设质点在三维空间作匀加速运动，加速度为$\boldsymbol{a}=a_{x0}\boldsymbol{i}+a_{y0}\boldsymbol{j}+a_{z0}\boldsymbol{k}$与时间无关，即$(a_{x0},a_{y0},a_{z0})$均为常数，初始位置为$\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$，初速度为$\boldsymbol{v}_0=v_{x0}\boldsymbol{i}+v_{y0}\boldsymbol{j}+v_{z0}\boldsymbol{k}$，那么由

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

两边同乘以$\mathrm{d}t$可以得到$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$，并对其进行积分可得

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t \qquad \text{分量式为}\begin{cases}v_x=v_{x0}+a_{x0}t\\ v_y=v_{y0}+a_{y0}t\\ v_z=v_{z0}+a_{z0}t\end{cases} \tag{1.9}$$

再由

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

两边同乘以$\mathrm{d}t$可以得到$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t)\mathrm{d}t$，并对其进行积分可得

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t)\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \qquad \text{分量式为}\begin{cases}x=x_0+v_{x0}t+\dfrac{1}{2}a_{x0}t^2\\ y=y_0+v_{y0}t+\dfrac{1}{2}a_{y0}t^2\\ z=z_0+v_{z0}t+\dfrac{1}{2}a_{z0}t^2\end{cases} \tag{1.10}$$

可以看出，已知加速度$\boldsymbol{a}$和初始条件$(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0)$，采用积分法便能得到任意时刻的速度和位矢。值得注意的是(1.9)和(1.10)式只适用于匀加速运动。对于非匀加速运动，寻找速度函数和运动函数的思考路线和其数学操作仍然是一样的，下面举例说明。

例题 1.2　一质点在XOY平面内运动，其加速度为$\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}$(SI)，已知$t$=0s时，质点位于$\boldsymbol{r}_0=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，初速度为$\boldsymbol{v}_0=7\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，试求任意时刻质点的速度和位矢。

解：质点的运动为匀加速运动，故速度可由(1.9)式得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t=(7+5t)\boldsymbol{i}+(4+10t)\boldsymbol{j} \text{ 或 } \begin{cases}v_x=7+5t\\ v_y=4+10t\end{cases}$$

可由(1.10)式得出质点的位矢

$$\boldsymbol{r}=(2+7t+\frac{5}{2}t^2)\boldsymbol{i}+(-3+4t+5t^2)\boldsymbol{j} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=2+7t+\frac{5}{2}t^2 \\ y=-3+4t+5t^2 \end{cases}$$

例题 1.3 一质点在XOY平面内运动，其加速度为$\boldsymbol{a}=5t\boldsymbol{i}+10t\boldsymbol{j}$(SI)，已知$t$=0s时，质点位于$\boldsymbol{r}_0=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，初速度为$\boldsymbol{v}_0=7\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，试求任意时刻质点的速度和位矢。

解：加速度与时间t有关，(1.9)式和(1.10)式将不再适用，可由式

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

两边同乘以dt可以得到$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$，并对其进行积分可得

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int_0^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t=(7+\frac{5}{2}t^2)\boldsymbol{i}+(4+5t^2)\boldsymbol{j} \quad \text{或} \quad \begin{cases} v_x=7+\frac{5}{2}t^2 \\ v_y=4+5t^2 \end{cases}$$

再由

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(7+\frac{5}{2}t^2)\boldsymbol{i}+(4+5t^2)\boldsymbol{j}$$

两边同乘以dt可以得到$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\left[(7+\frac{5}{2}t^2)\boldsymbol{i}+(4+5t^2)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{d}t$，并对其进行积分

$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t\left[(7+\frac{5}{2}t^2)\boldsymbol{i}+(4+5t^2)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{d}t$可得运动函数为

$$\boldsymbol{r}=(2+7t+\frac{5}{6}t^3)\boldsymbol{i}+(-3+4t+\frac{5}{3}t^3)\boldsymbol{j} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=2+7t+\frac{5}{6}t^3 \\ y=-3+4t+\frac{5}{3}t^3 \end{cases}$$

1.2.2 匀加速直线运动

匀加速直线运动就是质点作一维运动且加速度大小方向均不变。假设质点沿X轴作匀加速直线运动，加速度为常数a，初始位置为x_0，初速度为v_0，那么由

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

两边同乘以dt可以得到$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$，并对其进行积分可得

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

$$v=v_0+at$$

再由

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

两边同乘以dt可以得到$\mathrm{d}x=(v_0+at)\mathrm{d}t$，并对其进行积分

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t(x_0+at)\mathrm{d}t$$

上式积分可得运动函数为

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{1.12}$$

可以看出(1.11)式和(1.12)式是(1.9)式和(1.10)式的分解式，正是我们中学熟悉的匀加速直线运动公式。值得注意的是(1.11)式和(1.12)式只适用于匀加速运动的物体。对非匀加速运动，上述思考路线和数学操作仍然适用，请见下面的例题。另外，对于一维运动的物体，物理量不需要用矢量表示，用标量即可。

例题 1.4 一质点沿X轴运动，速度函数为$v=10+3t^2$(SI)。已知t=0时质点位于坐标原点右方10m处，求t=3s时质点的加速度和位置。

解：设以X轴向右为正方向，

由
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

得
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6t$$

令t=3s，得3秒时刻的加速度，$a(3)=18\,\mathrm{m/s^2}$

由
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

两边同乘以$\mathrm{d}t$可以得到$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$，并对其进行积分

$$\int_{10}^{x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{t}(10+3t^2)\mathrm{d}t$$可得运动函数为

$$x=10+10t+t^3$$

令t=3s，得3秒时刻的位置，$x(3)=67\,\mathrm{m}$

1.2.3 加速度在自然坐标系中的分解：切向加速度与法向加速度

速度是矢量，既具有大小也有方向，无论是速度的大小还是方向，只要有一个发生变化，速度$\boldsymbol{v}$就会发生改变。为了区分这两种因素对加速度的贡献，需要引入自然坐标系，使加速度$\boldsymbol{a}$在自然坐标系中进行分解。

在质点运动轨道上任取一点O作为坐标原点，通过质点所在处距离O点的轨迹长度(路程s)来表示质点的位置，我们把这种坐标系称为自然坐标系，即沿质点的运动轨道建立的坐标系，如图1-4所示。

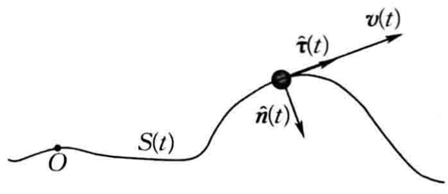

图1-4 自然坐标系

自然坐标系中规定沿轨道切线方向单位矢量为$\hat{\boldsymbol{\tau}}$，轨道内法线方向单位矢量为$\hat{\boldsymbol{n}}$。自然坐标系中的两个单位矢量会随着质点的位置而变化，均是时间t的函数。在自然坐标系中，质点的速率可以表示为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

由于速度总是沿着轨道的切线方向，故速度在自然坐标系中的矢量表达式可以写为$\boldsymbol{v}=v\hat{\boldsymbol{\tau}}$。

由加速度的定义

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\hat{\boldsymbol{\tau}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\tau}}+\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}t}v$$

如图1-5所示，当$\Delta t\to 0$的极限情况下有$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}=\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{n}}$，所以

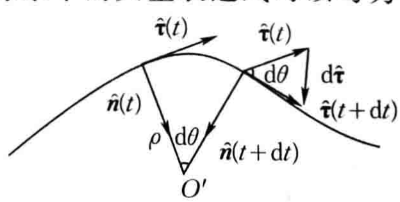

图1-5 自然坐标系中运动方向的变化

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{n}}=\frac{v}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}$$

加速度$\boldsymbol{a}$在自然坐标系中的表达式可以写为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\tau}}+\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}=a_\tau\hat{\boldsymbol{\tau}}+a_n\hat{\boldsymbol{n}} \qquad 分量式为\begin{cases}a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\ a_n=\dfrac{v^2}{\rho}\end{cases} \tag{1.13}$$

其中a_τ为切向加速度，a_n为法向加速度，v为速率且$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$或$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$，$\rho$为轨道曲线在该点的曲率半径。

值得注意的是只要确定了参考系，不管在参考系上建立哪种坐标系，同一质点的加速度$\boldsymbol{a}$是相同的，但在不同的坐标系中，加速度有不一样的分解形式。如图1–6所示，一个二维运动，在自然坐标系中，加速度可分解为切向加速度a_τ和法向加速度a_n，分别表示速度大小变化的快慢和速度方向变化的快慢；在直角坐标系中，加速度可分解为a_x、a_y，分别表示X轴、Y轴两个方向的加速度分量。

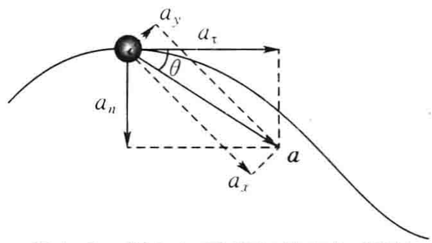

图1–6 切向加速度和法向加速度

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

加速度的方向与轨道切向的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{a_n}{a_\tau}$$

例题1.5 已知质点的运动方程为$\boldsymbol{r}=(\frac{3}{2}t^2+7)\boldsymbol{i}-(2t^2-19)\boldsymbol{j}$，求切向加速度和法向加速度。

解：首先由运动方程可以求出速度函数

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3t\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$$

加速度函数为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$$

速率函数为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{9t^2+16t^2}=5t$$

那么可以求得切向加速度

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=5\,\mathrm{m/s^2}$$

法向加速度

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=0$$

例题1.6 质点M在水平面内作半径$R=3\,\mathrm{m}$的圆周运动，已知运动方程为$s=10t+3t^2$(SI)，式中s表示路程。求t=2s时，质点M加速度的大小及加速度与轨道切向的夹角。

解：按照已知条件，采用自然坐标系考虑问题会比较方便。