SHUZHIFENXI

QUANZHENSHITIJIEXI

数值分析全真试题解析

（2009—2014）

孙志忠 吴宏伟 曹婉容 / 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

数值分析全真试题解析

（2009—2014）

孙志忠 吴宏伟 曹婉容 编著

东南大学出版社
·南京·

内容简介

本书对东南大学近6年来工学硕士研究生和工程硕士研究生学位课程考试、工学博士研究生入学考试“数值分析”以及理学博士研究生入学考试“高等数值分析”的试题作了详细的解答，部分题目还给出了多种解法. 内容包括误差分析、非线性方程求根、线性方程组数值解法、函数插值与逼近、数值微分与数值积分、常微分方程初值问题的数值解法、偏微分方程数值解法以及求矩阵特征值的幂法.

本书可作为理工科专业研究生、本科生学习数值分析课程或计算方法课程的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数值分析全真试题解析: 2009~2014/孙志忠, 吴宏伟, 曹婉容编著. — 南京 : 东南大学出版社, 2014.7

ISBN 978-7-5641-5057-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①孙… ②吴… ③曹… Ⅲ. ①数值分析-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 151685 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 : 210096)
出版人 : 江建中
全国各地新华书店经销 南京京新印刷厂印刷
开本 : 700mm×1000mm 1/16 印张 : 17 字数 : 333 千
2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷
定价 : 33.80 元

前　言

计算机的迅速发展为人们提供了强有力的计算工具. 使用计算机进行科学计算已成为科学研究、工程设计中越来越不可缺少的一个环节, 而数值模拟已成为继理论研究、实验研究之后的一种新的科学研究方法, 它有时甚至代替或超过了实验所起的作用. 因此, 科学计算应该成为高级科技人员必须掌握的一种研究手段. 作为科学计算的核心 — 数值分析 (Advanced Numerical Analysis) 课程或计算方法 (Elementary Numerical Analysis) 课程, 已被许多理工科专业研究生、本科生作为必修课程.

本书对东南大学近 6 年来工学硕士研究生和工程硕士研究生学位课程考试、工学博士研究生入学考试"数值分析"以及理学博士研究生入学考试"高等数值分析"的试题作了较详细的解答, 部分题目还给出了多种解法. 内容包括误差分析、非线性方程求根、线性方程组数值解法、函数插值与逼近、数值微分与数值积分、常微分方程初值问题的数值解法、偏微分方程数值解法以及求矩阵特征值的幂法. 硕士生学位课程考试时间为 150 分钟, 博士生入学考试时间为 180 分钟.

本书是东南大学出版社出版的《数值分析》和《计算方法和实习》两本教材的配套参考书. 虽然本书内容选自东南大学考试试卷, 但对所有学习这门课程的学生都有重要的参考价值.

工学硕士研究生学位课程考试的试题是由承担该课程的诸位同事共同讨论确定的, 在此向他们表示谢意. 同时感谢计算数学专业部分研究生为该书的排版校对付出的辛勤劳动.

作者衷心期望使用本书的老师、同学以及其他广大读者对本书提出宝贵意见. 电子邮箱: zzsun@seu.edu.cn.

作　者

2014 年 5 月

目 录

试题部分

1

2009 年秋季工学硕士研究生学位课程考试试题

1. 填空 (每题 3 分, 共 18 分)
   1) 设多项式 $f(x) = 4x^4 + 6x^3 + 9x + 1$, 则求 $f(x_0)$ 仅含有 4 次乘法运算的算法为__________.
   2) 已知实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值是 $3, 2, 1$, 则 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2 =$__________.
   3) 设 $f(x) = x^3 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 以 $0, 1, 2$ 为插值节点的 2 次牛顿插值多项式为__________.
   4) 用 Simpson 公式计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值 (保留小数点后 3 位小数) 是 ______.
   5) 求解初值问题
   $$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = \eta \end{cases}$$
   的改进的 Euler 公式是__________.
   6) 求解双曲型方程初边值问题的显格式稳定的条件是步长比 s__________, 该差分格式关于空间步长________阶收敛, 关于时间步长________阶收敛.

2. (10 分) 分析方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有几个正根, 并用迭代法求此方程的最大正根, 精确到 4 位有效数字.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法求下列线性方程组的解:
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

4. (10 分) 设有求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的迭代格式
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{b}, \quad k = 0, 1, \cdots, \tag{A}$$
其中
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 2 & \eta & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix},$$
试确定实参数 ξ 和 η 的取值范围, 使得迭代格式 (A) 收敛.

5. (10 分) 设 $f \in C^4[a, a+2]$, 求一个 3 次多项式 $H(x)$, 使之满足
$$H(a) = f(a), \quad H(a+1) = f(a+1), \quad H(a+2) = f(a+2), \quad H'(a) = f'(a),$$
并写出插值余项 $f(x) - H(x)$ 的表达式.

6. (10 分) 用最小二乘法确定经验公式 $y = a + be^x$ 中的参数 a 和 b, 使该曲线拟合下面的数据:

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	3	5	9

7. (12 分) 设 $f(x) \in C^2[a,b]$, $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $h = (b-a)/n$, $x_k = a + kh$, $k = 0,1,\cdots,n$; $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + h/2$, $k = 0,1,\cdots,n-1$.
   1) 写出计算积分 $I(f)$ 的一点 Gauss 公式 $G(f)$ 以及对应的复化求积公式 $G_n(f)$;
   2) 设 $T_n(f)$ 是计算积分 $I(f)$ 的复化梯形公式, 求参数 α, 使得
$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}T_n(f) + \alpha G_n(f).$$

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题
$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = \eta, \end{cases} \tag{B}$$
取正整数 n, 记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih, i = 0,1,2,\cdots,n$. 给定求初值问题 (B) 的多步方法:
$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + h[\beta_1 f(x_i, y_i) + \beta_2 f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \tag{C}$$
   1) 试确定公式 (C) 中的参数 β_1, β_2, 使求解公式具有尽可能高的阶数, 写出局部截断误差表达式并指出最高阶数;
   2) 利用 Euler 公式和公式 (C) 构造一个预测 - 校正公式.

9. (10 分) 给定初边值问题
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & a < x < b,\ 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ u(a,t) = \alpha(t),\ u(b,t) = \beta(t), & 0 < t \leqslant T, \end{cases}$$
其中 $\varphi(x), \alpha(t), \beta(t)$ 是光滑函数, 且满足相容性条件 $\varphi(a) = \alpha(0), \varphi(b) = \beta(0)$. 取正整数 M, N, 记 $h = (b-a)/M, \tau = T/N, x_i = a + ih\ (0 \leqslant i \leqslant M), t_k = k\tau$ $(0 \leqslant k \leqslant N)$.
   1) 写出求上述定解问题的古典隐格式;
   2) 设 $f(x,t) \equiv 0, \alpha(t) = \beta(t) \equiv 0$, $\{u_i^k | 0 \leqslant i \leqslant M, 0 \leqslant k \leqslant N\}$ 是古典隐格式的解, 记 $r = \tau/h^2$, $\|u^k\|_\infty = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant M} |u_i^k|$, $k = 0,1,\cdots,N$, 证明: 对任意步长比 r, 有
$$\|u^k\|_\infty \leqslant \|u^0\|_\infty, \quad k = 1,2,\cdots,N.$$

2010 年秋季工学硕士研究生学位课程考试试题 (A)

1. (10 分) 设近似值 $x = 2.01$ 和 $y = 3.14$ 的相对误差限分别是 $|e_r(x)| \leqslant 0.003$, $|e_r(y)| \leqslant 0.002$, 试求函数 $z = x\sin(x+2y)$ 的相对误差限.

2. (10 分) 分析方程 $x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$ 存在几个实根, 并用迭代法求出这些实根, 精确到 3 位有效数字.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法求下列线性方程组的解:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

4. (10 分) 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & -1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

其中 a, b, c 均为正数. 证明: 求上述方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式同时收敛同时发散, 并且当收敛时, Gauss-Seidel 迭代格式的收敛速度比 Jaboci 迭代格式的收敛速度快.

5. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^3[a,b]$, 并且 $f(a) = f(b) = 0$.

   1) 求一个 2 次多项式 $p(x)$, 使其满足 $p(a) = f(a), p'(a) = f'(a), p(b) = f(b)$;

   2) 求一个 2 次多项式 $q(x)$, 使其满足 $q(a) = f(a), q(b) = f(b), q'(b) = f'(b)$;

   3) 证明:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x) - \frac{f'(b)-f'(a)}{2(b-a)}(x-a)(x-b)\right| \leqslant \frac{1}{48}(b-a)^3 \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'''(x)|.$$

6. (10 分) 求 1 次多项式 $p_1(x) = a + bx$, 使得

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|x^3 - p_1(x)|$$

取最小值, 并求此最小值.

7. (10 分) 已知求积公式

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

为 Gauss 公式, 试给出形如

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

的求积公式, 使其代数精度达到 5.

8. (10 分) 已知函数表

x	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750
$f(x)$	0.84147	0.90227	0.94898	0.98089	0.99749	0.99853	0.98399
x	0.875	1.000	1.125	1.250	1.375	1.500	1.625
$f(x)$	0.95409	0.90930	0.85032	0.77807	0.69369	0.59847	0.49392
x	1.750	1.875	2.000				
$f(x)$	0.38166	0.26345	0.14112				

用复化 Simpson 公式计算积分 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 要求精确到 5 位有效数字.

9. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 记

$$h = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + ih, i = 0,1,2,\cdots,n; \quad y_i \approx y(x_i),\ i = 1,2,\cdots,n,\ y_0 = \eta.$$

1) 用数值积分方法构造形如

$$y_{i+1} = y_{i-1} + h[Af(x_{i+1},y_{i+1}) + Bf(x_i,y_i) + Cf(x_{i-1},y_{i-1})]$$

的数值求解公式, 并写出该求解公式的阶数和局部截断误差表达式;

2) 用改进的 Euler 公式与上述公式构造一个预测 - 校正公式.

10. (10 分) 给定初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & a < x < b,\ 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ u(a,t) = 0,\ u(b,t) = 0, & 0 < t \leqslant T, \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 是光滑函数, 且满足相容性条件 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. 取正整数 M, N, 记 $h = (b-a)/M,\ \tau = T/N; x_i = a + ih, 0 \leqslant i \leqslant M; t_k = k\tau, 0 \leqslant k \leqslant N$. 设有求上述定解问题的差分格式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}\left(u_i^{k+1} - u_i^k\right) + \dfrac{1}{2h}\left(u_{i+1}^k - u_{i-1}^k\right) - \dfrac{1}{h^2}\left(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k\right) = f(x_i,t_k), \\ \qquad 1 \leqslant i \leqslant M-1, 0 \leqslant k \leqslant N-1, \\ u_i^0 = \varphi(x_i), \qquad 0 \leqslant i \leqslant M, \\ u_0^k = 0,\ u_M^k = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N. \end{cases}$$

1) 写出上述差分格式的截断误差表达式.

2) 设 $f(x,t)\equiv 0$, $\{u_i^k|0\leqslant i\leqslant M, 0\leqslant k\leqslant N\}$ 是上述差分格式的解, 记 $r=\tau/h^2$, $\|u^k\|_\infty=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant M}|u_i^k|$, $k=0,1,\cdots,N$. 证明: 当步长比 $r\leqslant\dfrac{1}{2}$ 且 $h\leqslant 2$ 时有下面的估计式

$$\|u^k\|_\infty\leqslant\|u^0\|_\infty,\quad k=1,2,\cdots,N.$$

2010 年秋季工学硕士研究生学位课程考试试题 (B)

1. (10 分) 设 $x^* = \sqrt[3]{2011}$, $y^* = \sqrt[3]{2010}$, x^* 和 y^* 的具有 6 位有效数字的近似值分别为 $x = 12.6223$ 和 $y = 12.6202$. 试分析下面两种算法所得结果至少具有几位有效数字:

   1) $x^* - y^* \approx x - y = 0.0021$;

   2) $x^* - y^* = \dfrac{1}{(x^*)^2 + x^*y^* + (y^*)^2} \approx \dfrac{1}{x^2 + xy + y^2} = 0.002092541\cdots$.

2. (10 分) 给定方程 $x^3 - 5x^2 + 2 = 0$, 分析该方程有几个实根, 并用迭代法求方程的最大实根, 精确到 3 位有效数字.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

4. (10 分) 给定下列线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

   试写出求解该方程组的 Gauss-Seidel 迭代格式, 并分析收敛性.

5. (10 分) 已知 $f(x)$ 的如下信息:

i	0	1	2
x_i	1	2	4
$f(x_i)$	−1	1	2
$f'(x_i)$	4		−4

   求一个 4 次多项式 $H(x)$, 使得

$$H(x_i) = f(x_i),\quad 0 \leqslant i \leqslant 2;\quad H'(x_i) = f'(x_i),\quad i = 0, 2.$$

6. (10 分) 求 a, b, 使得积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left[\mathrm{e}^x - (a + bx^2)\right]^2 \mathrm{d}x$ 取最小值.

7. (10 分) 设 $f \in C^1[a, b]$, 求 x_0, c_1, c_2, 使求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx c_1 f(x_0) + c_2\left[f'(b) - f'(a)\right]$$

   具有尽可能高的代数精度, 并指出达到的最高次代数精度的次数.

8. (10 分) 设 $f(x) \in C^4[a, b]$, $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 而

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

为计算 $I(f)$ 的 Simpson 公式. 将 $[a,b]$ 进行 n 等分, 记 $h=(b-a)/n, x_i=a+ih$, $0\leqslant i\leqslant n$; $x_{i+\frac{1}{2}}=(x_i+x_{i+1})/2, 0\leqslant i\leqslant n-1$.

1) 写出计算积分 $I(f)$ 的复化 Simpson 公式 $S_n(f)$;

2) 已知

$$I(f)-S(f)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi),\quad \xi\in(a,b),$$

证明: 存在 $\eta\in(a,b)$, 使得

$$I(f)-S_n(f)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta).$$

9. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b,\\ y(a)=\eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 记 $h=(b-a)/n, x_i=a+ih, i=0,1,2,\cdots,n; y_i\approx y(x_i), 1\leqslant i\leqslant n$, $y_0=\eta$. 试求下面公式的局部截断误差和阶数:

$$y_{i+1}=y_i+hf\left(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)\right).$$

10. (10 分) 设抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & 0<x<1,\ 0<t\leqslant T,\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0,t)=\alpha(t),\ u(1,t)=\beta(t), & 0<t\leqslant T \end{cases}$$

有光滑解 $u(x,t)$, 其中 $\varphi(0)=\alpha(0), \varphi(1)=\beta(0)$. 取正整数 M 和 N, 并记 $h=1/M, \tau=T/N, r=\tau/h^2; x_i=a+ih,\ 0\leqslant i\leqslant M;\ t_k=k\tau,\ 0\leqslant k\leqslant N$. 设有求上述定解问题的差分格式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}\left(u_i^{k+1}-u_i^k\right)-\dfrac{1}{h^2}\left(u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k\right)=f(x_i,t_k), \\ \qquad\qquad\qquad 1\leqslant i\leqslant M-1, 0\leqslant k\leqslant N-1,\\ u_i^0=\varphi(x_i), \qquad 0\leqslant i\leqslant M,\\ u_0^k=\alpha(t_k),\ u_M^k=\beta(t_k), \qquad 1\leqslant k\leqslant N. \end{cases}$$

1) 写出上述差分格式的截断误差表达式;

2) 将差分格式写成矩阵和向量的形式;

3) 证明当 $r\leqslant 1/2$ 时差分格式在无穷范数下的收敛性.

2010 年秋季工学硕士研究生学位课程考试试题 (C)

1. (10 分) 设序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$$\begin{cases} y_n = 5y_{n-1} - 5, \quad n = 1, 2, \cdots, \\ y_0 = 1.732, \end{cases}$$

若 y_0 是具有 4 位有效数字的近似值, 试估计 y_{10} 的绝对误差限和相对误差限.

2. (10 分) 用简单迭代法求方程 $\sin x - x^2 + 2 = 0$ 的正根, 精确到 4 位有效数字, 并验证迭代法的收敛性.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

4. (10 分) 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & -1 \\ -2 & 1 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   1) 写出求解该方程组的 Jacobi 迭代格式;
   2) 取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 用 Jacobi 迭代法求方程组的解, 精确到 2 位有效数字.

5. (10 分) 若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 以 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 为插值节点的 $(n-1)$ 次插值多项式, $h(x)$ 是 $f(x)$ 以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为插值节点的 $(n-1)$ 次插值多项式, 证明函数

$$g(x) + \frac{x - x_0}{x_n - x_0}[h(x) - g(x)]$$

是 $f(x)$ 以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点的 n 次插值多项式.

6. (10 分) 求 a, b, 使得

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\ln(1 + x) - (a + bx)|$$

取最小值, 并求该最小值.

7. (10 分) 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $T(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$ 为计算 $I(f)$ 的梯形公式. 将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \leqslant i \leqslant n$.
   1) 写出计算积分 $I(f)$ 的复化梯形公式 $T_n(f)$;

2) 已知

$$I(f)-T(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi),\quad \xi\in(a,b),$$

证明: 存在 $\eta\in(a,b)$, 使得

$$I(f)-T_n(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta).$$

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), & a<x\leqslant b,\\ y(a)=\eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 记 $h=(b-a)/n; x_i=a+ih, i=0,1,2,\cdots,n; y_i\approx y(x_i), 1\leqslant i\leqslant n$, $y_0=\eta$. 试用数值积分方法导出 Adams 两步显式公式

$$y_{i+1}=y_i+h\left[\frac{3}{2}f(x_i,y_i)-\frac{1}{2}f(x_{i-1},y_{i-1})\right],$$

并写出局部截断误差的表达式.

9. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b,\\ y(a)=\eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 记 $h=(b-a)/n; x_i=a+ih, i=0,1,2,\cdots,n; y_i\approx y(x_i), 1\leqslant i\leqslant n$, $y_0=\eta$. 试分析公式

$$y_{i+1}=\frac{1}{2}(y_i+y_{i-1})+\frac{h}{8}[3f(x_{i+1},y_{i+1})+8f(x_i,y_i)+f(x_{i-1},y_{i-1})]$$

的局部截断误差, 并指出该公式是一个几阶公式.

10. (10 分) 设抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & 0<x<1,\ 0<t\leqslant T,\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0,t)=\alpha(t), u(1,t)=\beta(t), & 0<t\leqslant T \end{cases}$$

有光滑解 $u(x,t)$, 其中 $\varphi(0)=\alpha(0), \varphi(1)=\beta(0)$. 取正整数 M 和 N, 并记 $h=1/M, \tau=T/N; x_i=a+ih,\ 0\leqslant i\leqslant M;\ t_k=k\tau,\ 0\leqslant k\leqslant N$.

1) 写出求上述定解问题的古典隐格式;

2) 若 $f(x,t)=x+t, \varphi(x)=x(1-x), \alpha(t)=0, \beta(t)=0, h=1/3, \tau=1/3$, 求 u_1^1 和 u_2^1.