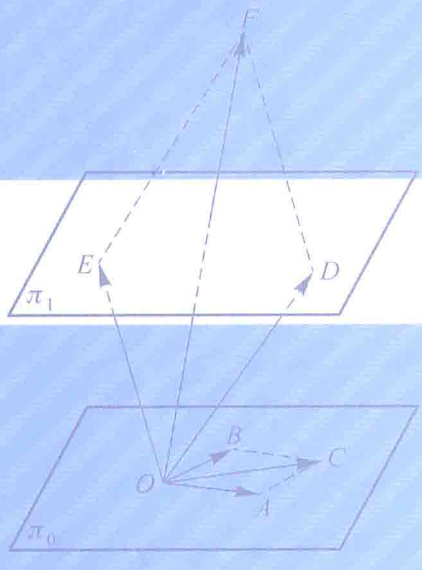

高等代数

（第三版）上 册

丘维声

DVANCED ALGEBR

高等教育出版社

高等代数

高等代数

Gaodeng Daishu

（第三版）

上　册

丘维声

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是高等学校的主干基础课“高等代数”课程的教材，它是作者积四十多年的教学经验，积极进行高等代数课程的教学目标、教学内容体系和教学方法改革的结果.全书既使学生扎实地掌握高等代数的基础知识和基本方法，又注重培养学生具有数学的思维方式；渗透现代数学研究结构和态射(即保持运算的映射)的观点，体现信息时代的要求，精选和更新教学内容；理论深刻,从具体到抽象，深入浅出，让学生在观察、探索、猜测和论证中生动活泼地学习.

全书分上、下两册.上册讲述线性代数的具体研究对象：线性方程组，行列式，数域 K 上的 n 维向量空间 K^n，矩阵的运算，欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$，矩阵的相抵与相似，二次型与矩阵的合同.下册讲述多项式环，线性空间，线性映射(包括线性变换和线性函数)，具有度量的线性空间(包含欧几里得空间，酉空间，正交空间，辛空间).本书按节配置适量习题，书末附有习题答案与提示.

本书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校的高等代数课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数,上册/丘维声编著.--3版.--北京：高等教育出版社,2015.3

ISBN 978-7-04-041880-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①丘… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 025961 号

策划编辑 田 玲　责任编辑 田 玲　封面设计 李小璐　版式设计 童 丹
插图绘制 郝 林　责任校对 陈 杨　责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	三河市华骏印务包装有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm×960mm 1/16		
印　张	17.25	版　次	1996年6月第1版
字　数	310 千字		2015年3月第3版
购书热线	010-58581118	印　次	2015年3月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	25.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 41880-00

第三版前言

这次对《高等代数(第二版)》(上册、下册)进行修订,主要在以下几方面:

1. 更加突出了高等代数课程的主线:研究线性空间的结构及其态射(即线性映射)

几何空间是实数域上的3维线性空间.物理学科中的闵可夫斯基空间是实数域上的4维线性空间,并且定义了一个非退化对称双线性函数作为内积.那么为什么要研究维数大于4的线性空间?促使我们研究维数大于4的线性空间的动力之一是直接从线性方程组的系数和常数项判断原方程组有无解,以及研究解集的结构.因此我们在上册第1章讲述线性方程组的解法;第2章为了研究n个方程的n元线性方程组有唯一解的充分必要条件,讲述了n阶行列式的概念和性质;第3章讲述数域K上的n维向量空间K^n及其子空间的结构,从而得出了线性方程组有解的充分必要条件,以及解集的结构.在下册的第8章详细研究了域F上线性空间的结构.在第10章研究了具有度量的线性空间(欧几里得空间,酉空间,正交空间和辛空间)的结构.

线性空间为研究数学学科和物理学科以及经济学科等的众多问题提供了广阔的天地.而线性映射好比是在线性空间这个广阔天地里驰骋的一匹匹骏马.我们在下册的第9章详细研究了线性映射(包括线性变换和线性函数)的运算、整体结构和矩阵表示;在第10章研究了在具有度量的线性空间上的与度量有关的线性变换的性质.为了给研究线性映射打下基础,也由于矩阵在许多领域中有广泛的应用,因此我们在上册第4章讲述了矩阵的运算;在第5章讲述了矩阵的相抵分类、相似分类;在第6章讲述了矩阵的合同分类和二次型.为了给研究线性变换的最简单形式的矩阵表示打下基础,也由于一元多项式和多元多项式在许多领域有重要应用,我们在下册第7章研究了数域K上一元多项式环$K[x]$的结构及其通用性质(即态射),以及n元多项式环的结构及其通用性质;并且在第7章从整数集$\mathbf{Z}$,偶数集$2\mathbf{Z}$,数域K上所有一元多项式组成的集合$K[x]$,以及数域K上所有n级矩阵组成的集合$M_n(K)$都有加法和乘法运算,以及它们满足的运算法则的共同点,抽象出环的概念;在第7章的最后一节从星期这一熟悉的现象引出模m剩余类环的概念,从模7剩余类环$\mathbf{Z}_7$和数域的共同点引出域的概念,从$\mathbf{Z}_7$与数域的不同点引出域的特征的概念.于是我们在下册第8章和第9章讲的是任意域上的线性空间及其线性映射,这是信息时代的需要.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

2. 充分展示了数学的思维方式

数学这门学科以抽象思维和逻辑思维著称，但是这些不是数学思维的全部. 数学的思维方式是一个全过程：观察客观现象，提出要研究的问题，抓住主要特征，抽象出概念，或者建立模型；运用“解剖麻雀”、直觉、归纳、类比、联想、逻辑推理等进行探索，猜测可能有的规律；采用公理化的方法，只使用公理、定义和已经证明了的定理进行逻辑推理来严密论证，揭示出事物的内在规律，从而使纷繁复杂的现象变得井然有序.

按照“观察—抽象—探索—猜测—论证”这一数学的思维方式讲授数学知识，就可以使同学们比较容易地学好数学，而且从中受到数学思维方式的熏陶和训练，这对于同学们今后从事任何工作都有帮助，终身受益.

我们在讲高等代数的概念和定理时，往往是首先观察几何空间中的例子，由此引出高等代数的概念，猜测可能有的结论，寻找证明结论的思路.

由于数学的论证只能是从公理、定义和已经证明了的定理进行逻辑推理，因此我们在写本套教材时有一个严密的理论体系，一环扣一环. 只要把前面学过的概念和定理（包括命题、推论、引理、公式、性质等）理解清楚了，记在脑子里了，那么在讲新的定理或做习题时，通过深入分析，就能从脑子里调出学过的概念和定理（包括已经做过的习题的结论），进行逻辑推理给予严密的证明.

3. 写进了作者的一些独到的科学见解

我们给出了行列式按 k 行（或 k 列）展开的拉普拉斯定理一个比较简洁的证明，详见上册第 2 章 §6.

我们给出了数域 K 上 n 元线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

有解的充分必要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 属于由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 生成的子空间 $\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle$. 这促使我们去研究 K^n 中由给定的向量组生成的子空间的结构. 而为了研究由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间 W 的结构，我们希望在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中找到一个部分组是线性无关的，并且 W 中每个向量可由这个部分组线性表出，这时表出方式就唯一了. 表法唯一有很多好处. 由这个想法我们引出了向量组的极大线性无关组的概念. 像这个例子那样，我们在讲一个重要概念时，总是要先讲一两个例子或目的，然后才引出这个概念.

我们在第 4 章 §3 证明了两个 n 级矩阵的乘积的行列式等于它们的行列式的乘积之后，提出问题：若 A,B 分别是 $s\times n,n\times s$ 矩阵，则 $|AB|$ 等于什么呢？我们先解剖一个“麻雀”：设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 \\ c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3 & c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3 \end{pmatrix}.$$

这启发我们把$(a_1,a_2,a_3)^T,(b_1,b_2,b_3)^T,(c_1,c_2,c_3)^T,(d_1,d_2,d_3)^T$分别看成是几何空间中向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$的右手直角坐标,然后运用解析几何中的拉格朗日恒等式得

$$\begin{aligned}|AB| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \left(-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)\left(-\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}\right) + \\ &\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1,2\\1,3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1,3\\1,2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1,2\\2,3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2,3\\1,2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此受到启发,猜测当$s<n$时,有

$$|AB| = \sum_{1\leqslant\nu_1<\cdots<\nu_s\leqslant n} A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,s\\ \nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_s\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_s\\ 1,2,\cdots,s\end{pmatrix}.$$

上式就是 Binet-Cauchy 公式.我们在第 4 章 §5 运用分块矩阵的初等行变换以及拉普拉斯定理给出了证明.

我们在下册第 7 章 §1 从数域K到$K[x]$中所有零次多项式添上零多项式组成的集合S的一个映射:$a\mapsto a$(即非零数a对应到零次多项式a,数 0 对应到零多项式 0),以及从数域K到$M_n(K)$中所有数量矩阵组成的集合W的一个映射:$k\mapsto kI$,都是双射,且都保持加法与乘法运算,抽象出环同构映射的概念.然后观察在$K[x]$中,

$$(2x+3)(x+5)=2x^2+13x+15; \tag{1}$$

设$A\in M_n(K)$,在由A的所有多项式组成的集合$K[A]$中有

$$\begin{aligned}(2A+3I)(A+5I) &= 2A^2+10AI+3IA+(3I)(5I) \\ &= 2A^2+13A+15I.\end{aligned} \tag{2}$$

(2)式的计算过程与(1)式的计算过程类似,这促使我们想:能不能不必进行(2)式的计算过程,而从(1)式中,x用矩阵A代入,每一项的系数换成它在K到W的环同构映射$k\mapsto kI$下的象,就直接得到(2)式呢?由此受到启发,我们猜测并且证明了下述结论:

定理 1(一元多项式环$K[x]$的通用性质) 设K是一个数域,R是一个有单位元$1'$的交换环,并且K到R的一个子环R_1(它含有$1'$)有一个环同构映射τ.任

意给定 $t\in R$,令

$$\sigma_t: \qquad K[x]\to R$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\mapsto\sum_{i=0}^{n}\tau(a_i)t^i\overset{\text{def}}{=\!=\!=}f(t),$$

则 σ_t 是 $K[x]$ 到 R 的一个映射,$\sigma_t(x)=t$,并且 σ_t 保持加法与乘法运算,即如果

$$f(x)+g(x)=h(x),\quad f(x)g(x)=p(x),$$

那么有

$$f(t)+g(t)=h(t),\quad f(t)g(t)=p(t).$$

我们把映射 σ_t 称为 x **用** t **代入**.

$K[x]$,$K[A]$(其中 A 是 K 上任一 n 级矩阵)都可以作为上述定理 1 中的环 R,因此不定元 x 可以用 $K[x]$中的任一多项式代入,也可以用 $K[A]$中任一矩阵代入,从 $K[x]$中已知的有关加法和乘法的等式,得到 $K[x]$中新的等式,以及得到 $K[A]$中有关加法和乘法的等式.这对于研究一元多项式环 $K[x]$的结构,以及研究线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的最简单形式的矩阵表示(x 也可以用 $\boldsymbol{A}$ 代入)起了十分重要的作用.

我们在下册第 7 章 §2, §3, §5 分别指出并且证明了:整除性不随数域的扩大而改变,首项系数为 1 的最大公因式不随数域的扩大而改变,互素性不随数域的扩大而改变,有无重因式不随数域的扩大而改变.这些结论有重要作用.

我们在下册第 8 章阐述了研究线性空间的结构的 4 条途径:

第 1 条途径是基.只要知道了域 F 上线性空间 V 的一个基,那么 V 中每一个向量 α 可以由这个基中的有限多个向量线性表出,且表法唯一.

第 2 条途径是子空间的直和.如果域 F 上 n 维线性空间 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$,那么 V_1 的一个基,V_2 的一个基,$\cdots$,V_s 的一个基合起来是 V 的一个基;反之也成立.

第 3 条途径是线性空间的同构.域 F 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相同.从而域 F 上任一 n 维线性空间 V 都与 F^n 同构,在 V 中取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,把 V 中每个向量 α 对应到它在此基下的坐标的映射就是 V 到 F^n 的一个同构映射.

第 4 条途径是商空间.设 W 是域 F 上线性空间 V 的一个子空间,如果商空间 V/W 的一个基为

$$\beta_1+W,\beta_2+W,\cdots,\beta_t+W,$$

令 $U=\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\rangle$,那么 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是 U 的一个基,并且 V 有一个直和分解:$V=W\oplus U$.这是可以利用商空间研究线性空间的结构的道理之一.对于 n 维线性空间 V 的非零子空间 W,由于 $\dim(V/W)=\dim V-\dim W$,因此 $\dim(V/W)<\dim V$.从而我们可以利用数学归纳法来证明线性空间中有关被商空间继承的性质的结论.这是可以利用商空间研究线性空间的结构的道理之二.

我们在下册第 9 章 § 3 后面的阅读材料六中，从几何空间 V 中，设 U 是过定点 O 的一个平面，W 是过点 O 的一条直线且不在 U 内，平行于 W 在 U 上的投影 $\boldsymbol{P}_U$，平行于 U 在 W 上的投影 $\boldsymbol{P}_W$ 都是幂等变换且是正交的；而 $\boldsymbol{P}_U+\boldsymbol{P}_W=\boldsymbol{I}$ 也是幂等变换，且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{P}_U+\operatorname{rank}\boldsymbol{P}_W=\operatorname{rank}\boldsymbol{I}$，受到启发，猜测有下述结论：

定理 2 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都是 V 上的线性变换，则 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 是两两正交的幂等变换当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_s$ 是幂等变换，且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_1+\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_2+\cdots+\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_s$.

我们先证相应的矩阵的结论.必要性通过直接计算立即得出 A 是幂等矩阵，然后利用数域 K 上幂等矩阵的秩等于它的迹证出 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A_1+\cdots+\operatorname{rank}A_s$.关于充分性，我们先运用线性空间的同构求出了 $AM_n(K)$ 的维数；然后在 $A=A_1+\cdots+A_s$ 且 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A_1+\cdots+\operatorname{rank}A_s$ 的条件下证明了 $AM_n(K)$ 有直和分解：$AM_n(K)=A_1M_n(K)\oplus\cdots\oplus A_sM_n(K)$；最后利用 $AM_n(K)$ 的直和分解式一举证出了 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 是两两正交的幂等矩阵.

然后利用数域 K 上的 n 维线性空间 V 中取定一个基后，V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 对应到它在这个基下的矩阵 A 的映射 σ 是双射，且保持加法、数量乘法与乘法运算，立即证出了定理 2.

我们在研究域 F 上 n 维线性空间 V 上的不可以对角化的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的最简单形式的矩阵表示时，途径是把 V 分解成 $\boldsymbol{A}$ 的非平凡不变子空间的直和，此时 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的适当基下的矩阵 A 是分块对角矩阵.如何得到 $\boldsymbol{A}$ 的一些非平凡不变子空间呢？由于对于 $F[x]$ 中任一多项式 $g(x)$，有 $\operatorname{Ker}g(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，因此为了得到 V 的这样的直和分解，引出了 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式的概念，进而引出了 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式的概念.若 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s},$$

则

$$V=\operatorname{Ker}m(\boldsymbol{A})=\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})^{l_1}\oplus\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})^{l_2}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_s\boldsymbol{I})^{l_s}.$$

记 $W_j=\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{l_j},j=1,2,\cdots,s$，则 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$.在 W_j 中取一个基，$j=1,2,\cdots,s$，它们合起来是 V 的一个基，$\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵 $A=\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$，其中 A_j 是 $\boldsymbol{A}|W_j$ 在 W_j 的上述基下的矩阵，$j=1,2,\cdots,s$.为了使 A 最简单，就应当使每个 A_j 最简单.利用唯一因式分解定理可证出 $\boldsymbol{A}\mid W_j$ 的最小多项式是 $(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$，从而

$$\boldsymbol{A}\mid W_j=\lambda_j\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_j,$$

其中 $\boldsymbol{B}_j$ 是 W_j 上的幂零指数为 l_j 的幂零变换.$\boldsymbol{B}_j$ 在 W_j 的上述基下的矩阵 $B_j=A_j-\lambda_jI$.于是为了使 A_j 最简单，就应使 B_j 最简单.这样问题归结为幂零变换的最简单形式的矩阵表示.

设 $\boldsymbol{B}$ 是域 F 上 r 维线性空间 W 上的幂零变换，且幂零指数为 l.对于任意

$\alpha\in W$且 $\alpha\neq0$,由于 $\boldsymbol{B}^{l}=\boldsymbol{0}$,因此存在正整数 t 使得 $\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha\neq0$,而 $\boldsymbol{B}^{t}\alpha=0$.于是 $\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha,\alpha$ 线性无关.从而它是子空间$\langle\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha,\alpha\rangle$的一个基,这个子空间是 $\boldsymbol{B}$ 不变子空间,称它为一个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间.由于 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha)=\boldsymbol{B}^{t}\alpha=0$,因此 $\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 0 的一个特征向量.我们把 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 0 的特征子空间记作 W_0.对于任意 $\eta\in W_0$,有 $\boldsymbol{B}\eta=0$.于是$\langle\eta\rangle$是一个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间.有可能 η 是某一个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间的第一个基向量 $\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha$.当 $t=1$ 时,这个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间就是$\langle\eta\rangle$.假如 W 能分解成若干个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间的直和:

$$W=\langle\boldsymbol{B}^{t_1-1}\alpha_1,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha_1,\alpha_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\boldsymbol{B}^{t_s-1}\alpha_s,\cdots,\alpha_s\rangle\oplus\langle\eta_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\eta_q\rangle,$$

则向量组 $\boldsymbol{B}^{t_1-1}\alpha_1,\boldsymbol{B}^{t_2-1}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{B}^{t_s-1}\alpha_s,\eta_1,\cdots,\eta_q$ 线性无关,它们都属于 W_0.又由于对于任意 $\eta\in W_0,\eta$ 都属于某一个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间.因此我们猜测上述向量组是 W_0 的一个基,从而猜测有下述结论:

定理 3 设 $\boldsymbol{B}$ 是域 F 上 r 维线性空间 W 上的幂零变换,其幂零指数为 l,$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 0 的特征子空间记作 W_0,则 W 能分解成 $\dim W_0$ 个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间的直和.

我们对线性空间的维数 r 作第二数学归纳法,运用上面所讲的利用商空间研究线性空间的结构的两个道理,证明了定理 3.$\boldsymbol{B}$ 在每个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间$\langle\boldsymbol{B}^{t_j-1}\alpha_j,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha_j,\alpha_j\rangle$上的限制在基 $\boldsymbol{B}^{t_j-1}\alpha_j,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha_j,\alpha_j$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

称它为一个主对角元为 0 的 t_j 级 Jordan 块,记作 $J_{t_j}(0)$.在 W 的上述直和分解式中,每个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间取上述基,它们合起来是 W 的一个基,$\boldsymbol{B}$ 在此基下的矩阵 B 是由这些 Jordan 块组成的分块对角矩阵,称它为一个 Jordan 形矩阵,把 B 称为 $\boldsymbol{B}$ 的一个 Jordan 标准形.我们给出了 B 中 Jordan 块的总数的公式,以及 t 级 Jordan 块的个数 $N(t)$ 的计算公式.由于它们都由 $\boldsymbol{B}$ 的方幂的秩决定,因此 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准形除去 Jordan 块的排列次序外是唯一的.

从前面所讲的研究 V 上线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的最简单形式的矩阵表示的途径,以及上述幂零变换的 Jordan 标准形的结论,我们立即得到:若 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成一次因式的乘积,则 V 中存在一个基,使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵 A 为 Jordan 形矩阵,其主对角元为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.我们给出了主对角元为 λ_j

的 Jordan 块的总数 N_j 的公式,以及其中 t 级 Jordan 块的个数 $N_j(t)$ 的计算公式.由于它们都是由 $\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I}$ 的方幂的秩决定,因此除去 Jordan 块的排列次序外,$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形是唯一的.我们进一步证明了:

定理 4 域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 有 Jordan 标准形的充分必要条件是,$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成一次因式的乘积.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在域 F 中有相同的根(重数可以不同),而且在域 $E(\supseteq F)$ 中也有相同的根(重数可以不同),因此也有下述结论:

域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 有 Jordan 标准形当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成一次因式的乘积.

我们在下册的第 10 章讲述了研究实内积空间的结构的 3 条途径:

第 1 条途径是对于 n 维欧几里得空间 V,证明它存在标准正交基.标准正交基的优越性之一是计算 V 中任意两个向量的内积非常容易,优越性之二是向量 α 的坐标的分量可以由内积给出(即 α 的 Fourier 展开).

第 2 条途径是利用实内积空间的子空间.我们证明了:若 U 是实内积空间 V 的有限维子空间,则 V 有这样的直和分解:$V=U\oplus U^{\perp}$.于是当 V 是有限维实内积空间(即欧几里得空间)时,U 的一个标准正交基与 $U^{\perp}$ 的一个标准正交基合起来是 V 的一个标准正交基.当 $V=U\oplus U^{\perp}$ 时,有平行于 $U^{\perp}$ 在 U 上的投影 $\boldsymbol{P}_U$,称它为 V 在 U 上的正交投影,α 在 $\boldsymbol{P}_U$ 下的象 α_1 称为 α 在 U 上的正交投影.$\alpha_1\in U$ 是 α 在 U 上的正交投影当且仅当 $d(\alpha,\alpha_1)\leqslant d(\alpha,\gamma)$, $\forall\gamma\in U$.由此引出 α 在 U 上的最佳逼近元的概念.当 U 是有限维时,α 在 U 上的最佳逼近元存在且唯一,它就是 α 在 U 上的正交投影.

第 3 条途径是实内积空间的同构.两个有限维实内积空间(即欧几里得空间)同构的充分必要条件是它们的维数相同.从而任一 n 维欧几里得空间都与装备了标准内积的 $\mathbf{R}^n$ 同构,其中一个同构映射是把 α 对应到 α 在 V 的一个标准正交基下的坐标.我们指出,实内积空间 V 到 V' 的同构映射 σ 的定义可以改成:"如果实内积空间 V 到 V' 有一个满射 σ 使得 σ 保持内积不变,那么 σ 称为实内积空间 V 到 V' 的一个同构映射."这是因为从 σ 保持内积不变可以推出 σ 保持长度不变,从而可以证明 σ 是 V 到 V' 的线性映射,并且 σ 是单射,这样结合定义中 σ 是满射,便得出 σ 是双射.

我们在第 10 章 §4 讲述了实内积空间 V 中与度量有关的变换:正交变换和对称变换.从平面上的平移、旋转、轴反射的共同点引出了正交变换的概念:实内积空间 V 到自身的满射 $\boldsymbol{A}$ 如果保持内积不变,那么称 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个正交变换.由于正交变换 $\boldsymbol{A}$ 保持内积不变,因此 $\boldsymbol{A}$ 保持向量的长度不变.从而可以证明 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的线性变换,且 $\boldsymbol{A}$ 是单射,结合定义中 $\boldsymbol{A}$ 是满射得出 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的.于是

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

实内积空间 V 上的一个变换 $\boldsymbol{A}$ 是正交变换当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是 V 到自身的一个同构映射.

我们从实内积空间 V 在它的有限维子空间 U 上的正交投影的性质引出了对称变换的概念:实内积空间 V 上的一个变换 $\boldsymbol{A}$ 如果满足 $(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)$, $\forall\,\alpha,\beta\in V$,那么称 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的对称变换.我们证明了 V 上的对称变换一定是线性变换.

我们从几何空间中的度量问题引出了实数域上的线性空间的内积的概念,研究了实内积空间.从数学的角度讲,自然要在复数域上的线性空间 V 中引进内积的概念,研究复内积空间.但是我们不能满足于这点,我们还应该问:在什么背景下需要研究复数域上的线性空间及其上的内积? 我们讲了一个例子:交流电路中复阻抗 Z,它的模给出了这段交流电路的阻抗,它的一个辐角给出了这段电路的电压与电流的相位差.这表明物理学科中的不少问题用复数来刻画有优越性.因此我们需要研究复数域上的线性空间,引进内积的概念,研究复内积空间(即酉空间).我们讲述了复数域上的线性空间如何引进内积的概念,为什么不能是 V 上的双线性函数,只能是对第一个变量是线性的;为了使 (α,α) 为实数,要求内积具有 Hermite(埃尔米特)性:$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$, $\forall\,\alpha,\beta\in V$;还要求内积具有正定性.于是给出了复数域上的线性空间 V 上的内积的定义.

我们在下册第 10 章 §4 的后面写了阅读材料七,探索 n 维欧几里得空间 V 上的正交变换 $\boldsymbol{A}$ 的最简单形式的矩阵表示是什么样子.基本思路仍是把 V 分解成 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的直和.

我们在下册第 10 章 §6 的后面写了阅读材料八,探索并且证明了特征为 2 的域 F 上的 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数的度量矩阵的最简单形式.

在这次修订中,我们增加了一些重要的习题,在书末给出了这些题的解答的详细提示.

本套教材从理论上,从数学系的后续课程以及物理等学科的需要上,精选了教学内容和习题.教学内容都是基础的、主要的内容,理论深刻,深入浅出;习题都是重要的题.这些教学内容的深度和广度以及习题的题量对于大学一年级的高等代数课程的教学是合适的.需要了解高等代数的更多内容和做更多习题的读者,可以看作者写的为本套教材配套的内容全面、例题和习题丰富的《高等代数学习指导书》(上册、下册)(丘维声编著,清华大学出版社,2005 年,2009 年).

本套书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校的高等代数课程的教材.

感谢高等教育出版社的李蕊编辑和田玲编辑，她们为本书的出版付出了辛勤的劳动.

真诚欢迎广大读者对本套教材提出宝贵意见.

丘维声

于北京大学数学科学学院

2014 年 6 月

第二版前言

《高等代数》(上册、下册)自1996年出版以来,一直作为北京大学数学科学学院高等代数课程的教材,同时也被不少综合大学数学系作为教材.作者自1994年以来,使用此教材(含它的前身讲义)连续给1994级至2001级共八届学生讲授高等代数课,深受广大学生的欢迎.北京大学教学评估室和学生教育评估委员会先后对作者讲授的高等代数课进行了8次评估,作为评估内容之一,每次都对此教材作了充分肯定.现在已经进入21世纪,作者根据时代的要求,结合这8年使用此教材的教学经验,对教材进行修订,使之更完善.

高等代数课程主要讲授线性代数,多项式理论,以及群、环、域的基本概念.尤以线性代数占的比重大.线性代数是研究线性空间和线性映射的理论,它的初等部分是研究线性方程组和矩阵理论.作者在本书的修订过程中,精选了内容,着重阐述最基本的和应用广泛的内容;对于不那么基本,或者应用不那么广泛的内容则略为提及,不展开讲;有的内容则不讲.对于每一节配备的习题也作了精心挑选.

随着时代的发展,计算机的普及,线性代数和多项式理论的重要性越来越被人们所认识.教好、学好高等代数课程,关键之一是编写出科学性强又深入浅出的教材.本书在如何让学生容易理解和掌握高等代数课程的内容上是下了很大工夫的,总是从学生熟悉的具体例子引出抽象的概念,从全书的内容体系直至每一节的内容如何简明易懂地讲授都作了精心推敲.全书先讲高等代数的具体对象:线性方程组、矩阵、数域K上n元有序数组的向量空间K^n和欧几里空间$\mathbf{R}^n$、多项式,然后再讲抽象对象:线性空间和线性映射、欧几里得空间和酉空间、双线性函数和正交空间、辛空间(对于正交空间和辛空间只作简单介绍).本书强调讲道理,因为只有把道理讲清楚了,学生才能学好高等代数.同时我们认为讲道理不等于形式的逻辑证明.我们在为什么要引进每一个重要概念上讲清楚了道理,在为什么要学习这些基本内容上讲清楚了道理,在如何证明定理上也讲了道理.我们不仅强调要讲道理,而且力求把道理讲得简明易懂.

我们认为高等代数课程的教学目标,既要让学生掌握这门课程的基础知识和基本方法,又要培养他们具有数学的思维方式.只有按照数学的思维方式去学习数学,才能学好数学.而且学会数学的思维方式,有助于他们把今后肩负的工作做好,从而使他们终身受益.什么是数学的思维方式?观察客观世界的现象,抓住其主要特征,抽象出概念或者建立模型;进行探索,通过直觉判断或者归纳

推理、类比推理作出猜测;然后进行深入分析和逻辑推理,揭示事物的内在规律,从而使纷繁复杂的现象变得井然有序.这就是数学的思维方式.本书按照数学的思维方式编写每一节的内容,使学生在学习高等代数知识的同时,受到数学思维方式的熏陶,日积月累地培养学生具有数学的思维方式,提高学生的素质.

为了让学生了解高等代数在数学的其他分支以及实际问题中的应用,增强动手能力,本书在每一章的后面都配备了“应用与实验课题”,供学生自己阅读和动手解决.有的应用课题需要使用计算机的数学软件,否则手算太费时间.

本书的每一节都配备了经过精心挑选的适量习题,在书末附有习题解答与提示.

为了帮助学生学好高等代数课,我们还编写了《高等代数学习指导书》(上册、下册).其内容包括基本理论的精华,如何在理论的指导下分析问题和解决问题,典型例题的解题思路和详细解答,拓宽知识面的阅读材料,经过挑选的丰富多彩的习题以及习题的解答和提示.

本书(上册和下册)可作为综合大学、理工科大学和师范院校的数学系、应用数学系和概率统计系的高等代数课程的教材.上册供第一学期使用,下册供第二学期使用.每学期的周学时可为 4+2 或 4+1 或 4 (4+2是指每周讲课 4 学时,习题课 2 学时,4+1 的含义类似).本书上册还可以作为综合大学、理工科大学等高等院校的线性代数课程的教材.

本书的第一版和这次修订先后获得 1996 年度和 2001 年度北京大学主干基础课高等代数课程建设项目的资助,特此向北京大学教务部(教务处)表示衷心感谢.在这次修订过程中,得到北京大学数学科学学院院长张继平教授的关心和支持,特此向他表示衷心感谢.作者还要向这几年来使用本教材的所有教师表示感谢.

作者衷心感谢本书的责任编辑胡乃冏编审,他为本书的编辑出版付出了辛勤劳动.

作者热诚欢迎广大读者对本教材提出宝贵意见.

丘维声
于北京大学数学科学学院
2001 年 12 月

第一版序言

为了把学生培养成为面向21世纪的高水平人才，作者积多年讲授高等代数、抽象代数和群表示论等课程的经验以及从事科研工作的体会，写了一套高等代数讲义，用这套讲义给北京大学数学系和概率统计系94级学生讲授高等代数课，取得了很好的教学效果.接着又给这两个系的95级学生讲授此课，进一步修改这套讲义，现分上、下两册出版.

这套教材从我国的实际情况出发，面向21世纪，尝试对高等代数的教学内容进行一些改革，主要有以下几方面：

努力使教材现代化.21世纪的人才需要掌握现代数学的思想和方法.为此，本书注意渗透现代数学的一些基本思想和观点.例如，用等价关系把集合划分的思想，从代数结构着眼处理问题的思想，同构分类的思想，态射（保持运算的映射）的观点等.用现代的观点组织和讲授传统的教学内容.例如，通过讨论子空间的结构证明线性方程组有解判别定理；按照矩阵的相抵关系、相似关系、合同关系分别讨论矩阵的相抵分类、相似分类和合同分类，并且寻求每一种关系下的完全不变量；运用线性空间的同构分类思想证明域 F 上任一 n 维线性空间 V 与它的对偶空间 V^* 同构，以及 V 与它的双重对偶空间 V^{**} 同构；在讲一元多项式的概念时，用态射的观点阐述一元多项式环的通用性质；用环同构的观点讨论数域 K 上的多项式与多项式函数之间的关系等.本书还注意渗透现代数学的一些基本概念.例如，线性流形、商集等概念；结合高等代数的具体对象水到渠成地先后引进了抽象代数的一些基本概念：在一元多项式的概念之后引进环的概念；在讲完多项式环之后引进任意域和有限域的概念，以及域的特征的概念；在讲了线性变换的运算后引进域上的代数的概念；在最后一章当学生已经熟悉了正交变换、酉变换和辛变换的性质后，引进群和子群的概念.

力图在教材中体现代数与几何、分析的联系.21世纪的数学，分析、代数、几何将会更加相互渗透和有机结合.因此要使学生从大学一年级开始就逐步培养把代数与几何、分析联系起来的能力.书中注意从几何直观或分析背景引出高等代数讨论的问题，在讲述高等代数的概念时列举几何或分析的例子，把高等代数的结论应用于解决几何或分析的问题.例如，介绍了行列式的几何意义；从几何空间的结构引出向量空间的基的概念；运用线性方程组的理论解决一些几何问题；从平面旋转的合成引出矩阵乘法的定义；从二次曲面方程的化简引出实对称矩阵的对角化以及实二次型通过正交替换化成标准形的问题，并且运用所得到

的代数结论解决二次曲面方程的化简问题；从函数极值问题引出正定（负定）二次型的概念，并且运用正定（负定）矩阵解决多元函数的极值问题；在讲线性相关性时，讲述了 n 个 $n-1$ 次可微函数线性无关的充分条件；从几何空间中的例子引出商空间的概念，等等.为了将线性代数的理论应用到分析上，为泛函分析打下基础，本书讨论的线性空间可以是无限维的，尽量不加有限维的限制.

注重联系实际，加强应用.面向 21 世纪，数学系不仅要培养从事数学科研和教学的人才，而且要培养在其他领域工作的人才.因此要努力培养学生运用数学理论解决实际问题和其他领域中的问题的能力.本书在讲完线性方程组的理论后，用它解决平板受热问题；讲了矩阵可对角化的条件后，用它解决色盲遗传问题；在讲了矩阵的运算之后，解决区组设计、图论、数论中的一些问题；在讲了一元多项式环的通用性质后，用它证明组合数的一些公式等.考虑到矩阵在实际问题和许多领域中有广泛应用，本书不仅把矩阵贯穿始终，而且把矩阵的运算，矩阵的相抵分类、相似分类、合同分类集中在一起讲授，并且加强了矩阵的分块，矩阵的“打洞”以及巧用特殊矩阵的训练；讲述了 Binet-Cauchy 公式及其应用.考虑到有限域上的线性空间在计算机以及通讯编码中有重要应用，书中讨论的线性空间是任意域上的，不局限于数域.考虑到现代物理以及一些数学分支中的需要，加强了酉空间的内容，介绍了作为爱因斯坦相对论基础的闵可夫斯基空间，并且讨论了一般的正交空间以及辛空间.

提高数学素质，加强能力培养.21 世纪所需要的人才应当有较高的数学素质和较强的分析问题、解决问题的能力.数学素质包括提出数学问题、理解力、逻辑思维、抽象思维、创造性等几个方面.为了从大学一年级开始就着力培养学生的数学素质，本书在每一单元的开头都要提出问题，然后阐述解决问题的想法，经过抽象思维和逻辑思维一步一步地去解决这些问题.书中特别注意讲清楚想法（idea）.例如，在研究线性方程组有无解的判定时为什么会想到去研究 n 元有序数组的向量空间的结构？在讨论有理系数多项式的因式分解时怎么会想到引进本原多项式的概念？在研究不可以对角化的线性变换的结构时如何想到最小多项式的因式分解并且讨论相应线性变换的多项式核之间的关系？复线性空间上内积的定义为什么与实线性空间上内积的定义不同？在任意域上的线性空间中如何引进度量？为什么只有两种度量：对称双线性函数或者斜对称双线性函数，而不用一般的双线性函数？等等，书中都给予了清晰的回答.为了培养学生的阅读、理解能力和扩大知识面，书中有较多的例题，并且有密切配合正文的加“*”号的章节内容和一些阅读材料.有些例题不必在课堂上讲授，留给学生自己看.加“*”号的内容和阅读材料不作为教学要求，供有兴趣的学生自学.本书配备了相当丰富的习题（每一节后面配有习题，每一章后面还有补充题），有的是为了使学生理解正文的概念，掌握正文中的定理和方法，学会重要的解题方法和

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com