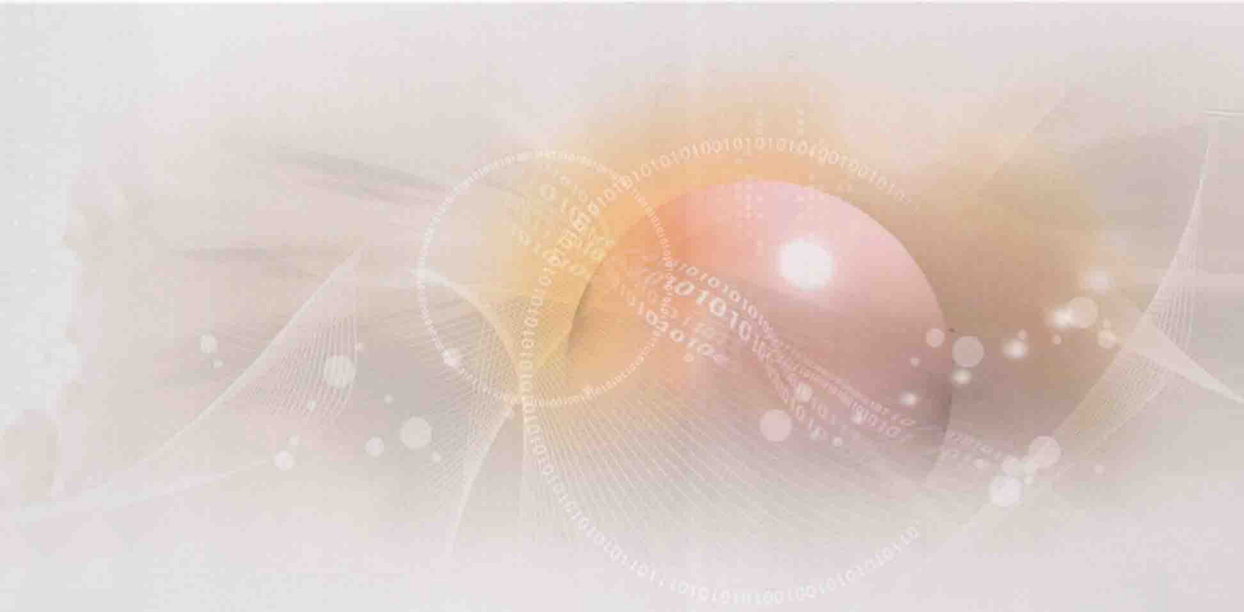
Yingyong Fubian Hanshu Yu
Jifen Bianhuan

应用复变函数与积分变换

主　编：王以忠　吕林燕　张相虎　刘照军
副主编：王鲁新　郭文静　赵　丹　马芳芳
汪卫忠
主　审：杨德运



中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

应用复变函数与积分变换

主　编　王以忠　吕林燕　张相虎　刘照军

副主编　王鲁新　郭文静　赵　丹　马芳芳　汪卫忠

主　审　杨德运

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

应用复变函数与积分变换是机电、建筑、计算机和物理学等相关专业的一门重要基础课程，它既是学生学习后续专业课的基础，又是他们将来从事专业技术工作的重要基础和工具。本书是为适应培养创新型与应用型本科人才和教学改革的需要，为适应科技和工程技术人员对积分变换的需要而编写的，其内容与结构新颖，注重直观性、实用性和创新性，深入浅出，简洁易读。

本书介绍了复变函数与积分变换的基本理论和方法。全书共分七章，主要内容包括复变函数，解析函数，复变函数的积分，傅立叶变换，拉普拉斯变换，解析函数的级数表示，留数及其应用等。

本书既可作为工科和理科相关专业的教材，也可作为相关工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用复变函数与积分变换 / 王以忠等主编. 一徐州：中国矿业大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5646-2095-0

Ⅰ.①应… Ⅱ.①王… Ⅲ.①复变函数②积分变换 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 250314 号

书　　名　应用复变函数与积分变换
主　　编　王以忠　吕林燕　张相虎　刘照军
责任编辑　黄本斌　潘俊成
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×960　1/16　**印张** 11.25　**字数** 227 千字
版次印次　2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　25.00 元

前　言

复变函数与积分变换是机电工程、计算机及物理学等相关专业的一门重要基础课程，它既是学生学习后续专业课的基础，又是他们将来从事专业技术工作的重要基础和工具. 它是学生合理知识体系中的重要环节，同时在培养学生的发现问题能力、思辨能力、解决问题能力、将知识转化为现实生产力的能力和创新能力以及在数学素质教育等方面都起着非常重要的作用.

《应用复变函数与积分变换》一书是为了适应创新型与应用型本科人才培养和教学改革的需要，在作者参阅了大量国内外有代表性的文献资料和教学实践的基础上，按照工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》的要求编写而成的. 本书面向工科及理科学生，对教学内容和课程体系进行了大幅调整，增加了部分工程应用实例，不追求理论的系统性和完整性，注重直观性、实用性和创新性，深入浅出，简洁易读. 具体说来具有如下特点：

一、直观性强

目前学生普遍反映本门课程抽象、难学，譬如一开始讲到的复变函数概念，就让学生感到很虚无. 本书则在讲述了复变函数概念之后，紧接着就介绍在流体力学或电学等领域中的平面定常向量场. 给定向量场(如平稳流动的江水的流速场)：$\boldsymbol{a}=a_x(x,y)\boldsymbol{i}+a_y(x,y)\boldsymbol{j}$，如果把单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 换成虚单位 i 便得到复变函数 $w=a_x(x,y)+a_y(x,y)\mathrm{i}$，这样学生也就不再对此感到陌生与抽象. 而传统教材中把平面向量场放在复变函数课程体系的最后面来介绍则效果不佳. 再如，在导数概念之后马上介绍其几何意义，其余像积分概念及解析函数等重要内容我们都采用了上述类似的处理，加强了知识的直观性.

二、突出应用特点，注重创新能力以及数学素养的培养

本书的应用实例和直观性例子较多，它们都是与其相应的理论知识在体系上紧密相连的，都是前面所学知识的具体反映. 研究这些问题时，教师不必把意义强加给学生，可以让他们自己建构意义. 教师只要注意引导学生自己去发现并界定问题，提出解决方案，查找问题并改进解决方案. 我们知道，科学的本质是它的疑难、问题、功能或者目的，而不在于它的研究对象、各种软硬件和方法，教学

中应引导学生弄清楚科学与科学方法两者之间的区别.方法论固然重要,实际上只有科学的目标或目的才使方法论显示出重要性和合理性,我们要关心方法问题,但前提应该是它们能够帮助我们达到预期的目标,也就是要解决问题.实际上技术是服务于解决问题的,决不能使问题适合于自己的技术.学生在自己探究问题的过程中就会慢慢领悟到:领域的划分往往不是由关于客观世界的一个根本问题来划定的,而是由学科的发展和技术的局限来决定的.这样学生也许会把本课程当做他们的专业课来学,如此,就会激发他们学习的积极性.学生在教师的指导下自行探究问题的过程当中,他们的创新能力与数学素养也自然会得到提高.

三、课程体系合理

本书与传统教材相比,在内容体系上有很大的不同.把复数及平面点集放到了附录中,这一部分内容,学生过去都接触过,并不陌生.一些重要概念的几何解释或物理解释直接放在相应概念的后面,如传统教材都把导数的几何意义放到保形映照中讲,本书则是在导数概念之后马上介绍其几何意义;在解析函数之后直接介绍复势.初等复变函数既是教学重点也是难点,我们在第一章讲解初等函数的基本概念和性质,在第二章进一步去研究它们的解析性,这样既分散了难点,同时也是一个循序渐进的过程,对于培养学生思维的深刻性不无裨益.本课程应该先于专业课程之前开设,然而由于各种各样的原因,不少学校是在同一学期同时开设一些专业课和复变函数与积分变换课程的,这样积分变换部分就会影响到专业课的教学.为了更好地与专业课衔接,本书把积分变换放在了第四章、第五章,而在第七章的留数之后再进一步予以介绍,同样也是既分散了难点,又不影响专业课教学,一举两得,我们的教学实践也佐证了这种处理方法的可行性与合理性.

总之,本书选材精炼,内容与结构新颖,创新性强,推理简明,直观性与应用性强,且循序渐进,通俗易读.本书由王以忠(山东科技大学)、吕林燕(济南大学)、张相虎(山东科技大学)和刘照军(泰山医学院)担任主编,王鲁新(山东科技大学)、郭文静(山东科技大学)、赵丹(沈阳工程学院)、马芳芳(山东科技大学)和汪卫忠(山东科技大学)任副主编。全书共分7章,刘照军、马芳芳编写了第一章,王鲁新编写了第二章,王鲁新、赵丹编写了第三章,王以忠编写了第四章,吕林燕、王以忠编写了第五章,张相虎、汪卫忠编写了第六章和附录部分,郭文静编写了第七章.全书由吕林燕、王以忠统稿.吕林燕、王鲁新、郭文静和张相虎制作了课件。杨德运教授担任主审,对本书的总体结构和内容构成进行了全面审阅,

提出了许多宝贵的意见和建议，在此对杨德运院长表示衷心的感谢.

本书是山东科技大学、济南大学、泰山医学院和沈阳工程学院等院校的老师精诚合作的结果，在编写过程中得到了济南大学和山东科技大学相关部门和领导的大力支持，济南大学数学科学学院的管延勇院长、杨殿武主任给予了热情的帮助，并提出了许多宝贵的意见和建议，在此一并表示真诚的感谢.

作者水平所限，书中不妥之处敬请广大师友和读者批评指正.

作　者

2014 年 5 月

目　录

第 1 章　复变函数与极限 ………………………………………… 1

§1.1　复变函数 ………………………………………… 1

§1.2　初等函数 ………………………………………… 4

§1.3　复变函数的极限与连续性 ………………………………………… 9

习题一 ………………………………………… 12

第 2 章　解析函数 ………………………………………… 13

§2.1　复变函数的导数 ………………………………………… 13

§2.2　解析函数 ………………………………………… 17

§2.3　调和函数 ………………………………………… 20

习题二 ………………………………………… 27

第 3 章　复变函数的积分 ………………………………………… 30

§3.1　复积分的概念 ………………………………………… 30

§3.2　柯西积分定理 ………………………………………… 36

§3.3　柯西积分公式 ………………………………………… 43

§3.4　解析函数的高阶导数 ………………………………………… 47

§3.5　复积分的应用 ………………………………………… 50

习题三 ………………………………………… 52

第 4 章　傅立叶变换 ………………………………………… 55

§4.1　傅立叶积分 ………………………………………… 55

§4.2　单位脉冲函数 ………………………………………… 61

§4.3　傅氏变换的性质 ………………………………………… 64

§4.4　傅氏变换在轨道结构动力分析中的应用 ………………………………………… 68

习题四 ………………………………………… 70

第 5 章　拉普拉斯变换 …… 72
§5.1　拉普拉斯变换的定义 …… 72
§5.2　拉氏变换的性质 …… 74
§5.3　拉氏逆变换 …… 81
§5.4　拉氏变换的应用 …… 82
习题五 …… 86

第 6 章　级数 …… 89
§6.1　收敛序列与收敛级数 …… 89
§6.2　幂级数 …… 93
§6.3　泰勒级数 …… 98
§6.4　罗朗级数 …… 104
习题六 …… 111

第 7 章　留数及其应用 …… 115
§7.1　解析函数的孤立奇点 …… 115
§7.2　留数 …… 122
§7.3　留数的应用 …… 129
习题七 …… 138

附录 1　复数 …… 140
附录 2　傅式变换简表 …… 155
附录 3　拉氏变换简表 …… 158
习题答案 …… 162

参考文献 …… 169

第 1 章　复变函数与极限

复变函数实际上是自变量和因变量都为复数的函数. 复变量函数论是分析数学的一个分支,故又称复分析. 复变函数研究的主要对象为解析函数. 在引入这种解析函数之前,这一章中,我们首先介绍复变函数、初等函数、极限与连续等一些基本概念和基本理论.

§1.1　复变函数

1.1.1　复变函数的概念

设 E 为一复数集,若对 E 内每一复数 z,有唯一确定的复数 w 与之对应,则称在 E 上确定了一个单值函数 $w=f(z)(z\in E)$. 如对 E 内每一复数 z,有几个或无穷多个 w 与之对应,则称在 E 上确定了一个多值函数 $w=f(z)(z\in E)$. E 称为函数 $w=f(z)$的定义域. 对于 E,w 值的全体所构成集合 M 称为函数 $w=f(z)$的值域.

例如:$w=|z|$,$w=\bar{z}$,$w=z^2$,$w=\dfrac{z+1}{z-1}(z\neq 1)$均为 z 的单值函数;$w=\sqrt[n]{z}\ (z\neq 0,n\geqslant 2)$,$w=\mathrm{Arg}\ z(z\neq 0)$, 均为 z 的多值函数.

设 $w=f(z)$是定义在点集 E 上的单值或多值函数,并令 $z=x+\mathrm{i}y$,$w=u+\mathrm{i}v$,则 u,v 均随 x,y 而确定,因而 $w=f(z)$又常写成

$$w=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{1.1}$$

其中 $u(x,y)$,$v(x,y)$是二元实函数. 这样,一个复函数 $w=f(z)$就对应了两个二元实函数 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$.

既然如此,究竟为什么我们还要去考虑一元复函数呢? 实函数不是更为人们所熟知吗? 如果一个复函数等价于一对实函数,那么引进较不熟悉的复函数,其目的在哪里? 如果两个实函数 u,v 是随意选定的,二者之间没有什么特别联系,那么确实没有必要将它们结合起来作为一个复函数. 然而,在两个实函数是紧密相关的一些情况下,把两个关系式 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$缩写成一个关系式(1.1)更为有利.

例 1.1　设函数 $w=z^2+2$, 当 $z=x+\mathrm{i}y$ 时,w 可写成 $w=x^2-y^2+2+$

$2xy\mathrm{i}$,因而 $u(x,y)=x^2-y^2+2, v(x,y)=2xy$.

1.1.2 复变函数的几何意义

在高等数学中,我们常常把函数用几何图形表示出来,在研究函数的性质时,这些几何图形给我们很多直观的帮助.现在,我们就不能借助于同一个平面或同一个三维空间中的几何图形来表示复变函数.因由式(1.1):$f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,要描出 $w=f(z)$ 的图形,必须采用四维空间,也就是(u,v,x,y)空间,为了避免这个困难,我们取两张复平面,分别称为 z 平面和 w 平面.注意到,在平面上,不区分"点"和"数",也不再区分"点集"和"数集",我们把复变函数理解成两个复平面上的点集间的对应(映射或变换).具体地说,复变函数 $w=f(z)$ 给出了从 z 平面上的点集 E 到 w 平面上的点集 F 间的一个对应关系,也可以讲 $w=f(z)$ 是从 z 平面上的点集 E 到 w 平面上的点集 F 间的一种变换(图1.1).与点 $z\in E$ 对应的点 $w=f(z)$ 称为点 z 的像,同时点 z 就称为点 $w=f(z)$ 的原像.

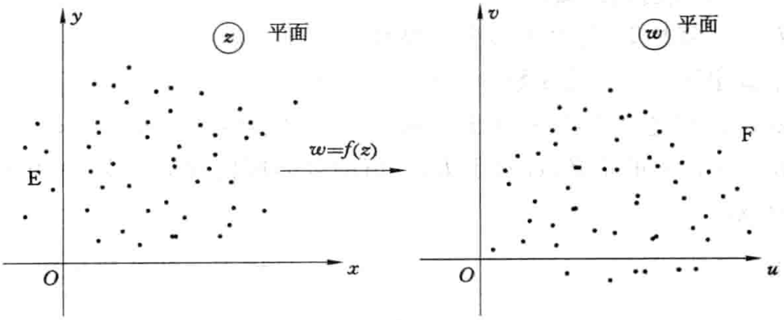


图 1.1

简单地说,复变函数的几何意义就是:它是一种变换,它把 z 平面上的点变换成了 w 平面上的点;把 z 平面上的一条曲线变换成了 w 平面上的一条曲线;把 z 平面上的一个区域变换成了 w 平面上的一个区域.

例如:函数 $w=z^2$ 把 z 平面上的点 $z=1+2\mathrm{i}$ 变换为 w 平面上的点 $w=-3+4\mathrm{i}$;把 z 平面上的圆 $|z|=3$ 变换成了 w 平面上的圆 $|w|=9$;而把 z 平面上的扇形区域

$$0<\theta<\frac{\pi}{4}, 0<r<2,$$

变换成 w 平面上的扇形区域

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2}, 0<\rho<4.$$

必须指出，像点的原像可能不只是一点，例如 $w=z^2$，则 $z=\pm 1$ 的像点均为 $w=1$，因此 $w=1$ 的原像是两个点 $z=\pm 1$.

1.1.3　平面向量场

复变函数不仅是一门重要的基础课程，同时它也是一门应用性很强的数学分支，它的发生与发展总是与应用紧密相连的，例如达朗贝尔及欧拉由流体力学导出了著名的柯西—黎曼条件；茹科夫斯基应用复变函数证明了关于飞机翼升力的公式，也正是有了实践的支持才推动了复变函数论的发展. 在很多学科之中都可以看到复变函数论的一些概念与结论的实际意义.

下面我们将用复变函数来描述平面定常向量场. 所谓平面定常向量场主要有两个要求：① 这个向量场中的向量是与时间无关的；② 向量场中的向量都平行于某一平面 α，并且在垂直于 α 的任何一条直线上所有点处，这个场中的向量都相等. 如平稳流动的江水速度向量场就可视为平面定常向量场. 更广泛一些的流体的流动问题，假设流体是质量均匀的，并且具有不可压缩性，就是说密度不因流体所处的位置以及受到的压力而改变. 不妨就假设密度为 1，流体的形式是定常的（即与时间无关）平面流动. 所谓平面流动是指流体在垂直于某一固定平面的直线上各点均有相同的流动情况（图 1.2）. 流体层的厚度可以不考虑，或者认为是一个单位长. 这种流体的流速场就是一个平面定常向量场.

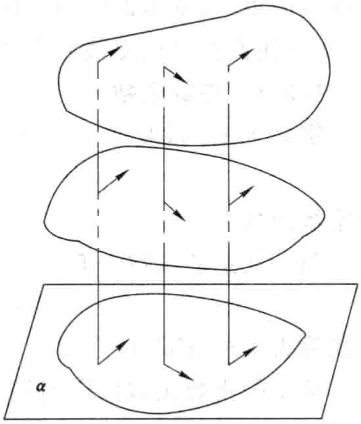


图 1.2

建立适当的坐标系，平面定常向量场可表示为：

$$\boldsymbol{a} = a_x(x,y)\boldsymbol{i} + a_y(x,y)\boldsymbol{j} \tag{1.2}$$

如果场中的点用复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示，把单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别换成 1 和虚单位 i，则向量 $\boldsymbol{a}=a_x(x,y)\boldsymbol{i}+a_y(x,y)\boldsymbol{j}$ 就可表示为 $w=a_x(x,y)+\mathrm{i}a_y(x,y)$. 这样，给定二元实函数 $a_x(x,y)$ 和 $a_y(x,y)$ 或给定了一个复变函数 $w=a_x(x,y)+\mathrm{i}a_y(x,y)$，向量场(1.2)就确定了.

设平稳流动的河水的流速场为

$$\boldsymbol{v}=v_x(x,y)\boldsymbol{i}+v_y(x,y)\boldsymbol{j},$$

这个平面场可以用复变函数

$$v=v_x(x,y)+\mathrm{i}v_y(x,y)$$

来表示.

其他如平面电场等还有很多这样的例子.可见复变函数具有明确的物理意义,复变函数论是研究这些相关问题的强有力的工具.

§1.2 初等函数

复变量的初等函数是高等数学中实变量的初等函数在复数域中的推广,经过推广后的初等复函数往往会产生一些新的性质,学习时要注意研究初等复函数与对应的实函数之间的联系与发展关系.与初等实函数一样,初等复函数也是一种最简单、最基本而常用的函数类,在复变函数论及其应用中占有很重要的地位.本节我们将讨论复数域上初等函数的定义与性质.

1.2.1 指数函数

定义 1.1 设复数 $z=x+\mathrm{i}y$,称

$$f(z)=\mathrm{e}^z=\exp z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$$

为指数函数.

对于任意的实数 y 有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y \tag{1.3}$$

上式称为欧拉(Euler)公式.

从实的指数函数推广到复的指数函数,函数的性质发生了什么变化? 主要有以下几点:

(1) 对于实数 $z=x(y=0)$来说,现在的指数函数与原来的实指数函数是一致的.

(2) 由指数的定义以及欧拉公式,对任意一复数 $z=x+\mathrm{i}y$,有

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$$

所以

$$|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x,\mathrm{Arg}\ \mathrm{e}^z=y+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(3) 考察指数的运算法则,设

$$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,\quad z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$$

则

$$\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}.$$

(4) 由欧拉公式可知,对任意整数 k,有

$$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=\cos(2k\pi)+\mathrm{i}\sin(2k\pi)=1,$$

再由

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z.$$

因此 e^z 是以 $2k\pi\mathrm{i}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为周期的函数,这个性质是实变量指数

函数所不具备的.

例 1.2　利用复数的指数表示计算 $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{\frac{1}{3}}$.

解　因为

$$\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}\right)^{\frac{1}{3}}=(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}})^{\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)},k=0,1,2.$$

故所求的值有 3 个，即 $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$，$\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$及 $\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}$，也就是

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},-\mathrm{i}.$$

1.2.2　对数函数

定义 1.2　定义对数函数是指数函数的反函数，即若

$$\mathrm{e}^{w}=z \quad (z\neq 0,\infty)$$

则复数 w 称为复数 z 的对数，记为 $w=\mathrm{Ln}\,z$.

现求 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 的表达式，令

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},w=u+\mathrm{i}v,$$

则有

$$\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

因而

$$u=\ln r,v=\theta+2k\pi\ (k=0,\pm 1,\cdots),$$

故

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln r+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)\ (k=0,\pm 1,\cdots),$$

或

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi).$$

因为 $\mathrm{Arg}\,z$ 为多值函数，所以对数函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 为多值函数，并且每两个函数值相差 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍.

如果规定 $\mathrm{Arg}\,z$ 取主值 $\arg z$，就得到 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 的一个单值分支，记作 $\ln z$，把它称为 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 的主值，因此

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z.$$

特别地，当 $z=x>0$ 时，$w=\mathrm{Ln}\,z$ 的主值 $\ln z=\ln x$，就是实变量对数函数 .

对数函数的性质：

设 $z_1,z_2\neq 0,\infty$，则

(1) $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$.

(2) $\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$.

(3) $e^{\mathrm{Ln}\,z}=z$;$\mathrm{Ln}\,e^z=z+2k\pi i(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

注意等式 $\mathrm{Ln}\,z^n=n\mathrm{Ln}\,z$,以及 $\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\,z$ 不再成立,其中 n 是大于 1 的正整数.

例 1.3 计算 $\mathrm{Ln}(1+i)$.

解 $$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(1+i)&=\ln|1+i|+i\mathrm{Arg}\,(1+i)\\&=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\quad(k\text{ 为整数}).\end{aligned}$$

例 1.4 计算 $\mathrm{Ln}(-1)$.

解 $$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-1)&=\ln|-1|+i\mathrm{Arg}\,(-1)\\&=(\pi+2k\pi)i=(2k+1)\pi i\qquad(k\text{ 为整数}).\end{aligned}$$

1.2.3 幂函数

定义 1.3 函数

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha\mathrm{Ln}\,z}\quad(z\neq0,\infty;\alpha\text{ 为复常数})$$

称为复变量 z 的幂函数.

此定义是实数域中等式

$$x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}\quad(x>0,\alpha\text{ 为实数})$$

在复数域中的推广.

设 $\ln z$ 表示 $\mathrm{Ln}\,z$ 的主值,则

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\mathrm{Ln}\,z}=e^{\alpha[\ln z+2k\pi i]}=w_0e^{2k\pi i\alpha}\quad(k=0,\pm1,\pm2\cdots),$$

其中 $w_0=e^{\alpha\ln z}$.

规定:当 α 为正实数且 $z=0$ 时,$z^{\alpha}=0$.

由于 $\mathrm{Ln}\,z$ 是多值函数,所以 $e^{\alpha\mathrm{Ln}\,z}$ 一般也是多值函数.

现在讨论 α 的如下三种特殊情况:

(1) α 是一整数 n,此时

$$e^{2k\pi i\alpha}=e^{2(kn)\pi i}=1,$$

故 z^{α} 这时是 z 的单值函数.

(2) α 是一有理数 $\frac{p}{q}$,此时

$$e^{2k\pi i\alpha}=e^{2k\pi i\frac{q}{p}},$$

只能取 p 个不同的值,即当 $k=0,1,2\cdots,p-1$ 时的对应值,于是

$$z^{\frac{q}{p}}=w_0e^{2k\pi i\frac{q}{p}},k=0,1,2,\cdots,p-1.$$

(3) α 是一无理数或虚数,此时 $e^{2k\pi i\alpha}$ 的所有的值各不相同,故 z^{α} 这时是 z 的无穷多值函数.

例 1.5　计算$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$的值.

解　$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\ln|1+\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(1+\mathrm{i})+2k\pi)]}$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\ln 2}{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}=\mathrm{e}^{-\pi(\frac{1}{4}+2k)}\left(\cos\frac{\ln 2}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\ln 2}{2}\right).$$

1.2.4　三角函数与双曲函数

根据欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y,$$

由方程

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y,\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}=\cos y-\mathrm{i}\sin y,\end{cases}$$

可得

$$\sin y=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}},\cos y=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2}.$$

因此复三角函数可定义如下：

定义 1.4　　设 z 为复数，称

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}与\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

分别为 z 的正弦函数和余弦函数，分别记作

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

正、余弦函数的性质：

(1) 当 z 为实数值时，现在的定义与原来三角函数的定义是一致的.

(2) $\sin z$ 是奇函数，$\cos z$ 是偶函数，三角学中实变量的三角函数间的一些公式对复变量的三角函数仍然有效.

例如，由定义容易推得

$$\sin^2 z+\cos^2=1,\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=\cos z,$$

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2,$$

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2.$$

(3) $\sin z$ 仅在 $z=k\pi$ 处为零，$\cos z$ 仅在 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 处为零，其中 k 为整数.

(4) $\sin z$ 与 $\cos z$ 以 $2k\pi$(k 为非零整数)为周期.

(5) $|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$，$|\cos z|^2=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y$. 在复数范围内，不能断定 $|\sin z|\leqslant 1$，$|\cos z|\leqslant 1$.

例如，取 $z=\mathrm{i}y(y>0)$，则

$$|\cos(\mathrm{i}y)|=\left|\frac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}+e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}}{2}\right|=\left|\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right|>\frac{e^{y}}{2},$$

当 y 充分大时，$|\cos(\mathrm{i}y)|$ 就可以大于任何指定的数. 另外，$\sin^2 z$ 也不一定是非负的，可能取任何复数值. 例如

$$\sin^2(-\mathrm{i})=\left(\frac{e^{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-e^{-\mathrm{i}(-\mathrm{i})}}{2\mathrm{i}}\right)^2=\left(\frac{e-e^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)^2=-\frac{(e-e^{-1})^2}{4}$$

就是一个负数.

例 1.6 计算 $\cos(1+\mathrm{i})$ 的值.

解 由定义得

$$\cos(1+\mathrm{i})=\frac{e^{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}+e^{-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}}{2}=\frac{e^{\mathrm{i}-1}+e^{-\mathrm{i}+1}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(e^{-1}+e)\cos 1+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(e^{-1}-e)\sin 1.$$

定义 1.5 称

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\sec z=\frac{1}{\cos z},\csc z=\frac{1}{\sin z}$$

分别为 z 的正切、余切、正割与余割函数.

定义 1.6 函数

$$\mathrm{sh}\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\mathrm{ch}\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\mathrm{th}\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}},\mathrm{cth}\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}$$

分别称为 z 的双曲正弦、双曲余弦、双曲正切、双曲余切函数.

双曲函数与三角函数之间有如下关系

$$\mathrm{sh}\,z=-\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z,\mathrm{ch}\,z=\cos \mathrm{i}z,$$
$$\mathrm{th}\,z=-\mathrm{i}\tan \mathrm{i}z,\mathrm{cth}\,z=\mathrm{i}\cot \mathrm{i}z.$$

由这些关系式可以看出双曲函数是单值的且以虚数 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的周期函数. $\mathrm{sh}\,z$ 为奇函数，$\mathrm{ch}\,z$ 为偶函数.

1.2.5 反三角函数与反双曲函数

复变量的反三角函数与实分析的定义是类似的.

复变量 z 的反三角函数是 $z=\sin w$；$z=\cos w$；$z=\tan w$；$z=\cot w$ 的反函数，分别记为

$$w=\arcsin z;w=\arccos z;w=\arctan z;w=\mathrm{arccot}\,z.$$

由反三角函数的定义易得：

(1) $\arcsin z=-\mathrm{i}\mathrm{Ln}(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$；

(2) $\arccos z=-\mathrm{i}\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$；

(3) $\arctan z=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z}$；

(4) $\operatorname{arccot} z=-\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.

下面推导公式(2).

因为

$$z=\cos w=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}),$$

所以

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w})^2-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,$$

从而

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=z+\sqrt{z^2-1},$$

故

$$w=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

双曲函数的反函数分别记为：

$$\operatorname{arsh} z;\operatorname{arch} z;\operatorname{arth} z;\operatorname{arcth} z.$$

仿照反三角函数的推导方法可得：

(1) $\operatorname{arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$;

(2) $\operatorname{arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$;

(3) $\operatorname{arth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}$;

(4) $\operatorname{arcth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}$.

§1.3　复变函数的极限与连续性

定义 1.7　设函数 $w=f(z)$在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义.若有确定的复数 $A(A\neq\infty)$存在,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在一个正数 δ,使得对满足 $0<|z-z_0|<\delta(0<\delta\leqslant\rho)$的一切 z 都有 $|f(z)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(z)$当 z 趋向 z_0 时的极限.记作$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 或 $f(z)\to A$(当 $z\to z_0$).

这个定义的几何意义是:当变点 z 在 z_0 的一个充分小的 δ 邻域内时,它们的像点就在 A 的一个给定的 ε 邻域.

由于 z_0 是复平面上的点,因此 z 可以任意方式趋近于 z_0,但不论怎样趋近,$f(z)$的值总是趋近于 A.

这个定义形式上与高等数学中的一元实函数的情况相同,因此,复变函数的极限有类似于实函数极限的性质.例如,当 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A,\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$ 时有