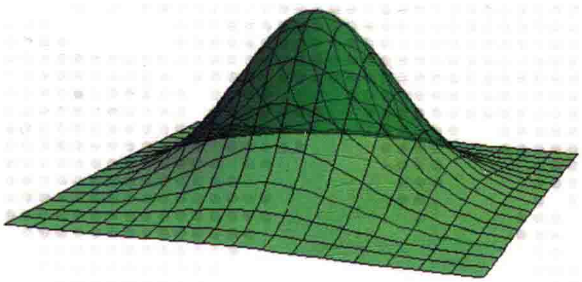
普通高等学校“十二五”规划教材

线性代数

丁兆明　丁和平　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

线性代数

主　编　丁兆明　丁和平
副主编　马驹腾　张　帆

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本教材依据普通高等学校基础理论课教学“应用为主，够用为度”的原则，根据高校《线性代数课程教学基本要求》编写。

本书共7章，分别为行列式、矩阵、向量及向量空间、线性方程组、特征值及特征向量、二次型、线性空间与线性变换。

本书适合作为普通高等学校理工类、经济管理类专业的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/丁兆明，丁和平主编. —北京：中国铁道出版社，2014.7

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-18543-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①丁…②丁… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第093912号

书　　名： 线性代数
作　　者： 丁兆明　丁和平　主编

策　　划： 潘星泉　　**读者热线：** 400-668-0820
责任编辑： 潘星泉
编辑助理： 曾露平
封面设计： 付　魏
封面制作： 白　雪
责任校对： 汤淑梅
责任印制： 李　佳

出版发行： 中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街8号）
网　　址： http：//www.51eds.com
印　　刷： 三河市宏盛印务有限公司
版　　次： 2014年6月第1版　2014年6月第1次印刷
开　　本： 720 mm×960 mm　1/16　**印张：** 10.25　**字数：** 176千
书　　号： ISBN 978-7-113-18543-5
定　　价： 24.00元

前　　言

线性代数是普通高等学校理工、经济管理类专业的一门重要的数学基础课程，对于培养大学生的计算和抽象思维能力十分必要。随着现代科学技术，尤其是计算机科学的发展，线性代数这门课程的作用与地位显得格外重要。

线性代数是讨论代数学中线性关系经典理论的学科，它具有较强的抽象性与逻辑性，是培养学生抽象思维能力、逻辑推理与判断能力、熟练的运算能力、初步的数学建模能力及综合运用知识分析和解决实际问题能力的强有力的数学工具。

本书本着“应用为主，够用为度”的原则进行编写，每章均配有习题。通过线性代数课程的学习，学生可获得线性代数的基本知识和必要的基本运算技能，同时使学生运用数学方法分析问题和解决问题的能力得到进一步提升，从而为学生学习后续课程打下必要的数学基础。

本书由丁兆明、丁和平担任主编，马驹腾、张帆担任副主编。第1、3章由马驹腾编写，第2、4章由丁和平编写，第5、6章由丁兆明编写，第7章由张帆编写，全书由丁兆明负责统稿和定稿。

本书的出版得到了江西理工大学教务处的大力支持，在此表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，教材中难免存在不妥之处，敬请各位读者提出宝贵意见。

编　者

2014 年 3 月

目　　录

第 1 章

行　列　式

1.1 全排列及其逆序数

我们知道，解线性方程组是代数学中的一个基本问题，在代数学中，求解线性方程组时引出了二阶和三阶行列式，并用对角线展开法知道它们的展开式分别为（下一节会详细讲解）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ , \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.2}$$

其中元素 a_{ij} 的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在行列式的行与列的序数．

式(1.1)、式(1.2)的右端是二阶、三阶行列式的展开式，除了用对角线展开这一方法外，是否还有其他的展开方法呢？回答是肯定的．以式(1.2)为例观察：展开式是一些项的代数和，其中，每一项是位于行列式不同行不同列的三个元素相乘，这些元素的第一个下标是按自然顺序排列的，第二个下标则不按自然顺序排列，是 1,2,3 三个自然数的一个全排列．而展开式的项数、每一项前的符号与第二个下标的排列个数、排列顺序有关．为此引入全排列、逆序数、对换等概念.

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列(简称排列).

例如，由 1,2 这两个数组成的二级全排列为 12 和 21，二级全排列的总数为 $2!=2$ 个；有序数组 213 称为三级全排列，三级全排列的总数为 $3!=6$ 个；4321 为四级排列，四级排列的总数为 $4!=24$ 个；n 级排列的总数是 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$，记号 $n!$ 读为 n 阶乘．

显然，$12\cdots n$ 也是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按自然数 $1,2,\cdots,n$ 递增的顺序排起来的，自然数 $1,2,\cdots,n$ 的其他排列都破坏了自然顺序．

定义 2 在一个排列中任取两个数(称为数对)，如果这两个数中前面的数大于后面的数，那么称它们构成一个逆序(反序)．一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数．

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，一般记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$．

在 n 级排列 $12\cdots n$ 中没有逆序，规定 $\tau(12\cdots n)=0$．

例如，排列 12 的逆序数为 0；排列 21 的逆序数为 1；排列 231 的数对 21、31 均构成逆序，而 23 不构成逆序，因此排列 231 的逆序数为 2，即 $\tau(231)=2$；同理排列 213 的逆序数是 1，即 $\tau(213)=1$．进一步有以下定义．

定义 3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列．

例如，二级排列 12 为偶排列，21 为奇排列；三级排列 231 为偶排列，213 为奇排列．

现在探讨式(1.1)、式(1.2)右端各项的规律：

式(1.1)右端各项的第一个下标按自然顺序排列，对它们第二个下标进行观察：第二个下标由两个自然数 1 和 2 组成，由 1,2 这两个数可以构成两个二级排列：12 和 21，二级排列的个数 2! 等于式(1.1)右端的项数，并且排列 12 的逆序数为 0，对应项的符号为“+”，而排列 21 的逆序数为 1，所对应项的符号为“−”.

式(1.2)右端各项的第一个下标按自然顺序排列，第二个下标由自然数 1，2，3 组成，由它们构成的三级排列共有 3! ＝6 个：123、231、312、132、213、321，这正好等于式(1.2)右端的项数，排列为 123、231、312 的逆序数分别为 0、2、2，它们均为偶排列，对应项的符号为“+”，排列 132、213、321 的逆序数分别为 1、1、3，它们都是奇排列，对应项的符号为“−”. 综上所述：式(1.2)右端各项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里 $j_1j_2j_3$ 是 1、2、3 的一个三级排列，当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时，积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正，当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时，积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负，各项所带符号均可表示为 $(-1)^J$，其中 $J=\tau(j_1j_2j_3)$ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数. 从而式(1.2)可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对全体三级排列所得到的项求和．因此，三阶行列式的展开式可以由

对角线展开法之外的另一种方法得到，即从三阶行列式中任取三个不同行不同列的三个数相乘，这三个数的行号取固定的自然顺序的排列 123，列号是 1，2，3 的一个三级排列，这样的三个数相乘再乘以 $(-1)^J$，其中 $J=\tau(j_1j_2j_3)$，就得到三阶行列式的一项，共有 3！项，将它们相加，就得到三阶行列式的展开式.

注意，对二阶、三阶及更高阶的行列式可以用全排列和它们的逆序数来定义展开式，而对角线展开法只能用来计算二阶、三阶行列式.

例 计算以下各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性.

(1)6742531；　　　　(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解：(1) 对于所给排列，6 排在首位，逆序个数为 0；7 的前面有 0 个比它大的数，逆序个数为 0；4 的前面有 2 个比它大的数，逆序个数为 2；2 的前面有 3 个比它大的数，逆序个数为 3；5 的前面有 2 个比它大的数，逆序个数为 2；3 的前面有 4 个比它大的数，逆序数是 4；1 的前面有 6 个比它大的数，逆序数是 6. 把这些数加起来，即

$$0+0+2+3+2+4+6=17,$$

故排列 6742531 的逆序数为 17，即 $\tau(6742531)=17$，因而是奇排列.

(2) 同理可得

$$\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]=0+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

所给排列当 $n=4k$ 或 $4k+3$ 时为偶排列，当 $n=4k+1$ 或 $4k+2$ 时为奇排列.

定义 4 排列中，将某两个数对调，其余的数不动，这种对排列的变换叫做对换，将相邻两数对换，叫做相邻对换（邻换）.

定理 一个排列中的任意两个数对换，排列只改变奇偶性.

证：先证相邻对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$，对换 p_i 与 p_{i+1} 排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$，显然 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+2}\cdots p_n$ 这些数的逆序数经过对换并不改变，仅 p_i 与 p_{i+1} 两数的逆序数改变：当 $p_i<p_{i+1}$ 时，经对换后，$p_{i+1}p_i$ 是逆序，新排列的逆序数增加 1，当 $p_i>p_{i+1}$ 时，$p_{i+1}p_i$ 不是逆序，新排列的逆序数减少 1，所以排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$ 与排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$ 的逆序数相差 1，奇偶性改变.

下证一般对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_{i+m}p_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，对换 p_i 与 p_{i+m+1}，把 p_i 往后连续作 m 次相邻对换，排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，再把 p_{i+m+1} 往前连续作 $m+1$ 次相邻对换，排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+m+1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+2}\cdots p_n$，从而实现了 p_i 与 p_{i+m+1} 的对换，它是经 $2m+1$ 次相邻对换而成，排列也就改变了 $2m+1$ 次奇偶性，所以两个排列的奇偶性相反.

由于数的乘法是可交换的，所以行列式各项中的元素的顺序也可任意交换，例如四阶行列式中乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可以写成 $a_{22}a_{11}a_{44}a_{33}$，一般 n 阶行列式中乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可以写成 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 都是 n 级排列.

1.2 二阶与三阶行列式

本节主要介绍二阶、三阶行列式的定义以及计算二阶、三阶行列式的对角线法则.

1. 二阶行列式

二阶行列式产生于求解二元线性方程组的问题中. 现利用消元法求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

消去 x_2，得 $$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

消去 x_1，得 $$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，即两方程的未知数系数成比例，则方程组表示两条平行或重合的直线，此时方程组无解或有无限多个解；

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

注意到，此时方程组的解由它的系数和常数项所完全决定，并且解的分子、分母具有一定的规律. 为了便于记忆，下面给出二阶行列式的定义.

定义 1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，位于第 i 行第 j 列的元素记为 a_{ij}. 将 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，主对角线上的元素称为主对角元，将 a_{12} 到 a_{21} 的连线称为副对角线. 二阶行列式等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积，这称为二阶行列式的对角线法则.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

利用二阶行列式的定义，二元线性方程组的解可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中分母$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为二元线性方程组的系数行列式. 注意到，二元线性方程组的解 x_1,x_2 的分母由系数行列式构成，而分子由常数项分别替换系数行列式的一、二列构成.

例 1　设 $D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & \lambda^2 \end{vmatrix}$，则当 λ 为何值时 $D=0$.

解：由行列式的定义，得 $D=\lambda^2-2\lambda=0$，得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$. 即当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 时，$D=0$.

2. 三阶行列式

类似的，讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2. \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

从方程组的前两个方程消去 x_3，后两个方程也消去 x_3，再从所得到的两个方程中消去 x_2，就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}.$$

注意到上式中 x_1 的系数是由三元线性方程组中未知数的 9 个系数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$按照一定的规律组成，由此给出定义.

定义 2　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$，称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

三阶行列式也可用对角线法则记忆，如图 1－1 所示. 即平行于主对角线（图中实线连接）的三个元素乘积是代数和的正项，平行于副对角线（图中虚线连接）的三个元素乘积是代数和的负项.

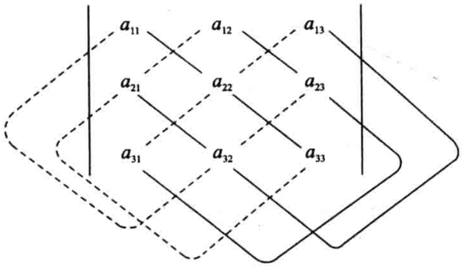


图 1-1

根据三阶行列式的定义,当$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$时,三元线性方程组中 x_1 的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

类似的,有

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

其中分母$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$称为三元线性方程组的系数行列式. 注意到,三元线性方程组的解 x_1, x_2, x_3 的分母由系数行列式构成,而分子由常数项分别替换系数行列式的一、二、三列构成. 这也是解三元线性方程组的克莱姆法则,我们将在 1.6 节详细说明该法则.

例 2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

解:根据三阶行列式的对角线法则,有

$$D=(-3)\times(-2)\times 5+0\times(-1)\times(-1)+4\times 2\times 0-4\times(-2)\times(-1)$$
$$-(-3)\times(-1)\times 0-0\times 2\times 5=22.$$

1.3 n 阶行列式的定义

定义 由 $n\times n$(n 是正整数)个数排成 n 行 n 列的正方形两边各加一竖的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,其中横排的元素称为行,纵排的元素称为列,a_{ij} 表示 n 阶行列式中第 i 行第 j 列位置上的元素,n 阶行列式等于所有取自其不同行不同列的 n 个元素的乘积再乘以 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,行列式的每一项都按下列规则带有符号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,上式带有正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,上式带有负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.3}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示列标所有 n 级排列所对应的 n 阶行列式的所有项求和.

定理 n 阶行列式的一般项还可以写成

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 S 与 T 分别是 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

证:该项中任意两元素互换,行下标与列下标同时对换,由 1.1 节定理知 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 同时改变奇偶性,于是 $S+T$ 的奇偶性不变,如果将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换为自然顺序 $12\cdots n$(逆序数为 0),排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 也相应对换为 $j_1j_2\cdots j_n$(逆序数为 J),则有

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}=(-1)^{J}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由本节定理可知,行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n,q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}. \tag{1.4}$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列,而相应行下标排列为 $i_1i_2\cdots i_n$,于是行列式又可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.5}$$

例 1 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解:根据定义,D 是 $4!=24$ 项的代数和,但每一项的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中只要有一个元素为 0,乘积就等于 0,所以只需计算展开式中不明显为 0 的项. 由于第 1 行元素除 a_{11} 外全为 0,故只需考虑 $j_1=1$,第 2 行元素中只有 a_{21} ,a_{22} 不为 0,现已取 $j_1=1$,故必须取 $j_2=2$,同理必须取 $j_3=3$,$j_4=4$,这就是说行列式展开式中不为 0 的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,而列标排列 1234 的逆序数为 0,即此项符号为正,因此行列式 $D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

行列式中,从左上角到右下角的直线称为主对角线. 主对角线以上的元素全为零(即 $i<j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式称为下三角行列式,它等于主对角线上各元素的乘积. 主对角线以下的元素全为零(即 $i>j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式称为上三角行列式,同理可证它也等于主对角线上各元素的乘积. 行列式中,除主对角线上的元素以外,其他元素全为零(即 $i\neq j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式称为对角行列式,由上面可知它也等于对主角线上元素的乘积,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2 证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

上面的行列式中,未写出的元素都是 0.

证:由于行列式的值为:$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,只需对可能不为 0 的乘积 $(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 求和,考虑第 n 行元素 a_{nj_n},知 $j_n=1$,再考虑第 $n-1$ 行元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$,知 $j_{n-1}=1$ 或 $j_{n-1}=2$,由于 $j_n=1$ 知 $j_{n-1}=2$,如此类推 $j_2=n-1$,$j_1=n$,排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能是排列 $n(n-1)\cdots 21$,它的逆序数为 $J=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$,所以行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

由此可见

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

例 3 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

证:记 $$D=\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1,k+n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k+n,1} & \cdots & b_{k+n,k+n} \end{vmatrix},$$

其中

$$d_{ij}=a_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,k);$$

$$d_{k+i,k+j} = b_{ij} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n);$$
$$d_{i,k+j} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,k, j = 1,2,\cdots,n).$$

考察 D 的一般项 $(-1)^R d_{1r_1} d_{2r_2} \cdots d_{kr_k} d_{k+1,r_k+1} \cdots d_{k+n,r_k+n}$，$R$ 是排列 $r_1 r_2 \cdots r_k r_{k+1} \cdots r_{k+n}$ 的逆序数，由于 $d_{i,j+k} = 0\ (i = 1,2,\cdots,k, j = 1,2,\cdots,n)$，因此 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 均不可大于 k 值，否则该项为 0，故 $r_1, r_2, \cdots r_k$ 只能在 $1,2,\cdots,k$ 中选取，从而 $r_{k+1}, r_{k+2}, \cdots, r_{k+n}$ 只能在 $k+1, k+2, \cdots, k+n$ 中选取，于是 D 中不为 0 的项可以记作

$$(-1)^R a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n},$$

这里 $p_i = r_i, q_i = r_{k+i} - k, 1 \leqslant r_i \leqslant k, k+1 \leqslant r_{k+i} \leqslant k+n$，$R$ 也就是排列 $p_1 p_2 \cdots p_k (k+q_1) \cdots (k+q_n)$ 的逆序数，以 P, Q 分别表示排列 $p_1 p_2 \cdots p_k$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_k$ 的逆序数，则有 $R = P + Q$，于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1 \cdots p_k} \sum_{q_1 \cdots q_n} (-1)^{P+Q} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n} \\ &= \sum_{p_1 \cdots p_k} (-1)^P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} \Big(\sum_{q_1 \cdots q_n} (-1)^Q b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n} \Big) \\ &= \sum_{p_1 \cdots p_k} (-1)^P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} D_2 \\ &= D_1 D_2 . \end{aligned}$$

1.4 行列式的性质及计算

定义 将行列式的每一行元素换成相应的列元素所得到的行列式称为原行列式的转置行列式.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D 的转置行列式记为 D^{T}，则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证:记

$$D^{T}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$，按行列式定义

$$D^{T}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$
$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D.$$

性质1表明:行列式中行与列的地位是对称的,即行列式中行具有的性质,其列也具有.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

证:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p,q 两列得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 与 D_1 按式(1.5)计算,对于 D 中任一项

$$(-1)^{I}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_nn}$$

其中 I 为排列 $i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$ 的逆序数,在 D_1 中必有对应一项

$$(-1)^{I_1}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_nn}$$

(当 $j\neq p,q$ 时,第 j 列元素取 a_{i_jj}，第 p 列元素取 a_{i_qq}，第 q 列元素取 a_{i_pp}),其中 I_1 为排列 $i_1\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n$ 的逆序数,而

$$i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$$

与

$$i_1\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n$$

只经过一次对换,由1.1节定理知,$(-1)^{I}$ 与 $(-1)^{I_1}$ 相差一个符号,又因

$$a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_nn}=(-1)^{I}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_nn},$$

所以对于 D 中任一项,D_1 中必定有一项与它的符号相反而绝对值相等,又 D 与 D_1 的项数相同,所以 $D=-D_1$.