全国高职高专教育规划教材

高等数学与实验

（第二版）

主编 刘 红

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育规划教材

高等数学与实验

Gaodeng Shuxue yu Shiyan

（第二版）

主　编　刘　红
副主编　黄毅蓉　潘传中
　　　　李季卿　张　静

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是全国高职高专教育规划教材，是按照教育部颁发的“高职高专人才培养目标”和“关于加强高职高专教育教材建设的若干意见”等文件精神，并配合高等职业教育基础课程改革建设项目的实施，在分析高职高专大众化教育现状的基础上编写的一本面向工程类专业的数学教材。

本书遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，以“案例驱动，学习任务引入”的方式编写，教学目标和学习任务明确。教学内容与工科专业需求深度融合，充分把握科学性原则，但不强调其学科的系统性；重视知识的应用和数学思想，淡化理论的推导和证明，着力培养学生的知识应用能力和逻辑思维能力。

本书内容符合高职高专工程类专业对数学知识的教学要求，包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分及其应用、常微分方程、多元函数微积分、线性代数、级数、积分变换、概率与数理统计以及数学实验等部分。

本书可作为高职高专工程类各专业的数学教材，也可作为相关科技人员的参考书以及培训用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学与实验/刘红主编. —2版. —北京：高等教育出版社，2011.8

ISBN 978-7-04-032518-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第126098号

策划编辑 邓雁城　责任编辑 边晓娜　封面设计 李卫青　版式设计 马敬茹

插图绘制 杜晓丹　责任校对 殷　然　责任印制 尤　静

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	大厂益利印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787 mm × 1092 mm 1/16		
印　张	19.75	版　次	2008年8月第1版
字　数	480千字		2011年8月第2版
购书热线	010-58581118	印　次	2011年8月第2次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	32.00元

物 料 号 32518-00

第二版前言

本书第二版是在第一版的基础上，根据我们近几年的教学改革实践，按照新形势下教材改革的精神，进行全面修订而成的。在修订中，我们保留了原教材结构合理、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点，同时注意吸收当前教学改革中一些成功的举措，使得本版更能满足当前高职院校工科类专业数学教学的需要，成为适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材。

为更好地与中学数学教学相衔接，我们在第二版中适当地对教学内容进行了微调，删去了与极坐标相关的内容；适当增加了部分重点公式的推导；调整了部分习题；对文字作了适当的简化；为适应高等数学课程教学时数减少的现实情况，在保证《高职高专高等数学课程教学基本要求》的前提下，对一些内容作了适当精简和合并；在应用方面，增加了一些与教学内容相关的应用性习题。对第一版中存在的个别问题，这次也作了全面的修订。修改较多的部分涉及导数的应用、定积分及其应用、级数等内容。

在这次修订中，成都航空职业技术学院基础教学部数学教研室的广大教师提出了许多宝贵的意见和建议，特别是何永富教授提供了不少好的建议，我们在此表示诚挚的谢意。

本版修订工作由何永富和刘红完成。新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编　者

二〇一一年三月

第一版前言

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材，是按照教育部颁发的“高职高专人才培养目标”和“关于加强高职高专教育教材建设的若干意见”等文件精神，并配合高等职业教育基础课程改革建设项目的实施，在分析高职高专大众化教育现状的基础上编写的一本面向工程类专业的数学教材。

本教材根据高职高专院校对技术应用型人才的实际要求，以高技能人才培养为核心的高职高专院校课程定位，突出“以学生为中心”而非“以学科为中心”、“以教师为中心”的基本理念，按照“基础理论教学以突出应用为目的，以必需、够用为度”的原则，落实“打好基础，突出应用，强化能力，适当延伸”的原则。为实现教材服务于专业，构建了“大平台，分层次，活模块，多接口”的教材体系，有利于不同专业需要进行取舍，更好地对学生进行因材施教。

本教材在教学内容上彰显规格教育与工科专业需求深度融合等特点，充分把握了科学性原则，但不强调其学科的系统性。本教材重视知识的应用和数学思想，而淡化理论的推导和证明，着重在培养学生的知识应用能力和逻辑思维能力。

本教材还体现了公共基础课程的基础性地位和工具性作用。在利用计算机进行数学实验时，充分体现重视学生的实际操作，而淡化理论的系统介绍的理念，增加利用计算机学习数学、应用数学的训练，通过数学实验，学会使用数学软件，实现由“学数学”到“用数学”的转变，为将来使用高等数学进行计算、学习专业课和以后进一步学习现代科学技术打下基础；同时激发学生学习兴趣和学习动机，使学生在知识、能力、素质各方面得到全面提升。

本教材体例格式依据“行动导向教学法”进行创新，以“案例驱动，学习型任务引入”的方式编写，教学目标和学习任务明确，教学内容的选取既考虑应用型人才培养的特点，又兼顾学生的可持续发展，同时又遵循学生的认知规律，每节从案例分析到学习型任务引入，知识的再现，到引例回应，最后是任务考核，达到了使学生在学习过程中“好学”，教师在教学过程中“好用”的目的。

本教材全部内容按照150学时的教学时间进行编写，但考虑到学生中学学习过前三章的大部分内容，可根据各校的实际课时进行选择、调整；150学时中包含8学时的数学实验学时，数学实验使用的是应用非常广泛的MATLAB软件，各校可根据计算机机房的实际情况，最后集中安排数学实验，也可穿插在教学中进行。

本教材汇集了成都航空职业技术学院、四川工程职业技术学院、四川工商职业技术学院、四川水利职业技术学院、成都农科职业技术学院、达州职业技术学院等院校的精品课程资源，编写教师大部分是具有教学研究、教改思想和实践经验的精品课程项目主持人或示范院校骨干教师。本教材由刘红最终统稿、定稿，并担任主编，副主编为黄毅蓉、潘传中、李季卿、张静，参编人员有李有慧、杜瑜、赵春、王小林、易林、沈波、王静。所有插图脚本由陈立宏绘制。

本教材由四川工程职业技术学院的李以渝教授担任主审，他提出了许多宝贵意见和建议，高等教育出版社的相关编辑也对本书的出版给予了大力支持，在此一并致谢！

限于我们的水平，加之高职高专公共基础课程改革已由“转型期”进入“攻坚期”，高职高专公共基础课程还无明确的课程标准，书中若有不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

二〇〇八年六月

目　录

第一章

函数、极限与连续

极限是学习微积分的重要理论基础，微积分是研究函数关系的一门学科，只有对函数的概念、图像及性质有了全面深入的了解和认识，才能学好微积分. 本章将在已学函数的基础上，着重讨论函数的极限，并介绍函数的连续性.

第一节　函　　数

引例　测得某地区的气温随高度的升高而变化的情况是：高度每增加 1 km，气温将下降 6 ℃，现测得地面（假定高度为 0 km）的温度是 10 ℃，假设某高度的气温是 −2 ℃，问这个高度是多少？

分析　本例是关于自然现象中气温与高度的关系问题，当一个量变化时，会直接或间接地引起周围其他一个或几个量同时变化. 这种几个量之间的相互联系或相互影响的关系，揭示了客观世界中事物变化的内在规律，这种规律用数学语言进行描述，就是我们说的函数关系.

本节学习任务

1. 掌握函数的定义及四大性质——单调性、奇偶性、周期性、有界性；
2. 认识复合函数，能正确地分析复合函数的复合过程；
3. 了解基本初等函数及其表达式；
4. 认识初等函数，能建立简单实际问题中变量的函数关系.

一、函数的概念

定义 1　设 x，y 是两个变量，D 是一个给定的实数集，如果对于 D 内的每一个数 x，按照某个对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 式中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切实数时，与它对应的函数值的集合 M 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

函数的定义域和对应关系称为函数的两大要素.

确定函数定义域时，对于实际问题，根据问题的实际意义确定，对于函数的表达式，由使式子有意义的自变量的取值范围确定.

例 1 求函数 $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,应满足

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\geqslant -2.\end{cases}$$

所以,函数的定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

例 2 某圆柱形容器的容积为 V,试将它的表面积表示成底半径的函数,并确定它的定义域.

解 设圆柱的底半径为 r,高为 h,表面积为 S.

因为 $V=\pi r^2h$,得 $h=\frac{V}{\pi r^2}$,根据圆柱表面积公式有 $S=2\pi r^2+2\pi rh$,所以

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r},$$

其定义域为$(0,+\infty)$. 上式表示表面积是底半径的函数;但反过来,要求通过本例中的体积 V 和表面积 S 来表示底半径 r,这是已知一个函数求其反函数.

定义 2 给定函数 $y=f(x)$, $x\in D$(定义域), $y\in M$(值域). 对于任一 $y\in M$,在 D 中都有唯一的 x 与之对应,则由关系式 $y=f(x)$ 确定的另一函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

习惯上,我们总是用 x 表示自变量,y 表示函数,因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 通常写成 $y=\varphi(x)$,而函数 $y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

二、函数的几种简单性态

1. 函数的奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任一 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数图像关于原点对称.

2. 函数的单调性

定义 4 若函数 $f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加的**,区间 (a,b) 称为**单调递增区间**;如果对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少的**,区间 (a,b) 称为**单调递减区间**.

3. 函数的有界性

定义 5 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 如果存在正数 M,使得对于任一 $x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**有界的**. 如果这样的正数不存在,就称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**无界的**.

4. 函数的周期性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 T,使得对于一切 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,

且 $f(x)=f(x+T)$ 都成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**. 通常，周期函数的周期是指**最小正周期**. 例如我们以前学过的三角函数就是周期函数.

三、初等函数

1. 基本初等函数

以下五种函数统称为**基本初等函数**：

幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 是常数）；

指数函数 $y=a^x$（$a>0,a\neq1$）；

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq1$），当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$；

三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

那么函数 $y=\sin x^2$ 是不是基本初等函数？很显然，它不是基本初等函数. 但是，它可看成是由两个基本初等函数 $y=\sin u,u=x^2$ 构成的，这种函数叫**复合函数**.

2. 复合函数

定义 7 设有函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，当 $x\in D$ 时，$u=\varphi(x)$ 的部分或全部 u 值，落在函数 $y=f(u)$ 的定义域中，此时 y 通过变量 u 也是变量 x 的函数，我们称此函数为由函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**.

例 3 将函数 y 表示成 x 的复合函数：

（1）$y=\ln u,u=\cos x$；（2）$y=\mathrm{e}^u,u=\sin v,v=x^2+1$.

解 （1）$y=\ln u=\ln\cos x$，即 $y=\ln\cos x$.

（2）$y=\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^{\sin v}=\mathrm{e}^{\sin(x^2+1)}$，即 $y=\mathrm{e}^{\sin(x^2+1)}$.

例 4 求下列函数的复合过程：

（1）$y=\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)^3$；（2）$y=\mathrm{e}^{\ln x^2}$.

解 （1）$y=\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)^3$ 是由 $y=u^3,u=\arccos v,v=\dfrac{1}{x}$ 这三个函数复合而成的.

（2）$y=\mathrm{e}^{\ln x^2}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u,u=\ln v,v=x^2$ 这三个函数复合而成的.

注 并非任意两个函数都可以复合成一个函数. 例如，$y=\arcsin u,u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数，为什么？思考一下.

3. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或有限次复合而成的，并能用一个式子表示的函数，叫做**初等函数**.

例如，函数 $y=\mathrm{e}^{\ln x^2}$，$y=\dfrac{1+x}{2x-3}$，$y=\arcsin x^2+x$，$y=x\cos x$ 等都是初等函数.

注 分段函数不一定是初等函数，例如，分段函数 $y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant0,\\ x+1, & x<0\end{cases}$ 就不是初等函数，

而分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 却是初等函数. 为什么？请思考.

引例回应

在引例中,高度每增加 1 km,气温将下降 6 ℃,故其高度与气温的关系为:$y=-6x+a$,其中 x 为高度(单位 km),y 为气温(单位 ℃),a 为地区常值. 由地面(假定高度为 0)温度是 10 ℃,即 $x=0$,$y=10$,则 $a=10$,即其高度与气温的关系为

$$y=-6x+10.$$

现某高度的气温是 −2 ℃,则这个高度是 $x=2$,即高度为 2 km.

任务考核

1. 要使函数 $y=\sqrt{\ln(x+1)}$ 有意义,必须满足(　　　　),所以其定义域为(　　　　).

2. 函数 $y=\tan[\arcsin(1-x)]$ 是由 $y=$(　　　　),$u=$(　　　　),$v=$(　　　　)这三个函数复合而成.

习题 1−1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\lg(1-x)}$;　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-2}$;

(3) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$;　　(4) $y=\ln(x^2+2x)$;

(5) $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x^2-4}$;　　(6) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. 分析下列函数的复合过程:

(1) $y=e^{\sin^2 x}$;　　(2) $y=\ln\sin x$;　　(3) $y=2\arctan\sin\sqrt{1+x^2}$;

(4) $y=e^{\ln\sqrt{1+x}}$;　　(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x-2)}}$;　　(6) $y=(\sin 2x)^3$.

3. 应用题.

某人有大米 10 吨要出售. 当购买量在 5 吨以内时,定价为 2 000 元/吨;当购买量大于 5 吨时,超出部分定价为 1 800 元/吨. 试将销售总收入表示为销量的函数.

第二节　极限及其运算

引例 1　我们观察下面几个数列,当 $n\to\infty$ 时,x_n 的变化趋势:

(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,x_n=\dfrac{n}{n+1},\cdots$;

(2) $1,2,4,8,\cdots,x_n=2^n,\cdots$.

引例 2　我们观察下列函数当自变量 x 改变时函数值的变化:

(3) 当自变量 $x\to\infty$ 时函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势;

(4) 当 $x\to 2$ 时函数 $y=x^2$ 的变化趋势.

分析　从图 1−1 可看出,对于数列(1),当 $n\to\infty$ 时,x_n 的数值无限接近一个常数 1;从图 1−2看出,数列(2) 则没有这个性质,当 $n\to\infty$ 时,x_n 的数值却无限增大;观察图 1−3,函数

(3) 当自变量 $x\to\infty$ 时,它的数值无限趋近于0;观察图1-4,函数(4) 当自变量 $x\to2$ 时,它的数值无限趋近于4. 对于(1)(3)(4) 这三种情况,我们引入极限的概念.

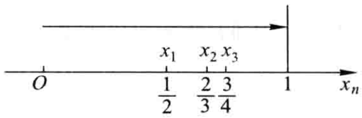

图1-1

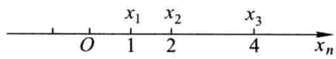

图1-2

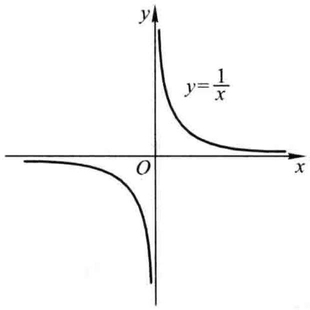

图1-3

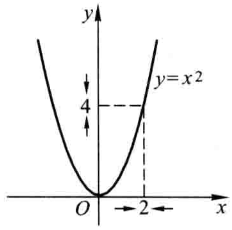

图1-4

本节学习任务

1. 认识极限的概念,会求函数的极限;
2. 认识无穷小、无穷大的定义及性质,能进行无穷小的比较.

一、极限的概念

极限是微积分最重要的基本概念之一. 微积分的许多概念都是用极限表述的,一些重要的性质和运算法则也是通过极限方法推导出来的,因此,掌握极限的概念、性质和计算方法是学习好微积分的前提和基础.

1. 数列的极限

定义1　如果当 $n\to\infty$ 时,数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A,记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n\to A(n\to\infty).$$

若数列的极限不存在,则称数列**发散**.

例1　求下列数列的极限:

(1) $x_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$;　　(2) $x_n=2$;

(3) $x_n=2+(-1)^n\frac{1}{n}$;　　(4) $x_n=2^n$.

解　通过观察可以看出,它们的极限分别是:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} 2=2$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2+(-1)^n\frac{1}{n}\right]=2$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n$ 极限不存在.

一般地,我们可得到下述结论:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0\quad(|q|<1)$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} C=C$.

数列是一种特殊形式的函数整标函数,记为 $x_n=f(n)$,我们把数列极限的定义推广,就可得到函数极限的定义.

2. 函数的极限

(1) 自变量 $x\to\infty$ 时函数的极限.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 有定义,如果当自变量 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 无限接近某个常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to\infty).$$

这里,自变量的绝对值无限增大包含两种基本情形,即 x 从某个值开始取正值无限增大(记作 $x\to+\infty$)和 x 从某个值开始取负值时其绝对值无限增大(记作 $x\to-\infty$).有时只需考察 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时函数的变化趋势,对此我们有下面定义.

定义 3　如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时,函数 $f(x)$ 的值无限接近某个确定的常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的**极限**,记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (当\ x\to+\infty).$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (当\ x\to-\infty).$$

由定义可知,当自变量 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在的充要条件为,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在且相等,即

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A, \quad 则 \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

例 2　由函数 $y=\arctan x$ 图像判断下列极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x,\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x,\quad \lim_{x\to\infty}\arctan x.$$

解　如图 1-5 所示,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 虽然都存在,但不相等,所以,$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 极限不存在.

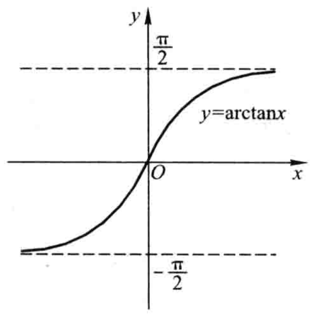

图 1-5

(2) 自变量 $x\to x_0$ 时函数的极限.

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内(x_0 点可除外)有定义,如果当 x 无限趋近于 x_0 时,对应的函数 $y=f(x)$ 的值无限接近于一个常数 A,则称常数 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时函数的**极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to x_0).$$

说明　(1) 在定义 4 中自变量 $x\to x_0$,表示 x 既从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0(记为 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0^-$),同时也从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0(记为 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0^+$).

(2) 当 $x\to x_0$ 时,函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点是否有极限与其在 x_0 点有无定义无关.

在实际问题中,有时我们只需要考虑 x 从 x_0 的左侧或右侧无限趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的变化趋势,对此我们有以下定义.

定义 5　如果当 $x \to x_0^-$（或 $x \to x_0^+$）时函数 $y=f(x)$ 的值无限接近于一个常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$（或 $x \to x_0^+$）时函数的**左极限（或右极限）**，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$，以及 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

由定义 5 可知，函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充要条件为：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在且都等于 A，即 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$.

例 3　讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 当 $x \to 1$ 时的极限.

解　因为 $x \to 1$，即 $x \neq 1$，所以，有 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，于是

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

这个例子说明，函数在 $x=x_0$ 处是否有极限与函数在 x_0 点是否有定义是无关的.

例 4　讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \geqslant 1, \\ x-1, & x<1 \end{cases}$ 当 $x \to 1$ 时的极限，并作出它的图像.

解　因为 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+}(x+1)=2$，

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-}(x-1)=0$，

所以
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

故 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 不存在（如图 1－6）.

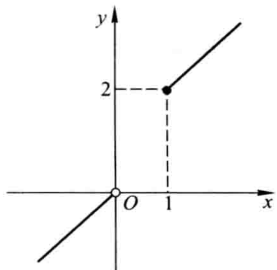

图 1－6

3. 无穷小

定义 6　如果当 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=0$），则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷小**.

注　（1）说一个函数是无穷小，必须指明自变量 x 的变化趋势，如函数 x^2 当 $x \to 0$ 时是无穷小，但当 $x \to 1$ 时，x^2 就不是无穷小；

（2）除了常量“0”是无穷小量外，其他任何常量都不是无穷小.

无穷小的性质.

性质 1　有限个无穷小的代数和仍为无穷小；

性质 2　有界函数与无穷小的乘积为无穷小；

性质 3　有限个无穷小的乘积是无穷小.

4. 无穷大

定义 7　如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷大**.

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时是无穷大，则它的极限是不存在的，但为了便于描述函数的这种变化趋势，我们也说“函数的极限是无穷大”，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=\infty \quad \left(\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x)=\infty\right).$$

无穷小和无穷大的关系

显然，由无穷小和无穷大的定义，我们可得到下面的结论.