2015

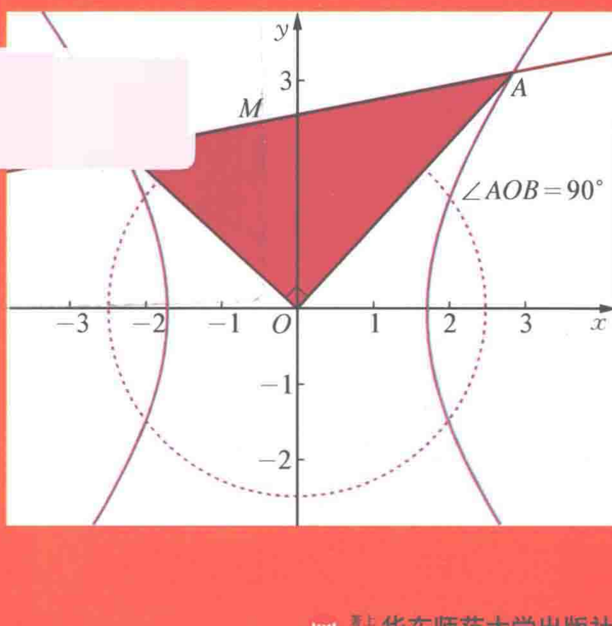
挑战压轴题

高考数学

主编　尹德好　卜照泽

轻松入门篇

（修订版）



这里有一群学霸

微信号：tiaozhanyazhouti

华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

挑战压轴题

高考数学

轻松入门篇

（修订版）

主　编　尹德好　卜照泽
编写者　张丽华　陈国平

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

挑战压轴题.高考数学.轻松入门篇/尹德好,卜照泽主编.—上海:华东师范大学出版社,2014.2
ISBN 978-7-5675-1838-4

Ⅰ.①挑… Ⅱ.①尹…②卜… Ⅲ.①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第036374号

挑战压轴题·高考数学:轻松入门篇

主　　编　尹德好　卜照泽
总 策 划　倪　明
项目编辑　徐　平
组稿编辑　徐　平
审读编辑　石　岩
装帧设计　高　山
漫画设计　孙丽莹　胡　艺
责任发行　王　祥

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　787×1092　16开
印　　张　13.5
字　　数　351千字
版　　次　2014年8月第2版
印　　次　2014年8月第1次
印　　数　1—25000
书　　号　ISBN 978-7-5675-1838-4/G·7219
定　　价　25.00元

出 版 人　王焰

致亲爱的读者

亲爱的读者朋友，看到本书封面上的二维码了吗？一定要扫一扫加“关注”哦！那是我们开通的《挑战压轴题》专属微信公众号（微信号：tiaozhanyazhouti）。关注了它，你不仅可以随时随地反馈图书的使用情况，还可以享受我们提供的一系列增值服务，比如说“学霸经验介绍”、“考试技巧与攻略”等等，并且可以与全国各地众多备考学子进行交流哦！！

无论中考还是高考，能拉开差距的其实只有压轴题。

但压轴题有点难，如何攻关？

为了帮助备考的莘莘学子攻克压轴题，圆名校梦。我们邀请了众多一线名师，打造了这套《挑战压轴题》丛书，深受考生欢迎。本丛书涉及中考、高考的数学、物理、化学三门学科，共计 18 种。

3 步搞定压轴题

1. 轻松入门篇

- 适合初一、初二、高一、高二及中、高考第一轮复习使用；
- 难度由浅入深、层层推进。

↓ 找思路

2. 精讲解读篇

- 有配套光盘，适合初三、高三复习使用；
- 主要以老师详细解析当年真题为主；
- 旨在帮助学生理解、消化。

↓ 学诀窍

3. 强化训练篇

- 适合备考前3个月冲刺使用；
- 主要以练习题为主；
- 配详细的答案解析；
- 试题主要由真题、模拟题、创新题构成。

↓ 练速度

如果你想搞定压轴题，不妨按照我们的“找思路→学诀窍→练速度”3 步骤进行训练哦！

愿这套备考丛书能够帮助你顺利通过中高考升学考试，迈入新的理想校园。

挑战压轴题，轻松进名校！

华东师范大学出版社教辅分社

编写说明

高考数学压轴题是学生既畏惧又难以放弃的一块“鸡肋”，很多同学想，反正也不指望考清华、北大，又没必要考满分，所以在复习备考过程中彻底放弃压轴题. 确实，压轴题信息量大、文字多、审题难；或因数学情景新颖，或有时条件隐蔽，甚至要经过推理计算才能看出其中的特殊性；或因过程多，情景变化不断，导致列出的方程多，数学解题过程复杂，甚至有的时候需要用到不常用的数学方法，难以想到. 但不管怎样，放弃压轴题绝对不是良策.

为了帮助同学们熟悉压轴题的特征及题型，找到解决这类题的一般程序和方法，化解做题难度，并通过一定的训练提升做题的信心，我们把原本一道道很难的压轴题，通过分散它们的难点，化大题、难题为小题、容易题. 本书所选择的压轴题其实是高考中 30%的较难题，选择、填空、计算题型都有，针对面有所扩大. 让读者全面掌握压轴题的命题意图、三维要求及解题策略. 为此，我们在原有系列的基础上继续拓展编写了《挑战压轴题》之轻松入门篇和强化训练篇.

《挑战压轴题》之轻松入门篇按知识网络和数学方法并结合压轴题热点题型进行编排，分解答型压轴题和客观型压轴题. 对每一小专题先作解法综述，再以分级例题的方式逐步引出解题之方法策略. 从基础题开始，建立解题基础，再对提高题进行解题分级转化，相当于把一道大题分成几道小题，减少了步长，化解了难度. 再以压轴题为例题，提出难点分化策略，展示满分解答，帮助学生建立起解决问题的思维程序，让人觉得一道综合题无非是几道小题、基本题的汇集整合. 掌握了做题的程序，也就减少了畏惧心理. 最后配置真题试做，所选题目有层次，供学生逐级训练，以便最终能直击压轴题.

《挑战压轴题》之强化训练篇纯粹作为配套训练使用，题目来源分为三类，包括真题、模拟题、创新题，其设置比例大概为 5∶3∶2. 真题主要从近 5 年各地高考试卷中遴选出来，模拟题主要为近两年各地考前的一模、二模试卷，具有一定的典型性. 创新题主要是我们根据命题趋势对一些题目进行适当的改编，建议学生在考前 3 个月有计划地进行练习. 在做题过程中，先不要看答案，独立思考完成，然后根据自己写的步骤并参照答案进行查漏补缺. 在彻底弄懂的基础上通过这样透彻的练习，才能提高准确性和做题速度.

最后，由于作者水平有限，对书里存在的问题，欢迎读者批评指正.

编　者

目　　录

第一部分
解答型压轴题

第 1 章　解析几何

基本问题 1　求已知曲线的标准方程

求已知曲线(如直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线)的标准方程,可以有效地考查学生对圆锥曲线基本思想和基本方法掌握情况. 同时此类问题可以在直线与圆锥曲线、圆锥曲线间设计综合题目,还可以很好地考察学生的分析问题和解决问题能力,因此常常作为高考压轴题出现.

基本题高考分布

在 2008—2013 年全国高考压轴题中,可转化为求已知曲线的标准方程的考题分布规律如下:

	2008					2009	2010		2011	2012	2013	
省(市)	北京	宁夏	湖北	全国 1	山东		江西	全国 1	浙江	陕西	重庆	湖南
理科		20(2)求直线方程		21(2)求双曲线方程	22(2)求抛物线方程		21(2)求椭圆、抛物线的方程	21(2)求圆的方程	21(2)求直线方程		21(2)求圆的方程	21(2)求抛物线方程
文科	19(2)求直线方程		20(2)求直线方程	21(2)求双曲线方程			21(2)求椭圆、抛物线的方程	21(2)求圆的方程		20(2)求直线方程		20(2)求直线方程

基本题解法综述

求已知曲线(如直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线)的标准方程问题,常用解法如下:

求已知曲线的标准方程
- 待定系数法:先定型、后定式、再定量
- 定义法

基本题解法示例

求圆锥曲线方程通常使用待定系数法,若能根据条件发现符合圆锥曲线定义时,则用定义法.

一、待定系数法:求已知曲线类型的曲线方程问题,常采用待定系数法,即"先定形,后定式,再定量".

定形——指的是二次曲线的焦点位置与对称轴的位置;

定式——根据"形"设方程的形式,注意曲线系方程的应用,如当椭圆的焦点不确定在哪个坐标轴上时,可设方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,\ n>0)$;

定量——由题设中的条件找到"式"中特定系数的等量关系,通过解方程得到量的大小.

例 1　求圆心在 y 轴上,半径为 1,且过点 $(1,\ 2)$ 的圆的方程.

解　设圆心坐标为 $(0,\ b)$,则由题意知 $\sqrt{(0-1)^2+(b-2)^2}=1$,解得 $b=2$,故圆的方

程为 $x^2+(y-2)^2=1$.

点评 求圆的方程可采取"待定系数法",不论圆的标准方程还是一般方程,都有三个字母(a、b、r 或 D、E、F)的值需要确定,因此需要三个独立的条件. 题设中给出了确定圆的条件:(1)半径、(2)圆心位置、(3)过定点,故可设出圆的标准方程.

二、用定义法求曲线的方程.

求直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线的标准方程也可以借助其定义来确定方程中的系数.

例 2 求以椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 的焦点为焦点,且经过点 $P\left(1,\ \dfrac{2\sqrt{10}}{3}\right)$ 的椭圆的标准方程.

解 由已知:$c=\sqrt{12-8}=2$,所求椭圆焦点为 $F_1(2,0)$,$F_2(-2,0)$.

(解法一)因 P 点在椭圆上,由椭圆定义:

$$2a=|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2}+\sqrt{3^2+\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2}=\frac{7}{3}+\frac{11}{3}=6,$$

得 $a=3$, $b=\sqrt{5}$. 所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

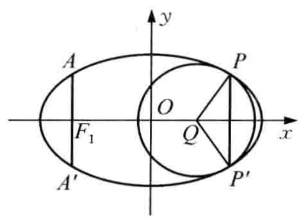
(解法二)设所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,则 $\begin{cases}a^2=b^2+4,\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{40}{9}}{b^2}=1.\end{cases}$ 解得:$b^2=5$, $a^2=9$.

故所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

点评 求椭圆的标准方程,只需确定 a, b 的值. 解法一用了椭圆的定义求椭圆方程. 解法二用了待定系数法求椭圆方程.

压轴题转化分析

高考真题 1. (2013 重庆理)如图,椭圆的中心为原点 O,长轴在 x 轴上,离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,过左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于 A、A'两点,$|AA'|=4$.



(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 取垂直于 x 轴的直线与椭圆相交于不同的两点 P、P',过 P、P'作圆心为 Q 的圆,使椭圆上的其余点均在圆 Q 外. 若 $PQ\perp P'Q$,求圆 Q 的标准方程.

[分析与转化] (1)略. (2)欲求圆 Q 的标准方程,需求圆心坐标和圆的半径. 关键是将条件"使椭圆上的其余点均在圆 Q 外",转化为"P 和 P'是椭圆上到 Q 的距离最小的点."

解 (1) 由题意知点 $A(-c,2)$在椭圆上,则 $\dfrac{(-c)^2}{a^2}+\dfrac{2^2}{b^2}=1$,从而 $e^2+\dfrac{4}{b^2}=1$,由 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $b^2=\dfrac{4}{1-e^2}=8$,从而 $a^2=\dfrac{b^2}{1-e^2}=16$,故该椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

(2) 由椭圆的对称性,可设 $Q(x_0,0)$,又设 $M(x,y)$是椭圆上任意一点,则

$$|MQ|^2=(x-x_0)^2+y^2=x^2-2xx_0+x_0^2+y^2=x^2-2xx_0+x_0^2+8\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x-2x_0)^2-x_0^2+8,\ x\in[-4,4].$$

设 $P(x_1, y_1)$，由题意，P 是椭圆上到 Q 的距离最小的点，因此，上式当 $x = x_1$ 时取得最小值，又因 $x_1 \in (-4, 4)$，所以上式当 $x = 2x_0$ 时取得最小值，从而 $x_1 = 2x_0$ ①

且 $$|QP|^2 = 8 - x_0^2.$$

因为 $PQ \perp P'Q$ 且 $P'(x_1, -y_1)$，所以 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{P'Q} = (x_0 - x_1, -y_1) \cdot (x_0 - x_1, y_1) = 0$，即 $(x_1 - x_0)^2 - y_1^2 = 0$ ②，将 $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{8} = 1$ 及 $x_1 = 2x_0$ 代入②得 $\frac{1}{4}x_1^2 - 8\left(1 - \frac{x_1^2}{16}\right) = 0$，解得 $x_1 = \pm\frac{4\sqrt{6}}{3}$，$x_0 = \frac{x_1}{2} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$，从而 $|QP|^2 = 8 - x_0^2 = \frac{16}{3}$.

故这样的圆有两个，其标准方程分别为 $\left(x + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{3}$，$\left(x - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{3}$.

高考真题 2. (2012 陕西)已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$，椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴，且与 C_1 有相同的离心率.(1) 求椭圆 C_2 的方程；(2) 设 O 为坐标原点，点 A，B 分别在椭圆 C_1 和 C_2 上，$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$，求直线 AB 的方程.

[分析与转化] (1)略.(2)欲求直线 AB 的方程，用待定系数法“先定式”，根据已知可设直线 AB 的方程为 $y = kx$，此处 k 为待定系数.“再定量”确定 k 的值.由 $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ 可得方程从而可确定 k 的值.

解 (1) $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$.

(2) 椭圆 C_2 的方程为 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$，设 A，B 两点坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，

由 $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$，知 O，A，B 三点共线且不在 y 轴上，因此可设直线 AB 的方程为 $y = kx$，

将 $y = kx$ 代入 C_1：$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$，得 $x_1^2 = \frac{4}{1 + 4k^2}$.

将 $y = kx$ 代入 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$，得 $x_2^2 = \frac{16}{4 + k^2}$.

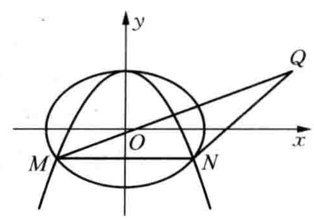
由 $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$，得 $x_2^2 = 4x_1^2$，即 $\frac{16}{4 + k^2} = \frac{16}{1 + 4k^2}$，

解得 $k = \pm 1$，故直线 AB 的方程为 $y = x$ 或者 $y = -x$.

高考真题 3. (2010 江西)已知抛物线 C_1：$x^2 + by = b^2$ 经过椭圆 C_2：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的两个焦点.

(1) 求椭圆 C_2 的离心率；

(2) 设 $Q(3, b)$，又 M，N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点，若△QMN 的重心在抛物线 C_1 上，求 C_1 和 C_2 的方程.



[分析与转化] (1)略.(2)本题同时求椭圆、抛物线的方程，即需要确定 a，b 的值.故只要求解根据已知条件列出的关于 a，b 的方程组.

解 (1)略.(2)因为抛物线 C_1 经过椭圆 C_2 的两个焦点 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$，

所以 $c^2 + b \times 0 = b^2$，即 $c^2 = b^2$，故 $a^2 = b^2 + c^2 = 2c^2$，可知 $a^2 = 2b^2$，椭圆 C_2 的方程为：$\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.联立抛物线 C_1 的方程 $x^2 + by = b^2$ 得：$2y^2 - by - b^2 = 0$，

解得：$y = -\frac{b}{2}$ 或 $y = b$(舍去)，所以 $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}b$，

即 $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}b,\ -\frac{b}{2}\right)$，$N\left(\frac{\sqrt{6}}{2}b,\ -\frac{b}{2}\right)$，所以$\triangle QMN$的重心坐标为$(1,\ 0)$.

因为重心在 C_1 上，所以 $1^2+b\times 0=b^2$，得 $b=1$. 所以 $a^2=2$.

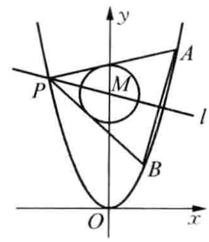
所以抛物线 C_1 的方程为：$x^2+y=1$，椭圆 C_2 的方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

压轴题转化训练

1 （2011 浙江理）已知抛物线 $C_1: x^2=y$，圆 $C_2: x^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为点 M.

（1）求点 M 到抛物线 C_1 的准线的距离；

（2）已知点 P 是抛物线 C_1 上一点（异于原点），过点 P 作圆 C_2 的两条切线，交抛物线 C_1 于 A，B 两点，若过 M，P 两点的直线 l 垂直于 AB，求直线 l 的方程.



2 （2008 全国）双曲线的中心为原点 O，焦点在 x 轴上，两条渐近线分别为 l_1，l_2，经过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1，l_2 于 A，B 两点. 已知 $|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$ 成等差数列，且 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向.

（1）求双曲线的离心率；

（2）设 AB 被双曲线所截得的线段的长为 4，求双曲线的方程.

基本问题 2　求参数取值范围

求参数取值范围问题是圆锥曲线中的一类重要的基本问题. 这类问题可以附着很多知识点，在知识的交汇处设计题目，综合性强，变量多，涉及知识面广，难度大，可以很好地考察学生分析问题和解决问题的能力，因此常常做为高考压轴题出现.

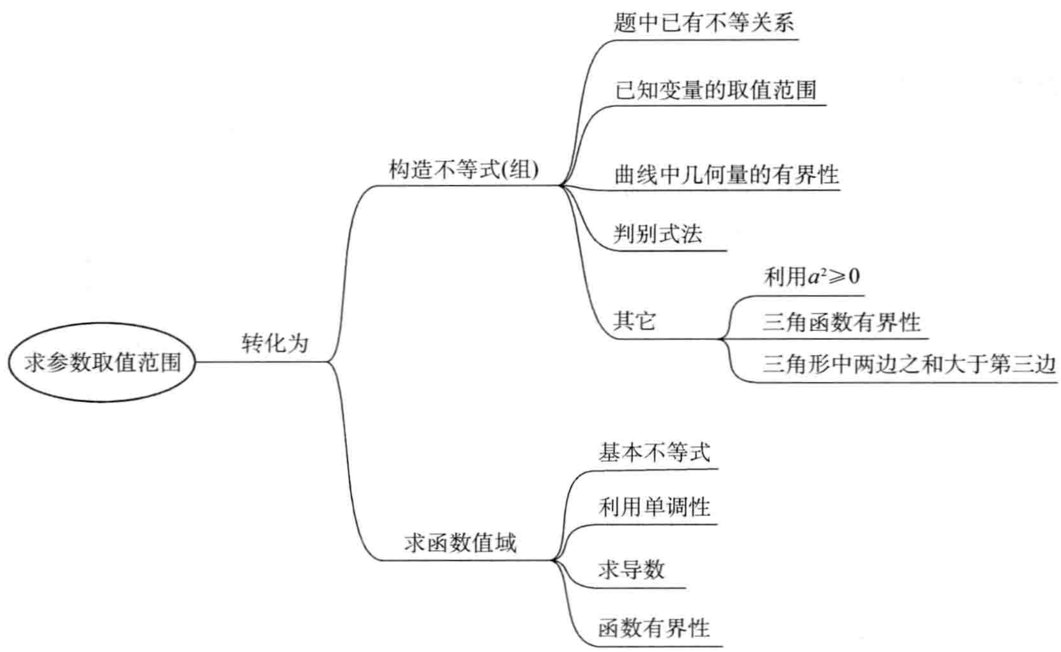
基本题高考分布

在 2008—2013 年全国高考压轴题中，求参数取值范围问题的考题分布规律如下：

	2008			2009	2010			2011	2013
省（市）	上海	天津	福建	陕西	浙江	上海	湖北	上海	山东
理科		21(2)	21(2)			23(3)			22(2)
文科	20(2)	21(2)		22(2)	21(2)		文 20(2)	22(3)	

基本题解法综述

求参数取值范围问题常用解法如下：



基本题解法示例

一、构造含参数的不等式(组)求解.

例 1 已知椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$. 若直线 l: $y=kx+\sqrt{2}$ 与 C_1 及 C_2 都恒有两个不同的交点，且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$ (其中 O 为原点)，求 k 的取值范围.

解 将 $y=kx+\sqrt{2}$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $(1+4k^2)x^2+8\sqrt{2}kx+4=0$.

由直线 l 与椭圆 C_1 恒有两个不同的交点得：

$$\Delta_1=(8\sqrt{2})^2k^2-16(1+4k^2)=16(4k^2-1)>0\text{，即 }k^2>\frac{1}{4}.\quad ①$$

将 $y=kx+\sqrt{2}$ 代入 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 得 $(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0$.

由直线 l 与双曲线 C_2 恒有两个不同的交点 A，B 得

$$\begin{cases}1-3k^2\neq 0,\\ \Delta_2=(-6\sqrt{2}k)^2+36(1-3k^2)=36(1-k^2)>0.\end{cases}\qquad \text{即 }k^2\neq\frac{1}{3}\text{ 且 }k^2<1.\quad ②$$

设 $A(x_A, y_A)$，$B(x_B, y_B)$，则 $x_A+x_B=\dfrac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}$，$x_Ax_B=\dfrac{-9}{1-3k^2}$.

由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$ 得 $x_Ax_B+y_Ay_B<6$，而 $x_Ax_B+y_Ay_B=x_Ax_B+(kx_A+\sqrt{2})(kx_B+\sqrt{2})=$

$$(k^2+1)x_Ax_B+\sqrt{2}k(x_A+x_B)+2=(k^2+1)\cdot\frac{-9}{1-3k}+\sqrt{2}k\cdot\frac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}+2=\frac{3k^2+7}{3k^2-1}.$$

于是 $\frac{3k^2+7}{3k^2-1}<6$,即$\frac{15k^2-13}{3k^2-1}>0$. 解此不等式得 $k^2>\frac{13}{15}$ 或 $k^2<\frac{1}{3}$.　③

由①、②、③得 $\frac{1}{4}<k^2<\frac{1}{3}$ 或$\frac{13}{15}<k^2<1$.

故 k 的取值范围为$\left(-1,\ -\frac{\sqrt{195}}{15}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{195}}{15},\ 1\right)$.

点评　本题利用已知条件 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$ 和 $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$ 得到不等式组,通过解不等式组从而得到参数取值范围.

例 2　已知一列椭圆 $C_n: x^2+\frac{y^2}{b_n^2}=1$, $0<b_n<1$, $n\in\mathbf{N}^*$. 若椭圆 C_n 上有一点 P_n,使 P_n 到右准线 l_n 的距离 d_n 是 $|P_nF_n|$ 与 $|P_nG_n|$ 的等差中项,其中 F_n, G_n 分别是 C_n 的左、右焦点. 求 b_n 的取值范围($n\geqslant 1$).

解　由题设及椭圆的几何性质有 $2d_n=|P_nF_n|+|P_nG_n|=2$,故 $d_n=1$. 又 $c_n=\sqrt{1-b_n^2}$,则右准线方程为 $l_n: x=\frac{1}{c_n}$. 因此,由题意 d_n 应满足$\frac{1}{c_n}-1\leqslant d_n\leqslant\frac{1}{c_n}+1$. 即$\begin{cases}\frac{1}{c_n}-1\leqslant 1,\\ 0<c_n<1.\end{cases}$解之得:

$\frac{1}{2}\leqslant c_n<1$. 即$\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{1-b_n^2}<1$. 从而对任意 $n\geqslant 1$, $0<b_n\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

点评　本题用曲线中几何量的有界性构造不等式:即 $\frac{a^2}{c}-a\leqslant d_n\leqslant\frac{a^2}{c}+a$.

例 3　直线 $y=kx+1$ 与双曲线 $2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点,求实数 k 的取值范围.

解　将直线方程代入双曲线方程,得 $(k^2-2)x^2+2kx+2=0$,依题意上述方程应有两个不等正实根,于是$\begin{cases}k^2-2\neq 0,\\ \Delta=(2k)^2-8(k^2-2)>0,\\ -\frac{2k}{k^2-2}>0,\\ \frac{2}{k^2-2}>0.\end{cases}$

解得 k 的取值范围为 $-2<k<-\sqrt{2}$.

点评　对于直线与圆锥曲线相交,求参数 k 的取值范围,一般都是将直线方程代入曲线方程,利用一元二次方程判别式及根的分布来构造含参变量的不等式. 但当一元二次方程的二次项系数含参数时需分类讨论.

二、构造函数,转化为求函数的值域.

例 4　设直线 l 过点 $P(0, 3)$,与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 顺次交于 A、B 两点,且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$. 试求 λ 的取值范围.

解　当直线 l 垂直于 x 轴时,可求得 $\lambda=-\frac{1}{5}$;

当 l 与 x 轴不垂直时,设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,直线 l 的方程为:$y=kx+3$,代入椭圆方

程，消去 y 得 $(9k^2+4)x^2+54kx+45=0$，解之得 $x_{1,2}=\dfrac{-27k\pm 6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}$.

因为椭圆关于 y 轴对称，点 P 在 y 轴上，所以只需考虑 $k>0$ 的情形.

当 $k>0$ 时，$x_1=\dfrac{-27k+6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}$，$x_2=\dfrac{-27k-6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}$，

所以 $\lambda=-\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{-9k+2\sqrt{9k^2-5}}{9k+2\sqrt{9k^2-5}}=1-\dfrac{18k}{9k+2\sqrt{9k^2-5}}=1-\dfrac{18}{9+2\sqrt{9-\dfrac{5}{k^2}}}$.

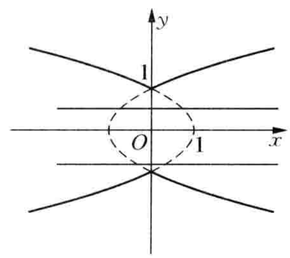
由 $\Delta=(-54k)^2-180(9k^2+4)\geqslant 0$，解得 $k^2\geqslant\dfrac{5}{9}$，

所以 $-1\leqslant 1-\dfrac{18}{9+2\sqrt{9-\dfrac{5}{k^2}}}<-\dfrac{1}{5}$，综上，$-1\leqslant\lambda\leqslant-\dfrac{1}{5}$.

点评 在 $\lambda=-\dfrac{x_A}{x_B}$ 中，有两个变量 x_A，x_B，这两个变量的范围不好控制，所以想到利用第 3 个变量——直线 AB 的斜率 k. 问题就转化为如何将 x_A，x_B 转化为关于 k 的表达式，到此为止，将直线方程代入椭圆方程，消去 y 得出关于 x 的一元二次方程，其求根公式呼之欲出.

三、利用数形结合.

例 5 已知曲线 $y^2=|x|+1$ 与直线 $y=kx+b$ 没有公共点，求实数 k、b 的取值范围.



解 作出方程 $y^2=|x|+1=\begin{cases}x+1,\ x\geqslant 0,\\ -x+1,\ x<0\end{cases}$ 所表示的曲线，如图所示：

由图观察可得：$k=0$，$b\in(-1,1)$.

点评 将求参数范围问题转化为曲线几何意义，再结合曲线分析求解，数形结合常常可使复杂问题简单化.

压轴题转化分析

高考真题 1. (2008 天津)已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(-3,0)$，一条渐近线的方程是 $\sqrt{5}x-2y=0$.

(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 若以 $k(k\neq 0)$ 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M，N，线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\dfrac{81}{2}$，求 k 的取值范围.

[分析与转化] (1)略.(2)欲求 k 的取值范围，需要建立函数关系式或造出不等式，因已知有直线 l 与双曲线 C 相交，故可以利用判别式大于零得不等式，转化为解不等式问题.

解 (1) 设双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b,b>0)$. 由题设得

$\begin{cases}a^2+b^2=9,\\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=5.\end{cases}$ 所以双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0)$. 点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} y = kx + m, & ① \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1. & ② \end{cases}$$

将①式代入②式，得 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(kx+m)^2}{5} = 1$，整理得 $(5-4k^2)x^2 - 8kmx - 4m^2 - 20 = 0$.

此方程有两个不等实根，于是 $5 - 4k^2 \neq 0$，

且 $\Delta = (-8km)^2 + 4(5-4k^2)(4m^2+20) > 0$. 整理得 $m^2 + 5 - 4k^2 > 0$.　③

由根与系数的关系可知线段 MN 的中点坐标 $(x_0,\ y_0)$ 满足

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4km}{5-4k^2},\ y_0 = kx_0 + m = \frac{5m}{5-4k^2}.$$

从而线段 MN 的垂直平分线方程为 $y - \dfrac{5m}{5-4k^2} = -\dfrac{1}{k}\left(x - \dfrac{4km}{5-4k^2}\right)$.

此直线与 x 轴，y 轴的交点坐标分别为 $\left(\dfrac{9km}{5-4k^2},\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{9m}{5-4k^2}\right)$. 由题设可得 $\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{9km}{5-4k^2}\right| \cdot \left|\dfrac{9m}{5-4k^2}\right| = \dfrac{81}{2}$. 整理得 $m^2 = \dfrac{(5-4k^2)^2}{|k|}$，$k \neq 0$.

将上式代入③式得 $\dfrac{(5-4k^2)^2}{|k|} + 5 - 4k^2 > 0$，整理得 $(4k^2-5)(4k^2-|k|-5) > 0$，$k \neq 0$.

解得 $0 < |k| < \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $|k| > \dfrac{5}{4}$.

所以 $k \in \left(-\infty,\ -\dfrac{5}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right) \cup \left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{4},\ +\infty\right)$.

高考真题 2. (2011 上海)已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{m^2} + y^2 = 1$(常数 $m > 1$)，点 P 是 C 上的动点，M 是右顶点，定点 A 的坐标为 $(2,\ 0)$.

(1) 若 M 与 A 重合，求 C 的焦点坐标；

(2) 若 $m = 3$，求 $|PA|$ 的最大值与最小值；

(3) 若 $|PA|$ 的最小值为 $|MA|$，求 m 的取值范围.

[分析与转化] (1)略. (2)要求 $|PA|$ 的最值. 可转化为求 $|PA|^2$ 的最值，进而转化为求二次函数的最值. (3)欲求 m 的取值范围，因为 $|PA|^2$ 为 x 的二次函数，故转化为函数问题.

解 (1) $m = 2$，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$，$c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$，所以左、右焦点坐标分别为 $(-\sqrt{3},\ 0)$，$(\sqrt{3},\ 0)$.

(2) $m = 3$，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$，设 $P(x,\ y)$，则

$$|PA|^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + 1 - \frac{x^2}{9} = \frac{8}{9}\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}(-3 \leqslant x \leqslant 3),$$

故当 $x = \dfrac{9}{4}$ 时，$|PA|_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$x = -3$ 时，$|PA|_{\max} = 5$.

(3) 设动点 $P(x,\ y)$，则

$$|PA|^2=(x-2)^2+y^2=(x-2)^2+1-\frac{x^2}{m}$$

$$=\frac{m^2-1}{m^2}\left(x-\frac{2m^2}{m^2-1}\right)^2-\frac{4m^2}{m^2-1}+5(-m\leqslant x\leqslant m),$$

此二次函数的图象开口向上，对称轴为 $x=\frac{2m^2}{m^2-1}>0$. 又因为 $-m\leqslant x\leqslant m$，要使 $|PA|$ 最小总在 $x=m$ 时取到，必须且只需 $|PA|^2$ 在 $[-m, m]$ 上单调递减，当且仅当 $\frac{2m^2}{m^2-1}\geqslant m$，

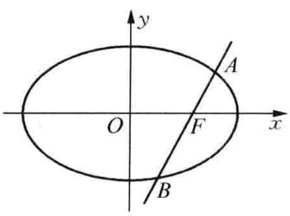
又 $m>1$ 且 $\frac{2m^2}{m^2-1}\geqslant m$，解得 $1<m\leqslant 1+\sqrt{2}$.

压轴题转化训练

1 (2008 福建)如图，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点是 $F(1, 0)$，O 为坐标原点.

(1) 已知椭圆短轴的两个三等分点与一个焦点构成正三角形，求椭圆的方程；

(2) 设过点 F 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点. 若直线 l 绕点 F 任意转动，恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$，求 a 的取值范围.



2 (2008 上海)已知双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

(1) 求双曲线 C 的渐近线方程；

(2) 已知点 M 的坐标为 $(0, 1)$. 设 P 是双曲线 C 上的点，Q 是点 P 关于原点的对称点. 记 $\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$. 求 λ 的取值范围；

(3) 已知点 D、E、M 的坐标分别为 $(-2, -1)$、$(2, -1)$、$(0, 1)$，P 为双曲线 C 上在第一象限内的点. 记 l 为经过原点与点 P 的直线，s 为 $\triangle DEM$ 截直线 l 所得线段的长. 试将 s 表示为直线 l 的斜率 k 的函数.