全国各类普通高等院校计算机及相关专业“十二五”规划精品教材

计算机数学基础

JISUANJI
SHUXUE JICHU

主 编 白瑞云 宋从芝 赵会引

中国商业出版社

全国各类普通高等院校计算机及相关专业“十二五”规划精品教材

计算机数学基础

主　编　白瑞云　宋从芝　赵会引
副主编　张西敏　程东立　高亚平

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/白瑞云、宋从芝、赵会引主编 .
— 北京:中国商业出版社, 2014.8
ISBN 978-7-5044-8469-7

Ⅰ. ①计… Ⅱ. ①白… ②宋…③赵… Ⅲ. ①电子计算机-数学基础-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 091888 号

责任编辑:蔡凯

中国商业出版社出版发行
010-63180647 www.c-chook.com
(100053 北京广安门内报国寺 1 号)
新华书店总店北京发行所经销
北京市书林印刷有限公司印刷

*　*　*　*　*

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:14.5 字数:300 千字
2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

*　*　*　*

定价:32.80 元
(如有印装质量问题可更换)

前　言

根据教育部关于高职高专数学教学改革的要求，为了更有利于计算机专业高端技能型人才的培养，结合我院河北工业职业技术学院近几年数学教学改革和精品课程建设的经验，我们编写了这本面向高职高专计算机专业的数学教材。

在编写过程中，我们遵循“定位高职，注重简洁直观，强化应用意识，融入数学思想”的原则，具体特点如下：

1. 对基本概念和基本理论，注重产生背景的引入，并强化几何直观表示，让学生知道数学从哪里来，让学生感到数学并非深不可测，提高学生学习数学的兴趣；

2. 对数学知识的应用，多引进了一些贴近生活实际的例子，引用与计算机专业结合的例子，强化模型思想，让学生知道数学到哪里去，让学生体会数学真的大有用处，提高学生学习数学的动力；

3. 对于数学的基本计算，适当做了一些淡化处理，只介绍基本公式和基本方法，但通过教材的“数学实验”一章，学生可以利用数学软件进行相关的运算。

4. 融入数学思想，发挥育人功能。本教材重视数学思想方法的渗透，如极限思想、变化率思想、化归思想等，引导学生逐步领会数学的思想和方法，提高学生的综合素质。

本教材的主要内容包括：函数、极限、连续、导数、微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、行列式、矩阵、方程组、数学实验（受教学时数的限制，概率统计和离散数学相关内容本教材没有包括）。每节后配有习题，供学生练习，每章后配有复习题，便于学生对该章知识的复习、巩固和提高。书后有部分题目的参考答案。

本教材由河北工业职业技术学院白瑞云、宋从芝（第6、7、8章）、赵会引（第4、5章及附录一、附录二）任主编，河北工业职业技术学院张西敏（第1章）、河北建材职业技术学院程东立（第2章）、河北女子职业学院高亚平（第3章）担任副主编。最后由河北工业职业技术学院白瑞云老师负责统稿。

编写期间得到我院有关领导和同行的大力支持，在此一并致谢。

因编者水平有限，书中难免有不妥与错漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

2014 年 8 月

◆目 录

第1章 函数、极限与连续

微积分是高等数学的主要内容，函数是微积分的研究对象，极限是所使用的工具. 本章将在中学已有函数知识的基础上，进一步理解函数的概念、性质，学习建立实际问题的函数模型，讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

§1.1 函数

1.1.1 函数概念

16 世纪，随着世界生产力发展的需要，运动变化成为当时科学研究的主题，在对各种变化过程以及其中的变量与变量之间依赖关系的研究中产生了函数的概念，因此函数就是用数学语言描述现实世界的工具.

例如，圆的面积 A 依赖于圆的半径 R，且 $A = \pi R^2$，我们称面积 A 是半径 R 的函数；邮件的邮费 C 依赖于邮件的重量 m，且对确定的邮件重量 m，都有唯一确定的邮费 C 与之对应，我们称邮费 C 是邮件的重量 m 的函数.

1. 定义 设 D 是一个实数集. 如果对每一个 $x \in D$，按照某个对应关系 f，y 都有确定的值和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y = f(x)$.

其中 x 叫做自变量，数集 D 叫做函数的定义域. 函数 $y = f(x)$ 当 $x = x_0 \in D$ 时，对应的函数值可以记为 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中一切实数值时与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的值域. 几何表示如图 1－1：

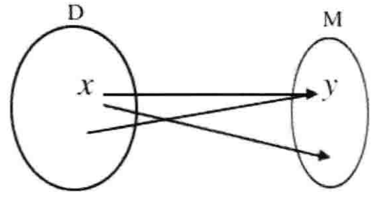

图 1－1

【注1】由函数的定义可知，确定函数要满足:(1)定义域 $D \neq \varnothing$;(2) 对应规则 f 要保证每个 x 都有唯一的 y 与之对应.

【注2】当涉及多个函数时，应取不同的函数记号. 如 $y = F(x)$、$s = G(t)$、$u = \varphi(x)$、$y = y(x)$ 等.

例1 $y = \sqrt{\sin x - 2}$ 不表示函数关系.

例2 $y = x$ 与 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 不是相同函数，而 $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是相同函数.

例3 求函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \ln(x - 1)$ 的定义域

解: 就是找使函数表达式有意义的 x 的取值范围，称为自然定义域.

$4 - x^2 > 0$ 且 $x - 1 > 0$，即 $-2 < x < 2$ 且 $x > 1$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-1,2)$

例4 已知 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$，求 $f(2)$、$f(1 - x)$、$f[f(x)]$、$f[f(2)]$

解: $f(2) = \dfrac{1}{1 - 2} = -1$; $\qquad f(1 - x) = \dfrac{1}{1 - (1 - x)} = \dfrac{1}{x}$

$f[f(x)] = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - x}} = \dfrac{1 - x}{-x} = \dfrac{x - 1}{x}$; $\qquad f[f(2)] = \dfrac{2 - 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

1.1.2 函数的表示法

在17世纪之前，函数一直和公式紧密相连，人们认为函数就是一个解析表达式，直到1837年，德国数学家狄利克雷(P. G. L. dirichlet, 1805 – 1859)关于函数的定义才比较清楚地说明: 无论其对应法则以什么形式呈现，只要变量 x 和 y 之间具有“对于 x 的每一个取值，y 都有一个完全确定的值与之对应”，则 x 和 y 之间就形成函数关系.

表示函数的方法常用的有三种:公式法、表格法、图像法. 本书所讨论的函数常用公式法表示.

用公式法表示函数时，常遇到在自变量不同的取值范围内函数需要用不同的式子来表示的情形.

例如，函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases},$$

是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数. 当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = \sqrt{x}$; 当 $x < 0$ 时，$f(x) = -x$. 它的图像如图 1 – 2 所示.

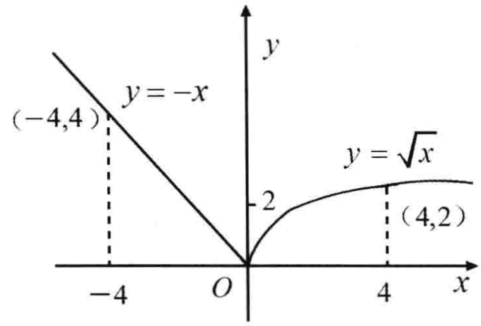

图 1－2

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**.

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算.

例如，在上面的分段函数中，

$$f(4)=\sqrt{4}=2;$$
$$f(-4)=-(-4)=4.$$

在计算机科学中，还经常用到另一种特殊的函数——**递归函数**. 对于某些问题，通过构造“递归函数”，采用递归的思想和方法编写计算机程序，能使程序设计简单、快捷.

例 5 计算正整数 n 的阶乘

解:按阶乘的定义，$f(n)=n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$

用“递归”方法可定义如下:

$$f(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ nf(n-1), & n>1\end{cases}$$

在递归定义中，表达式的两端都用到了函数记号f，好像是“自己定义自己”，但作用对象不同，等号右端的f作用于$n-1$，而左端的f作用于n. 只要$f(1)$有明确的值，就能确定$f(2)$，如此递推下去，就可以计算出对应于所有正整数的阶乘的值.

1.1.3 初等函数

微积分研究的对象主要是初等函数，而初等函数是由基本初等函数形成的.

1. 基本初等函数

常函数　　$y=C$（C 为常数）

幂函数　　$y=x^a$（a 为任意实数）;

指数函数　$y=a^x$（$a>0$, $a\neq1$, a 为常数）;

对数函数　$y=\log_a x$（$a>0$, $a\neq1$, a 为常数）;

三角函数　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$;

反三角函数　$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

它们统称为基本初等函数，这些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和特性见【附录一】.

2. 复合函数

复杂的函数都是由一些简单的函数构成的. 例如，函数 $y=\sin^2 x$ 可以看成是由幂函数

$y = u^2$ 与正弦函数 $u = \sin x$ 组合而成. 因为对于每一个 $x \in R$，通过变量 u，都有确定的 y 与之对应，所以 y 是 x 的函数. 这个函数可通过把 $u = \sin x$ 代入 $y = u^2$ 而得到.

一般地，设 $y = f(u)$，又 $u = \varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内，则由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 就可以合成一个复杂的函数 —— 复合函数，记作 $y = f[\varphi(x)]$，其中变量 u 叫做中间变量.

【注 1】不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，$y = \sqrt{u}$ 与 $u = \sin x - 2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u = \sin x - 2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 中任何 x 值所对应的 u 值都小于 0，它们都不能使 $y = \sqrt{u}$ 有意义.

【注 2】复合函数也可以由两个以上的函数复合而成，即复合函数的中间变量可以不止一个. 例如，设 $y = \sin u$，$u = \sqrt{v}$，$v = 1 - x^2$，则 $y = \sin\sqrt{1 - x^2}$，这里的 u，v 都是中间变量.

【注 3】研究复合函数时，常常需要把它化归成简单函数，称为复合函数的分解.

例 6 指出下列复合函数的复合过程和定义域：

① $y = \sqrt{1 - x^2}$； ② $y = \sin 2x$； ③ $y = 10^{-x^2}$

解 ① $y = \sqrt{1 - x^2}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = 1 - x^2$ 复合而成，它的定义域是 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，只是 $u = 1 - x^2$ 的定义域 R 的一部分.

② $y = \sin 2x$ 是由 $y = \sin u$ 与 $u = 2x$ 复合而成，它的定义域与 $u = 2x$ 的定义域一样，都是 $x \in R$.

③ $y = 10^{-x^2}$ 是由 $y = 10^u$ 与 $u = -x^2$ 复合而成，它的定义域与 $u = -x^2$ 的定义域一样，都是 $x \in R$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的，可用一个解析式子表示的函数称为初等函数. 例如 $y = 1 + \sqrt{x}$、$y = x\ln x$、$y = 2\sin\sqrt{1 - x^2}$、$y = \arcsin(\ln x)$、$y = \dfrac{e^x}{1 + x}$ 等都是初等函数. 在本课程中研究的函数大多是初等函数.

分段函数不一定是初等函数，例如函数 $y = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$，是分段函数，但不是初等函数. 又如分段函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 能化为 $f(x) = \sqrt{x^2}$，所以这个分段函数是初等函数.

1.1.4 函数模型实例

函数关系可以说是一种变量相依关系的数学模型，数学模型方法(Mathematical Modeling)称为 MM 方法，它是针对所考察的实际问题构造出相应的数学模型，通过对数学模型的研究，使问题得以解决的一种数学方法.(相关知识可参阅知识拓展)

建立函数模型的步骤可分为：

(1)分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示；

(2)根据所给条件，运用数学或物理等相关知识，找到变量与变量之间的等式关系即函数关系式；

(3)指明定义域.

下面通过例子看如何建立实际问题的函数模型.

例 7 【制造圆柱形桶的用料问题】

用薄铁板做一容积为 V 的有盖圆柱形桶，试建立所用材料与桶的底面半径之间的函数模型.

解:设底面半径 r，高 h，

则所用材料即总表面积 $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

又 $V = \pi r^2 h$，所以 $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \qquad r \in (0, +\infty)$$

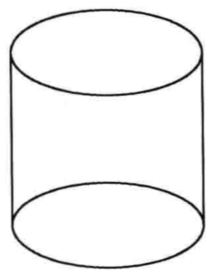

图 1-3

有了制造圆柱形桶时所用材料与底面半径之间的这个函数模型，在此基础上还可以进一步考量用料最省的问题.

例 8 【货运收费问题】

某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 $a$km 以内，每公里 k 元，超过 $a$km，超过部分每公里为 $\dfrac{4}{5}k$ 元，求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解：由题意知，里程不同，运价不同，因此它们之间的关系要分段表示.

当 $0 < s \leqslant a$ 时，$m = ks$；

当 $s > a$ 时，$m = ka + \dfrac{4}{5}k(s-a)$.

综上讨论，得函数关系式为

$$m = \begin{cases} ks, & 0 < s \leqslant a \\ ka + \dfrac{4}{5}k(s-a), & s > a \end{cases},$$

定义域为 $(0, +\infty)$.

这个函数模型就可以作为该运输公司的收费标准和依据.

1.1.5 函数的性态

1. 函数的奇偶性

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任一 $x \in D$，都有 $f(x) = f(-x)$，则称为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$，$f(x)$ 既非奇函数，也非偶函数，则称其为非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

2. 函数的单调性

定义　如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随 x 的增大而增大，即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加，区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间，单调增加的函数，其图像自左向右是上升的.

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随 x 的增大而减小，即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少，区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调减少区间. 单调减少的函数，它的图像自左向右是下降的.

上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形.

在某一区间内单调增加或单调减少的函数都称为这个区间内的单调函数，该区间叫做这个函数的单调区间.

3. 函数的有界性

定义　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，对应的函数值 $f(x)$ 都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 为在区间 (a,b) 内有界.

如果这样的正数 M 不存在，则称 $f(x)$ 为在区间 (a,b) 内无界.

上述定义也适用于闭区间的情形.

4. 函数的周期性

定义　对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 T，使得对于定义域内的一切 x，等式

$$f(x+T) = f(x)$$

都成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 叫做这个函数的周期. 一个以 T 为周期的函数，它的图像在定义域内每隔长度为 T 的相邻区间上有相同的形状（图 1－4）.

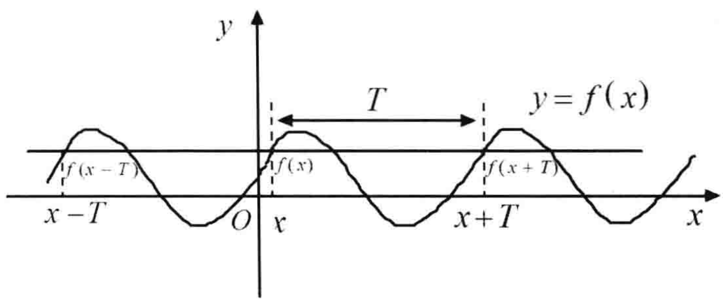

图 1－4

显然，如果函数 $f(x)$ 以正数 T 为周期，则 $2T$，$3T$，…，$nT(n \in N)$ 也是它的周期，通常最小的正数 T 称为周期函数的最小正周期.

习题 1.1

1. 指出下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x) = x^5 - x^3 + 2x$；　　(2) $f(x) = x + x^2$；

(3) $f(x) = \cos x + x^2$；　　(4) $\varphi(x) = \sin x - 5x^3$.

2. 函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$、$(0, +\infty)$ 上是否为单调减少的?能否说在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调减少的?

3. 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y = (1 + x)^4$；　　(2) $y = \sqrt{1 + x^3}$；

(3) $y = e^{x+1}$；　　(4) $y = \cos^2(3x + 1)$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3 - x} & -3 < x < -1 \\ 0, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - 1, & 1 < x < 3 \end{cases}$，求 $f(-2)$、$f(1)$、$f(2)$、$f(4)$.

5. 如图 1－5 所示，有边长为 a 的正方形铁片，从它的四个角截去相同的小正方形，然后折起各边做成一个无盖的盒子，求它的容积与截去的小正方形边长之间的关系式，并指出定义域.

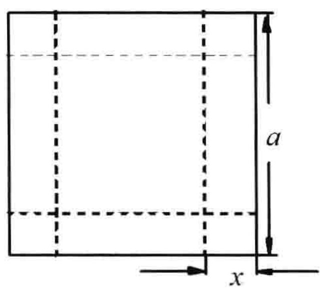

图 1－5

6. 一物体做直线运动，已知阻力 f 的大小与物体运动的速度 v 成正比，但方向相反，而物体以 $1m/s$ 的速度运动时，阻力为 $1.96 \times 10^{-2} N$. 试建立阻力 f 与速度 v 之间的函数关系.

7. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 $50kg$ 时，按基本运费计算，每 $1kg$ 收费 0.40 元；当超过 $50kg$ 时，超重的部分按每 $1kg$ 收费 0.65 元. 试求运费 y(元) 与质量 $x(kg)$ 之间的函数关系式，并作出函数的图形.

8. 将直径 d 的圆木料锯成为矩形的木材，并且要求最大可能利用材料，请列出矩形截面两条边长之间的函数关系.

§1.2 极限

1.2.1 极限的思想方法

极限的思想方法产生于某些实际问题的求解过程. 公元263年，刘徽研究圆周率π时，用"割圆术"推求圆的面积的过程，就蕴含了极限的思想方法，其大致步骤是:作圆的内接正n边形(如$n=6$、12、24…)，设其面积分别为s_1、s_2、s_3… 易知，当圆的内接正多边形的边数越来越多时，正多边形的面积将越来越接近圆的面积. 不难想像，当边数无限增加时，正多边形面积就是圆的面积，即πr^2. 在这里，无限的过程和有限的目标辩证而巧妙地结合了起来，构成一个由有限(每一个正多边形的面积)组成无限(无穷多个正多边形的面积组成一个无穷数列)，又由无限(当正多边形的边数无限增加时)逼近有限(圆的面积)的过程. 即通过一个无限的过程，用一个变量去逼近一个常量，使变量最终转化为常量，这就是极限的基本思想. 所以，极限思想是数学从有限进入无限的钥匙，是有限和无限的辩证统一;是实现某些无穷步骤的工具，是过程和目标的巧妙结合.

极限的思想和方法是微积分的基本思想和方法.

1.2.2 数列的极限

1. 数列

一个无穷数列$\{x_n\}$:x_1, x_2, x_3, …, x_n, … 可看作自变量为正整数n的函数，即$x_n=f(n)$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)，即数列也是函数. 因此数列$\{x_n\}$的极限可看作整变量函数$f(n)$当$n\to\infty$时的极限.

2. 数列的极限的概念

先看一个实例:一个篮球，从距地面1米高处自由下落，受地心引力及空气阻力的作用，每次触地后篮球又反弹到前一次高度的$\frac{1}{2}$处，如此反复不止…… 请思考:(1) 每一次篮球所处的高度分别是多少?(2) 最后一次篮球所处的高度是多少?

不难知道，(1) 每一次篮球所处的高度形成一个数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$$

(2) 篮球最终会停在地面上，即最后一次篮球所处的高度为0 .

这个例子说明，随着反弹次数n的无限增大，反弹高度即数列通项$x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$的值将趋向0. 参考图1－6(1).