

初中畢業 高中入學

數學指導問題詳解

中冊 代數

趙餘勳編著

上海...

整小數四則式題 2

整小數四則應用問題 4

差額平分 平均 歸一 還原

和差 水程 雞兔 盈不足

連續數 日出沒 列車進行

植樹 倍數 行路 方陣 雜題

約數及倍數 41

質因數 大公約

小公倍 雜題

分數四則式題 50

分數的大公約小公倍 52

循環小數及複名數化分數 53

分數四則應用題 54

已知母數 求母數 工程

鐘面 寒暑表 雜題

百分算 78

利息算 84

單利 複利

比及比例 92

單比例 複比例 按分比例

連鎖比例 混合比例

開方 92

開平方 開立方

求積 92

平面形 立體形

度量衡表 92

問題 計算下式：（蘇州女師）

$$64 - 54 \div 6 - 5 \times 7 + 63 \times 7 \div 9 - 3 \times 8 - 24$$

解 原式 = $64 - 9 - 35 + 49 - 24 - 24$
 $= 21$

要點 先算乘除，後算加減。

用乘除號聯在一處的數目，叫做一項。第一次演算，應把各項分別算出，所以第一個等號後面，不該再有乘除號；但加減號則一個不可漏掉。

問題 計算下列各式：

1. $48 - 36 \div 9 + 7 + 5 \times 3 = ?$

$4.5 \times 6.5 - 4.8 \div 7.5 \times 4 = ?$

$64 - 54 \div 6 - 5 \times 7 + 63 \times 7 \div 9 = ?$

（徐州女中）

$+ 52 \times 4.5 - 54 \div 1.5 = ?$

問題 試計算下式之結果：（河南會考）

$$87 \div \{8 + 7 \times [18 \div (5 + 1)]\} + 6$$

解 原式 = $87 \div \{8 + 7 \times [18 \div 6]\} + 6$
 $= 87 \div \{8 + 7 \times 3\} + 6$
 $= 87 \div \{8 + 21\} + 6$
 $= 87 \div 29 + 6$
 $= 3 + 6$
 $= 9$

要點 先去小括號，次去中括號，最後去大括號，同時仍須注意先乘除後加減。

類題 計算下列二式：

1. $3 - \{6 - [(9 - 8) + 4]\} = ?$

（綏遠會考）

2. $72 - 4 \times [21 - (6 \div 2 + 6) \div 3] = ?$

（南京女中）

問題 $(x^2+3x+2)(x^2+4x+3)=?$

$$\begin{array}{r} \text{解} \quad \begin{array}{r} x^2+3x+2 \\ x^2+4x+3 \\ \hline x^4+3x^3+2x^2 \\ 4x^3+12x^2+8x \\ 3x^2+9x+6 \\ \hline x^4+7x^3+17x^2+17x+6 \end{array} \end{array}$$

要點 被乘式與乘式當同依 x 之昇冪序或降冪序排列，有缺項須補以 0。

本題用分離係數法演算，較為便捷。

$$\begin{array}{r} 1+3+2 \\ 1+4+3 \\ \hline 1+3+2 \\ 4+12+8 \\ 3+9+6 \\ \hline 1+7+17+17+6 \end{array}$$

$$\text{即 } x^4+7x^3+17x^2+17x+6$$

類題 1. $(-11x+2x^2-3)(3x+4x^2+1)=?$

$$2. (4x^3-6x+5)(3x+5+4x^2)=?$$

問題 $(x^3+x^4-16x-4-9x^2) \div (4+x^2+4x)=?$ (浙江會考)

$$\begin{array}{r} \text{解} \quad \begin{array}{r} x^4+x^3-9x^2-16x-4 \\ x^4+4x^3+4x^2 \\ \hline -3x^3-13x^2-16x-4 \\ -3x^3-12x^2-12x \\ \hline -x^2-4x-4 \\ -x^2-4x-4 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

要點 被除式與除式當同依 x 之昇冪序或降冪序排列。有缺項須補以 0。

本題用分離係數法演算較為便捷。

$$\begin{array}{r} 1+1-9-16-4 \\ 1+4+4 \\ \hline -3-13-16 \\ -3-12-12 \\ \hline -1-4-4 \\ -1-4-4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1+4+4 \\ 1-3-1 \\ \hline \text{即 } x^2-3x-1 \end{array}$$

類題 1. $(x^2+18x+77) \div (x+7)=?$ (山西會考)

$$2. (x^6-2x^3+1) \div (x^2-2x+1)$$

問題 舉出幾個應用最廣的乘法公式。

答 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(ax+b)(cx+d)$$

$$= acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^3 - b^3$$

問題 試展開 $(a+b+c)^2$

解 $(a+b+c)^2$

$$= [(a+b)+c]^2$$

$$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$$

或 $(a+b+c)^2$

$$= [a+(b+c)]^2$$

$$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2$$

$$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$$

題類 試展開下列各式：

1. $(a+b-c)^2$

2. $(a-b+c)^2$

3. $(a-b-c)^2$

問題 試展開下式： $(2x+y-z)^2$
(浙江會考)

解 $(2x+y-z)^2$
 $= [2x+(y-z)]^2$
 $= 4x^2 + 4x(y-z) + (y-z)^2$
 $= 4x^2 + 4xy - 4xz + y^2 - 2yz + z^2$
 $= 4x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4zx + 4xy$

或 $(2x+y-z)^2$
 $= [(2x+y)-z]^2$
 $= (2x+y)^2 - 2z(2x+y) + z^2$
 $= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4zx - 2yz + z^2$
 $= 4x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4zx + 4xy$

類題 試展開下列各式：

1. $(x+2y+3z)^2$
2. $(a-2b-3c)^2$
3. $(2a+3b-3c)^2$

問題 計算下式：

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
 $= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]$
 $= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$
 $= [(x^2+5x)+4][(x^2+5x)+6]$
 $= (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x) + 24$
 $= x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 + 50x + 24$
 $= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$

類題 展開下列各式：

1. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)$
2. $(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$
3. $(x+4)(x+1)(x-2)(x-7)$

問題 計算下式之積： (廣西會考)

$$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$

解
$$\begin{aligned} & (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \\ &= [(x^2 + y^2) + xy][(x^2 + y^2) - xy] \\ &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\ &= x^4 + x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

類題 計算下列各式：

- $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$
- $(a + 2b + 3c)(a - 2b - 3c)$
- $(m + 2n + 2p)(m + 2n - 2p)$
- $(a + 2b + 3c)(a - 2b + 3c)$

問題 試計算下式之積：

$$(a + b + c + d)(a + b - c - d)$$

解
$$\begin{aligned} & (a + b + c + d)(a + b - c - d) \\ &= [(a + b) + (c + d)][(a + b) - (c + d)] \\ &= (a + b)^2 - (c + d)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2 \\ &= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab - 2cd \end{aligned}$$

類題 計算下列各式：

- $(a + b + c + d)(a - b + c - d)$
- $(a + b - c + d)(a - b - c - d)$
- $(a - b + c - d)(a + b - c - d)$
- $(a + b + c + d)(a - b - c + d)$

問題 計算下式：

$$(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2) \\ (x^2-xy+y^2)$$

解 $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2) \\ (x^2-xy+y^2)$

$$= (x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4) \\ = x^6-y^6$$

或 $= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)$

$$= (x^3-y^3)(x^3+y^3) \\ = x^6-y^6$$

類題 計算下列各式：

1. $(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$
2. $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

問題 試展開 $(a+b+c)^3$

解 $(a+b+c)^3$

$$= [(a+b)+c]^3$$

$$= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc \\ + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3b^2c + 3bc^2 + 3c^2a + 3ca^2 \\ + 3a^2b + 3ab^2 + 6abc$$

類題 展開下列各式：

1. $(a+b-c)^3$
2. $(a-b+c)^3$
3. $(a-b-c)^3$

問題 分解下式之因數： (陝西會考)

$$a^2bx + ab^2x + adx$$

解 $a^2bx + ab^2x + adx$
 $= ax(ab + b^2 + d)$

要點 各項中有公共因數，可提出記於括號之外，其餘諸因數，置於括號之內。

$$\text{公式： } am + bm - cm = m(a + b - c)$$

類題 分解下列各式之因數：

1. $3a^3 + 6a^2b$

2. $2a^2b + 4ab^2 + 6ab$

3. $5x^3 - 10x^2 + 7x$

4. $a^3b - 2a^2b^2 - 2ab^3$

5. $12a^3b^2 - 24a^2b^3 + 54abxy$

6. $6ax + 8abxy - 10adx$

問題 分解下式之因數：

$$(x+y)(b+c) + (x+y)(b-c)$$

解 $(x+y)(b+c) + (x+y)(b-c)$
 $= (x+y)(b+c+b-c)$
 $= (x+y)(2b)$
 $= 2b(x+y)$

類題 分解下列各式之因數：

1. $(a+b)(x-y) - (a-b)(x-y)$

2. $(x+y)(x+2) - 2(x+y)$

3. $2a(a+b) - c(a+b)$

4. $(a-b)c + (a-b)c^2$

5. $ax^2(b-c) - 3x(c-b)$

6. $(x+y)^2(b+c) - (x+y)(b+c)^2$

問題 分解下式之因數： (貴州會考)

$$ab+cd-bc-ad$$

解
$$\begin{aligned} & ab+cd-bc-ad \\ &= (ab-bc)-(ad-cd) \\ &= b(a-c)-d(a-c) \\ &= (a-c)(b-d) \end{aligned}$$

要點 先用適當之方法分類，使每類中有公共之因數，再用前題之方法分析。

本題亦可分爲

$$(ab-ad)-(bc-cd)$$

類題 分解下列各式之因數：

1. $ax-by-bx+ay$ (北平會考)
2. $1-x+x^2-x^3$ (上海會考)
3. $x^4+x^3+x^2-1$ (鄞縣女中)
4. $abx^2+bxxy-axy-y^2$

問題 分解下式之因數： (南京中學)

$$xy^2+xz^2+x^2y+x^2z+y^2z+yz^2+3xyz$$

解 原式
$$\begin{aligned} &= (x^2y+xy^2+xyz) \\ &\quad + (y^2z+yz^2+xyz) \\ &\quad + (xz^2+x^2z+xyz) \\ &= xy(x+y+z)+yz(y+z+x) \\ &\quad +zx(z+x+y) \\ &= (x+y+z)(xy+yz+zx) \end{aligned}$$

要點 本題亦可分爲 (x^2y+x^2z+xyz)
 $+ (xy^2+y^2z+xyz) + (xz^2+yz^2+xyz)$

類題 分解下列各式之因數：

1. $4x^3-3xy-8x^2y+6y^2$
(山東八中)
2. $x^2+2ax+3bx+6ab$
3. $x^2+abx^2+x+abx-13-13ab$

問題 分解下式之因數：

$$4x^2 - 20xy + 25y^2$$

解 $4x^2 - 20xy + 25y^2$

$$= (2x)^2 - 2(2x)(5y) + (5y)^2$$

$$= (2x - 5y)^2$$

要點 凡三項式之首末二項(或任何二項)爲完全平方者，可觀察其是否爲二項式之平方。

$$\text{公式： } a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

類題 分解下列各式之因數：

$$1. x^2 + 6x + 9$$

$$2. 5a^2 + 10ab + 5b^2$$

暗示：先提出公因數。

問題 分解下式之因數： (貴州會考)

$$49x^6 + 154x^3y + 121y^2$$

解 $49x^6 + 154x^3y + 121y^2$

$$= (7x^3)^2 + 2(7x^3)(11y) + (11y)^2$$

$$= (7x^3 + 11y)^2$$

類題 分解下列各式之因數：

$$1. 9a^4 + 24a^2b + 16b^2$$

$$2. (a+b)^2 + 2(a+b) + c^2$$

$$3. x^2 + x + \frac{1}{4} \quad (\text{松江女中})$$

$$\text{暗示： } \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$4. z^2 + 2(y+z) + y^2 + 2yz$$

(徐州中學)

$$5. a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\text{暗示： } (a^2 + 2ab + b^2) + (2ac + 2bc) + c^2$$

問題 分解下式之因數： (山東會考)

$$1 - (3p+q)^2$$

解 $1 - (3p+q)^2$

$$= 1^2 - (3p+q)^2$$

$$= (1+3p+q)(1-3p-q)$$

要點 二式平方之差，可依下式分解之：

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

類題 分解下列各式之因數：

$$1. (ac-bd)^2 - (bc-ad)^2$$

(山西會考)

$$2. ax^2 - 4a + 3x^2 - 12$$

(浦東中學)

暗示：先行分類分析。

$$3. x(a-b)^2 - x(c-d)^2$$

$$4. 9(m-n)^2 - 4(m+n)^2$$

問題 求 $a^4 - b^4$ 之因數。 (河北會考)

(綏遠會考)

解 $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

$$= (a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$$

要點 二式平方之和 (如 $a^2 + b^2$)，不能分解因數。

類題 分解下列各式之因數：

$$1. x^8 - y^8 \quad (\text{南京女中})$$

$$2. a^4 - 81 \quad (\text{山西會考})$$

$$3. 16x^5 - x \quad (\text{上海會考})$$

$$4. 2a^5b - 2ab^5 \quad (\text{廣州會考})$$

$$5. 48x^5 + 32x^4y - 3xy^4 - 2y^5$$

(徐州女中)

暗示：先行分類分析。

$$6. a^2(b-c) + b^2(c-a) \quad (\text{湖北會考})$$

問題 試分解 $x^2+y^2-4z^2+2xy$ 的因式。

(山東會考)

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= (x^2+2xy+y^2)-4z^2 \\ &= (x+y)^2-(2z)^2 \\ &= (x+y+2z)(x+y-2z)\end{aligned}$$

要點 凡四項式有三項爲完全平方者，可觀察其是否能化爲平方之差。

類題 分解下列各式之因式：

1. $x^2+4xy+4y^2-4$ (四川會考)
2. $2xy-x^2-y^2+z^2$ (上海會考)
3. $2ab+1-a^2-b^2$
4. $4ab-a^2-4b^2+c^2$
5. $x^4+(2-m^2)x^2y^2+y^4$

暗示：先去括號而加以觀察。

問題 分解下式爲質因式： (北平會考)

$$2ac+2bd-a^2+b^2-c^2+d^2$$

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= b^2+2bd+d^2-(a^2-2ac+c^2) \\ &= (b+d)^2-(a-c)^2 \\ &= (b+d+a-c)(b+d-a+c)\end{aligned}$$

要點 凡六項式有四項爲完全平方者，可觀察其是否能化爲平方之差。

類題 分解下列各式之因數：

1. $a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2$
2. $x^2-y^2+4x-2y+4-1$
3. $2xy-x^2-y^2+a^2+b^2-2ab$

(上海會考)

$$4. 9a^2-x^2-16d^2-8dx-6a+1$$

問題 分解 $8x^3+27y^3$ (松江女中)

$$\begin{aligned}\text{解 } 8x^3+27y^3 &= (2x)^3+(3y)^3 \\ &= (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)\end{aligned}$$

要點 二式立方之和,可依下式分解之:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

類題 分解下列各式之因數:

1. x^3+1
2. x^3+a^3
3. a^3+27
4. $3x^4y+81xy^4$
5. $\frac{x^3}{8}+\frac{y^3}{125}$

問題 求 $8a^3-b^3$ 的因子。(浙江會考)

$$\begin{aligned}\text{解 } 8a^3-b^3 &= (2a)^3-b^3 \\ &= (2a-b)(4a^2+2ab+b^2)\end{aligned}$$

要點 二式立方之差,可依下式分解之:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

類題 分解下列各式之因數:

1. x^3-125 (上海會考)
2. $8a^3b^3c^3-1$ (江蘇會考)
3. $27x^3-8$ (上海會考)
4. $(x^2+1)^3-(y^2-1)^3$ (鹽城中學)
5. $(a+b)^3-8b^3$ (東海中學)
6. x^3-x-y^3+y (松江女中)

問題 分解下式之因數： (貴州會考)

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

解 $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$$= x^3 + 3(x)^2(3) + 3(x)(3)^2 + 3^3$$

$$= (x+3)^3$$

要點 凡四項式之首末二項爲完全立方者，
可觀察其是否爲二項式之立方。

$$\text{公式： } a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

類題 分解下列各式之因數：

1. $8x^3 + 12a^2 + 6x + 1$

2. $27a^3 + 27a^2 + 9a + 1$

問題 分解下式之因數：

$$a^3 - 6a^2 + 12a - 8$$

解 $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$

$$= (a)^3 - 3(a)^2(2) + 3(a)(2)^2 - (2)^3$$

$$= (a-2)^3$$

要點 凡四項式之首末二項爲完全立方，而
各項之號又正負相間者，可觀察其是否爲
二式差之立方。

$$\text{公式： } a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

類題 分解下列各式之因數：

1. $a^3x^3 - 3a^2x^2y^2 + 3axy^4 - y^6$

2. $64a^3 - 144a^2b + 108ab^2 - 27b^3$

問題 分解 $x^2+7x+12$ 之因數:

解 $7=3+4, 12=3\times 4$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+7x+12 \\ &=x^2+(3+4)x+3\times 4 \\ &=(x+3)(x+4)\end{aligned}$$

要點 首項係數為 1 之二次三項式，分解因數時，當將末項分解為二因數，使其和恰等於第二項之係數。

倘第二項為正，則兩因數俱用正號；第二項為負，則兩因數俱用負號。

公式：

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$$

類題 1. 分解 $x^2+5bx+6b^2$

2. 分解 $x^2-9x+20$

問題 求 $x^2+13x-140$ 之因數。

(河北會考)

解 $13=20-7, -140=20\times(-7)$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+13x-140 \\ &=x^2+(20-7)x+20\times(-7) \\ &=(x+20)(x-7)\end{aligned}$$

要點 將末項分解為二因數，一正一負，其代數和恰等於第二項之係數。

倘第二項為正，則絕對值大之因數用正號；若第二項為負，則絕對值大之因數用負號。

類題 分解下列二式之因數：

1. x^2-x-56 (松江女中)

2. $x^2+13x-48$ (山東八中)

問題 分解 $2x^2+7x+3$ (河北七中)

解 $\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \quad 1 \times 1 + 3 \times 2 = 7$

$$\therefore 2x^2+7x+3 \\ = (x+3)(2x+1)$$

要點 二次三項式首末兩項各分解為二因數，其交叉相乘積之和恰等於第二項之係數者，可依下式分解之。

$$ax^2 + (bc+ad)x + bd = (ax+b)(cx+d)$$

$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ c \quad d \end{array} \quad x \text{ 之係數為 } ad+bc$

類題 分解下列二式之因數：

1. $16a^2+42a+27$

2. $16a^2+43a+27$

問題 分解 $6x^2-19x+15$ (廣州會考)

解 $\begin{array}{c} 2 \quad -3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad -5 \end{array} \quad 2 \times (-5) + 3 \times (-3) \\ = -19$

$$\therefore 6x^2-19x+15 \\ = (2x-3)(3x-5)$$

要點 $\begin{array}{c} a \quad -b \\ \diagdown \quad \diagup \\ c \quad -d \end{array} \quad x \text{ 之係數為 } -(ad+bc)$
二因數為 $(ax-b)(cx-d)$

類題 分解下列各式之因數：

1. $14x^2-37x+15$

2. $4x^2-19x+15$

3. $16x^2-62xy+27y^2$

4. $16x^2-218xy+27y^2$