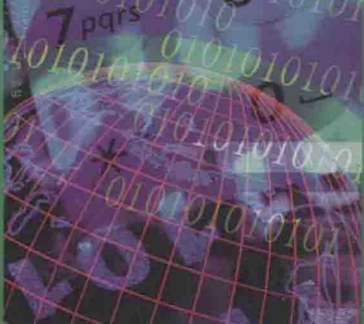
AOLINPIKE JINGSAI JINPAI CONGSHU

CHUZHONG SHUXUE

奥林匹克竞赛金牌丛书

初中数学



北京工业大学出版社

奥林匹克竞赛金牌丛书

初中数学

主编 唐立华

编著 周建新 唐立华 曾劲松

北京工业大学出版社

图书在版编目(C I P)数据

奥林匹克竞赛金牌丛书. 初中数学/唐立华主编.
—北京:北京工业大学出版社,2002.10
ISBN 7-5639-1170-7

Ⅰ.奥... Ⅱ.唐... Ⅲ.数学课-初中-教学参考
资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 075566 号

奥林匹克竞赛金牌丛书
初 中 数 学
唐立华 主编
*
北京工业大学出版社出版发行
邮编:100022 电话:(010)67392308
各地新华书店经销
华星印刷厂印刷
*
2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷
850mm×1168mm 大 32 开本 14 印张 315 千字
印数:1~5000 册
ISBN 7-5639-1170-7/G·656
定价:18.50 元

作者简介

唐立华，长沙市一中特级教师。中国数学奥林匹克高级教练员。教学教研业绩突出，曾荣获第五届“苏步青数学教育奖”一等奖、“湖南省神箭英才导师奖”、“中国科协 2000 年国际学科竞赛突出贡献奖”、“湖南省优秀教师”等多项表彰和奖励。所教学生先后有 6 人 7 次入选全国中学生数学冬令营，4 人入选国家集训队，其中刘志鹏同学获第 41 届 IMO 金牌。在国内、国外数学期刊发表学术、专题论文 60 余篇，其中 4 篇被《美国数学评论》摘评，1 篇上 SCI。

周建新，长沙市一中高级教师。数学教研组长。教学业绩突出，曾荣获“湖南省神箭英才导师奖”。所教学生先后有 6 人入选全国中学生数学冬令营，3 人入选国家集训队，其中张志强同学获第 42 届 IMO 金牌。

曾劲松，长沙市一中一级教师。学校青年骨干教师。在数学教学和数学奥林匹克训练等方面成绩显著，是中国数学奥林匹克一级教练员，第十届“希望杯”全国数学邀请赛“数学竞赛优秀辅导员”。多篇教研论文获得省市一等奖。参加编写竞赛教材多本。

前言

为了帮助求知欲旺盛的中学生，在牢固掌握课内知识的基础上，拓宽知识领域，增长实验技能，提高解决问题的能力，参加初中各级理科竞赛，我们特编写了这套《奥林匹克竞赛金牌丛书》。丛书由初中数学、物理、化学和生物四本书组成。丛书体例统一，根据全国竞赛纲要要求，分为知识要点、典型例析、能力训练三部分，并在书后附有习题答案及解题简要提示，以方便使用。

丛书具有鲜明的风格和特点。第一，普及提高相结合。内容的起点低，落点高，难易搭配，由浅入深，极为适应初中学生从本年级的学习内容起步，逐步提高，一直可以提高到国家级竞赛的水平。这既可以满足各级竞赛的要求，又有助于巩固初中知识。第二，内容全面，结构合理。各书依照学科特点、难点，精辟地阐述了解题的思路、方法，翔实地汇集了我国近年来奥林匹克竞赛中典型的、有代表性的资料。第三，适用性强。本丛书由于集论述、示范、供题于一体，故既可做各级竞赛的教材，也可做常规教学的辅导资料。由于本书能有效地帮助读者理清思路、发挥想象、举一反三，所以它是初中学生自学和提高知识的辅助读物。

本丛书的作者均系湖南省长沙市第一中学的教师，其中有特级教师、全国模范教师、省优秀教师和省先进教育工作者、省十佳青年。他们忠诚于教育事业，荣获过各级奖励和荣誉称号，在全省乃至全国的学科竞赛中都有一定影响。作者们长期在第一线从事学科教学和竞赛的培训工作，他们广泛涉猎，潜心研究，勇敢探索，具体指导，对竞赛内容、发展趋势胸有成竹，对学生的全面素质培养、学习方法改进、竞赛心理调节都指导有方。湖南省长沙市第一中学的学生近十年来在奥林匹克竞赛中成绩辉煌，在全国各科竞

赛中多次名列前茅。至 2002 年止，在国际学科竞赛中，已获得十三金、八银、二铜，共二十三枚奖牌，且在国际学科竞赛的数学、物理、化学、生物和信息五科中均获得过金牌奖。正因为园丁们的辛勤耕耘，才有这累累硕果，正因为作者们的呕心沥血，才有了这套丛书。

本丛书在编写过程中，得到许多专家、教授的支持和指点，在此一并致谢。由于时间仓促，本书肯定有不当之处，敬请广大读者指正。

编　者

2002.9

目　录

第一讲　因式分解

一　知识要点

多项式的因式分解是代数恒等变形的基本技巧,是初中数学竞赛的重要内容之一.因式分解方法灵活,技巧性强,应用广泛,在代数、三角、几何的解题与证明中有着重要的作用.

1. 因式分解

(1)定义　把一个多项式表示成几个整式乘积的形式,叫做多项式的因式分解.

(2)方法　①提取公因式法;②公式法;③分组分解法;④十字相乘法;⑤拆项与添项;⑥换元法;⑦待定系数法.

2. 因式分解常用公式

(1)$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

(2)$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;

(3)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

(4)$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$;

(5)$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$;

(6)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

3. 因式定理

(1)因式定理　若 a 是一元多项式 $f(x)$ 的一个根,即 $f(a)=0$,则 $x-a$ 是多项式 $f(x)$ 的一个因式.反之亦然.

由因式定理,可将一元多项式的因式分解转化为求 $f(x)=0$

的根.而确定整系数多项式的有理根,有如下的定理.

(2)有理根定理　若 $x_0=\dfrac{q}{p}$(p,q 互质,$p,q\in\mathbf{Z}$)是整系数多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的根,则必有 $p\mid a_0,q\mid a_n$.

二　典型例题

例1　分解因式:

(1)$x^3+9x^2+26x+24$;

(2)$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

解:(1)方法一:

$$\begin{aligned}原式&=(x^3+2x^2)+(7x^2+14x)+(12x+24)\\&=x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2)\\&=(x+2)(x^2+7x+12)\\&=(x+2)(x+3)(x+4).\end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned}原式&=(x^3+8)+(9x^2+26x+16)\\&=(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(9x+8)\\&=(x+2)(x^2+7x+12)\\&=(x+2)(x+3)(x+4).\end{aligned}$$

方法三:

5x　6

$$\begin{aligned}原式&=(x^3+5x^2+6x)+4(x^2+20x+24)\\&=x(x^2+5x+6)+4(x^2+5x+6)\\&=(x+4)(x+2)(x+3).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}原式&=4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2)\\&=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\\&=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)\end{aligned}$$

$=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$

说明:本例中的两个因式分解问题均应用了拆项后分组分解或用平方差公式来分解的技巧.

例 2 分解因式:

(1) $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$;

(2) x^5+x+1.

解:(1)注意到 $(b+c)-(a+b)=c-a$,有

原式 $=bc(b+c)+ca[(b+c)-(a+b)]-ab(a+b)$

$=c(b+c)(b+a)-a(a+b)(c+b)$

$=(a+b)(b+c)(c-a).$

(2)原式 $=x^5-x^2+(x^2+x+1)$

$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$

例 3 求证:$2222^{5555}+5555^{2222}$能被 7 整除.

分析:要证明原式被 7 整除,即说明原式含有因数 7.由于 $2222=317\times7+3$,$5555=793\times7+4$,所以

$7|(2222+4)$, $7|(5555-4)$

或 $7|(2222-3)$, $7|(5555+3)$.

因此添加 $4^{5555}-4^{5555}+4^{2222}-4^{2222}$或添加 $3^{5555}-3^{5555}+3^{2222}-3^{2222}$.而 5555^{2222}是偶次幂,故由 $5555^{2222}+3^{2222}$得不出 $5555+3$ 的因子,只能选用第一种情形的添数办法.

解:$2222^{5555}+5555^{2222}$

$=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222})$

$=(2222+4)M+(5555-4)N-4^{2222}(4^{3333}-1)$

$=7\times318M+7\times793N-4^{2222}(64^{1111}-1)$

$=7(318M+793N-4^{2222}\times9P).$

其中 $M=2222^{5554}-2222^{5553}\times 4+\cdots-2222\times 4^{5553}+4^{5554}$;

$N=5555^{2221}+5555^{2220}\times 4+\cdots+4^{2221}$;

$P=64^{1110}+64^{1109}+\cdots+1$.

故原题得证.

说明:本题应用了公式:

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})(n\in\mathbf{N})$,

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}b+b^{n-1})$($n$ 为正奇数).

例 4 分解因式:

(1)$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$;

(2)$(x^2+4x+8)^2+3x^3+14x^2+24x$.

分析:直接展开较繁,可考虑用换元法.注意到 (x^2+x+1) 与(x^2+x+2)的平均值为 $x^2+x+\frac{3}{2}$,可设此式为 y.

解:(1)设 $y=\dfrac{(x^2+x+1)+(x^2+x+2)}{2}=x^2+x+\dfrac{3}{2}$,则

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=(y-\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})-12\\
&=y^2-\frac{1}{4}-12\\
&=y^2-\frac{49}{4}\\
&=(y+\frac{7}{2})(y-\frac{7}{2})\\
&=(x^2+x+5)(x^2+x-2)\\
&=(x^2+x+5)(x+2)(x-1).
\end{aligned}$$

(2)设 $u=x^2+4x+8$,则

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=u^2+3x\cdot u+2x^2\\
&=(u+x)(u+2x)\\
&=(x^2+5x+8)(x^2+6x+8)
\end{aligned}$$

$$=(x^2+5x+8)(x+2)(x+4).$$

说明:1°. 如无特殊说明,均指在有理数范围内进行因式分解. 如 x^2+3x-2 在有理数范围内不能再分解,但在实数范围内可分解为

$$x^2+3x-2=(x+\frac{3-\sqrt{17}}{2})(x+\frac{3+\sqrt{17}}{2}).$$

2°. 换元法通常能使原式降次、整式化、有理化等,化繁为简,化难为易,使解题途径更清晰.

例 5 分解因式:

(1) $2x^4-x^3-6x^2-x+2$;

(2) $(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$.

分析:(1)中 x 的系数关于 x^2 对称,可先提出 x^2,再作代换,即 $y=x+\frac{1}{x}$. (2)中则可将 $x+y$ 与 xy 分别看作一个整体来处理,可作代换 $x+y=a$, $xy=b$.

解:(1)令 $y=x+\frac{1}{x}$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^2(2x^2-x-6-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})\\&=x^2[2(x^2+\frac{1}{x^2})-(x+\frac{1}{x})-6]\\&=x^2(2y^2-y-10)\\&=x^2(2y-5)(y+2)\\&=(2x-1)(x-2)(x+1)^2.\end{aligned}$$

(2)令 $a=x+y$, $b=xy$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(b-1)^2+(a-2)(a-2b)\\&=(b-1)^2+a^2-2a-2ab+4b\\&=(b+1)^2-2a(b+1)+a^2\\&=(b+1-a)^2\end{aligned}$$

$=(xy+1-x-y)^2$

$=(x-1)^2(y-1)^2.$

例 6 分解因式:

(1) $x^4+y^4+(x+y)^4$;

(2) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.

解:(1)令 $x+y=u, xy=v$.

$$\begin{aligned}\because\quad x^4+y^4&=(x+y)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3\\&=(x+y)^4-4xy(x^2+y^2)-6x^2y^2\\&=(x+y)^4-4xy[(x+y)^2-2xy]-6x^2y^2\\&=u^4-4v(u^2-2v)-6v^2\\&=u^4-4u^2v+2v^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 原式&=u^4-4u^2v+2v^2+u^4\\&=2(u^4-2u^2v+v^2)\\&=2(u^2-v)^2\\&=2(x^2+xy+y^2)^2.\end{aligned}$$

(2) $\because\quad n(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$,

令 $n^2+3n+1=x$,则

原式 $=(x-1)(x+1)+1$

$=x^2=(n^2+3n+1)^2.$

例 7 分解因式:

(1) x^4-2x^2+3x-2;

(2) $2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20$.

分析:1°. 对 x 的 4 次多项式,先假定其能分解成关于 x 的二次式之积 $(x^2+mx+1)(x^2+nx-2)$ 或 $(x^2+mx-1)(x^2+nx+2)$. 当列出关于待定系数 m,n 的方程组时,发现第二种情形不可能出现.

2°. 由于 $2x^2+3xy-9y^2=(x+3y)(2x-3y)$,可知已知多项

式必可分解为$(x+3y+m)(2x-3y+n)$的形式,再求出待定系数m,n即可.

解:(1)设原式能分解为$(x^2+mx+1)(x^2+nx-2)$,则

$$x^4-2x^2+3x-2=x^4+(m+n)x^3+(mn-1)x^2+(n-2m)x-2.$$

$$\therefore\quad \begin{cases}m+n=0\\ mn-1=-2\\ n-2m=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-1,\\ n=1.\end{cases}$$

$\therefore$ 原式$=(x^2-x+1)(x^2+x-2)$

$=(x^2-x+1)(x+2)(x-1)$.

(2)$\because$ 原式$=(x+3y)(2x-3y)+14x-3y+20$,

$\therefore$ 令原式$=(x+3y+m)(2x-3y+n)$,

即$2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20$

$=(x+3y+m)(2x-3y+n)$.

由于上式对任意的x,y均成立,故令$x=y=0$得$mn=20$,再令$x=1,y=0$得$(m+1)(n+2)=36$,由此解得$m=5,n=4$,从而

原式$=(x+3y+5)(2x-3y+4)$.

另解: $2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20$

$=2x^2+(3y+14)x-9y^2-3y+20$

$=2x^2+(3y+14)x-(3y-4)(3y+5)$

$=(2x-3y+4)(x+3y+5)$.

说明:待定系数法是运用方程方法去解决问题的一种具体体现,在解题时必须注意以下两个问题:(1)用待定系数法求解的题,必须是所求的未知式的基本形式已定,只须确定未知式中的几个未知的系数而已.(2)待定系数有几个,就须列几个方程,当方程个数多于未知数的个数时,多余方程可供检验用.如若相互矛盾,则表明原式不能因式分解.

例8 分解$x^8+98x^4y^4+y^8$为两个整系数的四次多项式的乘