"十二五"规划教材

电子科技大学研究生系列教材建设项目

数学物理方程（第二版）

SHUXUE WULI FANGCHENG

主编　李明奇　田太心

电子科技大学出版社

数学物理方程（第二版）

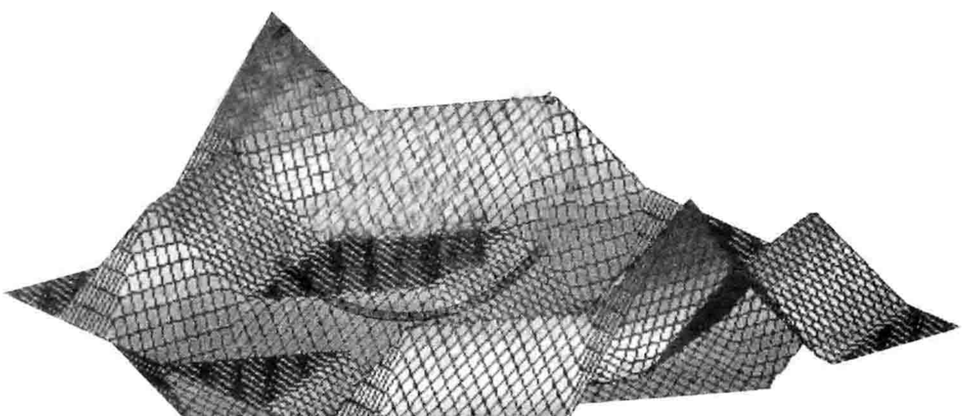
“十二五”规划

电子科技大学研究生

数学物理方程（第二版）

SHUXUE WULI FANGCHENG

主编　李明奇　田太心



电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程 / 李明奇，田太心主编. -- 2 版. --
成都：电子科技大学出版社，2014.8
ISBN 978-7-5647-2597-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李… ②田… Ⅲ. ①数学物理方程
Ⅳ. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 195384 号

内 容 提 要

全书主要介绍了数学物理方程的三类典型的二阶线性偏微分方程定解问题的常用解法：分离变量法、行波法、积分变换法、Green 函数法、保角变换法、变分法与非线性方程典型解法等。对于平面 Poisson 方程边值问题的 Green 函数法有较详细介绍。本书还介绍非线性数学物理方程的典型解法和两类特殊函数：Bessel 函数及 Legendre 多项式。第二版修改了第一版部分叙述和存在的问题。

本书可以作为高等学校研究生数学物理方程课程的教材，也可以作为高年级本科生及其他有关人员的参考书。

数学物理方程（第二版）

主编 李明奇 田太心

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：徐守铭
责任编辑：陈松明　徐守铭
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：四川川印印刷有限公司
成品尺寸：185 mm × 260 mm　印张 17.5　字数 450 千字
版　　次：2014 年 8 月第二版
印　　次：2014 年 8 月第六次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-2597-6
定　　价：36.00 元

前　言

本书主要介绍了数学物理方程的一些基本概念及定解问题的一些常用解法：分离变量法、行波法、积分变换法、Green 函数法、保角变换法、变分法及非线性方程典型解法等. 同时，还介绍了典型非线性方程的行波解、Hopf-Cole 变换、Hirota 方法、逆散射方法、Bäcklund 变换. 另外，本书还讨论了两类特殊函数：Bessel 函数、Legendre 多项式，以及利用这两种特殊函数来解决数学物理中的一些定解问题.

不论是数学物理方程，还是特殊函数，其内容都是极其丰富的. 本书采用以数学物理方程的常用解法为安排内容的线索，在各种解法中着眼于“形式解”，并仅对部分典型定解问题的适定性进行讨论以简化内容. 本书在内容上既兼顾经典理论与解法，又结合电子类专业的特殊性. 例如，例题和习题选用了大量的诸如高频传输线、电磁场等的题目，并在安排上力求通俗易懂. 目的是使理工科院校高年级相关专业本科生和工科研究生，通过本教材既能学到求解数理方程的基本方法，又注意与专业的相应联系，能为后继专业课和工程应用提供基本理论和处理方法.

本书的第二版修改了第一版的部分叙述和存在的问题，简化了一些问题的求解过程. 增加了部分过程推导，如第 2.4 节在变换的代入中的链式法则求导过程. 对部分例题，细化了推导便于学生自学，如第 2.4 节的例 2，第 9.2 节中的例题. 重新叙述了平面有界区域上的 Green 公式.

本书中部分简述的问题将在同步学习指导书中进行更深入的描述. 该同步学习指导书也是多年前在研究生院支持下规划的课程建设内容.

本书的第一版已在本科与研究生数学物理方程与特殊函数课程教学中使用多年，并经长期从事此门课程教学的杨华军教授、刘志旺教授、何浩法副教授审定. 在本教材的教学实践中，黄晋教授、蒋泽云教授、钟尔杰副教授、杨春副教授、王颖副教授、邓志亮副教授、李春和副教授、何国良副教授和覃思义副教授提出了许多建设性修改意见. 在编写和出版过程中还得到了电子科技大学数学科学学院黄廷祝教授、谢云荪教授的指导和支持，得到了电子科技大学研究生院在课程教学改革与研究方面的大力支持，编者对此深表谢意. 由于编者水平有限，谬误之处在所难免，恳请读者给予批评、指正.

编　者

2014 年 8 月于电子科技大学

目　录

第一章 绪 论

本章主要总结了在数学物理方程中常用的一些数学与物理基础知识：常微分方程与积分方程基础、基本积分公式、场论基本概念及常用物理规律. 数学物理方程主要讨论波动方程、热传导方程、Poisson 方程等相应的定解问题建立及求解方法. 这三类基本方程分别属于二阶线性偏微分方程中的双曲型、抛物型、椭圆型偏微分方程. 偏微分方程是多元函数微分方程，其求解过程会出现许多常微分方程求解问题. 为此，本章总结了几类常用的常微分方程解法及几类特殊的常微分方程. 同时，对于那些不能求解的方程，还介绍了微分方程定性分析基础：方程解的稳定与不稳定性. 另外，对数学物理方程的建立与求解过程中非常重要的三个基本积分公式：Green 公式、Strokes 公式、Gauss 公式，场论中的两个重要物理量：散度和旋度，以及描述向量场规律的 Helmholtz 定理都做了简单介绍. 为了运算方便，第四节给出了一些常用算符，可以简化数理方程求解过程的推导. 最后一节中，给出了一些常用的物理规律，方便后续章节泛定方程的建立.

1.1 常微分方程基础

这一节主要讨论几类特殊常微分方程的解法：一阶微分方程、二阶非齐次方程、可降阶二阶微分方程、Euler 方程、Bessel 方程及 Legendre 方程. 在微分方程解的理论分析中，给出了方程解的稳定与不稳定性的概念.

定义1 含有未知函数的各阶（偏）导数或微分的函数方程称为微分方程. 若未知函数为一元函数，则该微分方程称为常微分方程；若未知函数为多元函数，则称为偏微分方程.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶（偏）导数的阶数称为微分方程的阶. 满足微分方程的函数称为微分方程的解. 如果常微分方程的解含有的任意常数的个数与方程的阶数相同，这样的解称为常微分方程的通解. 取定通解中的任意常数后得到的解称为常微分方程的特解. 偏微分方程也有通解，与常微分方程通解不同偏微分方程通解会出现任意函数.

微分方程分类可以按阶数分为一阶微分方程与高阶微分方程；也可以按未知函数及其（偏）导函数的次数分为线性微分方程与非线性微分方程.

一、一阶常微分方程

一阶常微分方程典则形式与对称形式分别为

$$y' = f(x, y),\ p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.1.1}$$

在一阶微分方程中有几种特殊的一阶微分方程：可分离变量的一阶微分方程、齐次方程、一阶线性微分方程、Bernoulli 方程.

1. 可分离变量的一阶微分方程

可分离变量的一阶微分方程的基本形式为

$$f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y. \tag{1.1.2}$$

对方程两边同时作不定积分即得

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(y)\mathrm{d}y. \tag{1.1.3}$$

2. 齐次方程

齐次方程的基本形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.1.4}$$

只要引入函数变换 $u = y/x$，代入方程，即得

$$u + xu' = f(u). \tag{1.1.5}$$

移项后由分离变量法解之.

3. 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的基本形式为

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{1.1.6}$$

常数变易法是求解这类方程的常用方法，但是步骤较繁琐. 若采用积分因子法，求解这类方程有时会更简洁. 在方程（1.1.6）两边同时乘以因子 $\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)$，得

$$\left(y\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right)' = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

方程两边同时积分后得

$$y\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} = \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c.$$

整理得

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right).$$

这与常数变易法所得结果相同.

4. Bernoulli 方程

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1. \tag{1.1.7}$$

引入函数变换 $u = y^{1-n}$，方程变为

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x). \tag{1.1.8}$$

这是一个关于函数 $u(x)$ 的一阶线性微分方程，由上面解法即得.

二、高阶微分方程

形式为 $y^{(n)} = f(x)$ 的高阶常微分方程是最简单的高阶微分方程之一，经 n 次积分后即可得解. 下面讨论几类常见的高阶微分方程.

1. 可降阶的二阶微分方程

下面，讨论两个二阶方程：

$$y'' = f(x, y'), \quad y'' = f(y, y').$$

对于方程 $y'' = f(x, y')$，引入函数变换 $p(x) = y'$，方程即可降为一阶方程：

$$p' = f(x, p).$$

对于方程 $y''=f(y,y')$，如果继续引入函数变换 $p(x)=y'$，则

$$p'=f(y,p).$$

这时，方程中出现两个未知函数 $p(x)$ 和 $y(x)$. 所以，引入函数变换 $p(x)=y'$ 对该方程的求解不合适. 若引入函数变换 $p(y)=y'$，方程降为关于未知函数 p 的一阶方程

$$pp'=f(y,p)$$

其中，y 是未知函数 p 的自变量.

2. n 阶常系数齐次线性微分方程

在高阶微分方程中，线性微分方程是非常重要的一类，分为齐次线性微分方程与非齐次线性微分方程. 根据系数，线性微分方程还可以分为常系数线性微分方程与非常系数线性微分方程. 齐次线性微分方程的解具有加法与数乘的封闭性，构成了一个向量空间，称为解空间. 非齐次线性微分方程的通解可以表示为齐通解与一个特解之和. 设 n 阶齐次线性微分方程为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0.$$

记 D 为微分算子：$\mathrm{D}y=y'(x)$. 令 $\mathrm{L}=\mathrm{D}^n+a_1(x)\mathrm{D}^{n-1}+a_2(x)\mathrm{D}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}(x)\mathrm{D}+a_n(x)$，则 n 阶常系数齐次线性微分方程的算子形式：

$$\mathrm{L}y=0.$$

定理 1 $\mathrm{L}y=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$ 的特解可以通过方程 $\mathrm{L}y=f_i(x),\ i=1,\ \cdots,\ n$ 的特解之和求得.

当 $a_i(x)$ 为常数时，常系数齐次线性微分方程的 n 维解空间的基元素可以通过其特征方程得到. 设方程有形式解 $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$，代入方程后，可以得到方程对应的特征方程：

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

定理 2 n 阶常系数齐次线性微分方程的通解为

（1）特征方程有 n 个不同的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $y=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{e}^{\lambda_i x}$，$c_i$ 为任意常数；

（2）特征方程有 r 个不同的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，其重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_r$，$\sum_{k=1}^{r}n_k=n$，则

$$y=\sum_{i=1}^{r}(c_{i,0}+c_{i,1}x+\cdots+c_{i,(n_i-1)}x^{n_i-1})\mathrm{e}^{\lambda_i x}$$

其中，$c_{i,j}$ 为任意常数.

（3）若 $a_i(x)\in R$，特征方程有 r 个不同的复根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$（$\lambda_k=\alpha_k\pm\beta_k\mathrm{j}$），其重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_r$，所有复根重数之和为 n，则

$$y=\sum_{i=1}^{r}(c_{i,0}+c_{i,1}x+\cdots+c_{i,(n_i-1)}x^{n_i-1})\mathrm{e}^{\alpha_i x}\sin\beta_i x+\sum_{i=1}^{r}(d_{i,0}+d_{i,1}x+\cdots+d_{i,(n_i-1)}x^{n_i-1})\mathrm{e}^{\alpha_i x}\cos\beta_i x$$

其中，$c_{i,j}$，$d_{i,j}$ 为任意常数.

定理 2 的（3）说明，对于实系数方程，只要从复特征根得到的特解中取出其实部与虚部即得方程的线性无关特解，从而得到方程的实通解.

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

由于非齐次线性微分方程的通解是齐通解与一个特解之和，所以非齐次线性微分方程的特解的求法很重要.

定理3 设λ_0为$y''+py'+qy=p_m(x)e^{\lambda_0 x}$对应的齐次方程的$i\,(i=0,\ 1,\ 2)$重根，其中，$\lambda_0$为常数，$p_m(x)$是$m$次多项式. 则存在$m$次多项式$q_m(x)$使非齐次方程有如下形式的特解：

$$y=x^i q_m(x)e^{\lambda_0 x}.$$

定理4 $p_m(x)$与$p_n(x)$分别是$m,\ n$次多项式，λ_0与$\omega_0(\omega_0\neq 0)$为常数，则非齐次方程

$$y''+py'+qy=e^{\lambda_0 x}[p_m(x)\cos\omega_0 x+p_n(x)\sin\omega_0 x]$$

的特解为

$$y=x^k e^{\lambda_0 x}[p_h(x)\cos\omega_0 x+q_h(x)\sin\omega_0 x]$$

其中，$q_h(x)$和$p_h(x)$都是h次多项式，$h=\max\{m,\ n\}$. 若$\lambda_0+j\omega_0$为对应的齐次方程的特征方程的根，则$k=1$，否则$k=0$.

下面，采用参数变易法求一般的二阶常系数非齐次线性微分方程特解：

$$y''+py'+qy=f(x).$$

设$y_1(x),\ y_2(x)$是相应的齐次方程$y''+py'+qy=0$的线性无关的特解，则

（1）非齐次方程的通解是相应齐次方程的通解$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$与非齐次方程的特解之和.

（2）常数变易法. 由于非齐次线性微分方程与齐次线性微分方程形式的相似性，可以猜想非齐次线性微分方程也有一个与齐通解相似的特解. 将c_1变为$u(x)$, c_2变为$v(x)$.

于是，可设非齐次线性微分方程有一个特解具有下述形式

$$y(x)=u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x)$$

其中，函数$u(x)$与$v(x)$待定. 为了将$y(x)=u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x)$代入方程，首先需要求出一阶和二阶导数. 于是，

$$y'=(uy_1'+vy_2')+(u'y_1+v'y_2).$$

为了缩小寻找$u(x)$，$v(x)$的范围，让上式第二项为零，得到关于函数$u(x)$与$v(x)$的一个约束，$u'y_1+v'y_2=0$. 则

$$y'=uy_1'+vy_2',\quad y''=(uy_1'+vy_2')'$$

利用$y_1(x),\ y_2(x)$是齐次方程的解，将上式代入原方程即有

$$u'y_1'+v'y_2'=f(x)$$

于是，得到方程组

$$\begin{cases}u'y_1+v'y_2=0\\ u'y_1'+v'y_2'=f(x)\end{cases}$$

解得

$$u'(x)=-\frac{y_2 f(x)}{\Delta(y_1,\ y_2)},\ v'(x)=\frac{y_1 f(x)}{\Delta(y_1,\ y_2)}$$

其中，$\Delta(y_1,\ y_2)=y_2'y_1-y_2y_1'$，也称为 Wronsky 行列式. 于是，

$$u(x)=-\int_0^x\frac{y_2 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}d\xi+C_1,\quad v(x)=\int_0^x\frac{y_1 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}d\xi+C_2.$$

因此，可以得到定理 5.

定理 5 二阶非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

的特解为

$$y=-y_1\int_0^x\frac{y_2f(\xi)}{\Delta(y_1, y_2)}\mathrm{d}\xi+y_2\int_0^x\frac{y_1f(\xi)}{\Delta(y_1, y_2)}\mathrm{d}\xi .$$

通解为

$$y=-y_1\int_0^x\frac{y_2f(\xi)}{\Delta(y_1, y_2)}\mathrm{d}\xi+y_2\int_0^x\frac{y_1f(\xi)}{\Delta(y_1, y_2)}\mathrm{d}\xi+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)，\quad \Delta(y_1, y_2)=y_2'y_1-y_2y_1'$$

其中，$y_1(x), y_2(x)$ 是相应的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的线性无关特解.

例 1 求解关于函数 $T_n(t)$ 的常微分方程初值问题：

$$\begin{cases}T_n''(t)+\gamma^2T_n(t)=f_n(t),\ \gamma=\dfrac{n\pi a}{l} \\ T_n(0)=0,\ T_n'(0)=0\end{cases}.$$

解：相应的齐次方程 $T_n''(t)+\gamma^2T_n(t)=0$ 的线性无关的特解为 $\cos\gamma t$ 和 $\sin\gamma t$，Wronsky 行列式为

$$\Delta=\cos\gamma t(\sin\gamma t)'-(\cos\gamma t)'\sin\gamma t=\gamma .$$

于是，

$$\begin{aligned}T_n(t)&=-\cos\gamma t\int_0^t\frac{\sin\gamma\tau f_n(\tau)}{\gamma}\mathrm{d}\tau+\sin\gamma t\int_0^t\frac{\cos\gamma\tau f_n(\tau)}{\gamma}\mathrm{d}\tau+c\cos\gamma t+d\sin\gamma t\\&=\frac{1}{\gamma}\int_0^t f_n(\tau)\sin\gamma(t-\tau)\mathrm{d}\tau+c\cos\gamma t+d\sin\gamma t\\&=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\xi)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\xi)\mathrm{d}\xi+c\cos\gamma t+d\sin\gamma t.\end{aligned}$$

由 $T_n(0)=0,\ T_n'(0)=0$，得 $c=d=0$. 因此，

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\xi)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\xi)\mathrm{d}\xi.$$

这个例子的应用将在后面的第 3.5 节出现.

三、Euler 方程

在微分方程中，还经常遇到一类特殊的非常系数非齐次线性微分方程——Euler 方程的求解：

$$p_0x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x).$$

该方程的解法是引入自变量变换 $x=\mathrm{e}^t$，将方程变为常系数非齐次线性微分方程：

$$x^ky^{(k)}(x)=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y(x),$$

$$\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y=f(\mathrm{e}^t)$$

其中，D 为微分算子符号，$\mathrm{D}y=y'(x)$. 这时，方程变为常系数非齐次线性微分方程.

四、Bessel 方程

定义 2 二阶线性微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

称为 ν 阶 Bessel 方程.

定义 3 二阶线性微分方程

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\right)y=0\text{，}m\text{ 为整数}$$

称为半奇数阶 Bessel 方程.

定义 4 二阶线性微分方程

$$x^2y''+xy'-(x^2+v^2)y=0$$

称为虚宗量 Bessel 方程（修正 Bessel 方程）.

定义 5 二阶线性微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n(n-1))y=0$$

称为球 Bessel 方程.

五、Legendre 方程与 Sturm-Liouville 方程

定义 6 二阶线性微分方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0,\ x\in[-1,\ 1]$$

称为 n 阶 Legendre 方程.

定义 7 二阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y(x)=0\text{，}\quad a\leqslant x\leqslant b$$

称为 Sturm–Liouville 方程. 其中 $k(x)$ 称为核函数， $\rho(x)$ 称为权函数， λ 为参数.

六、微分方程解的理论基础

满足一定条件的微分方程求解的问题，称作定解问题. 在定解问题中，最常见的有两种. 一种是初值问题，也称 Cauchy 问题；另一种是边值问题.

定义 8 对于一阶微分方程，称以下问题为 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} y'=f(x,\ y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}.$$

定义 9 对于二阶微分方程，称以下问题为边值问题：

$$\begin{cases} f(x,\ y,\ y',\ y'')=0,\ t\in(\alpha,\ \beta) \\ a_1y(\alpha)+a_2y(\beta)+a_3y'(\alpha)+a_4y'(\beta)=a_5 \end{cases}$$

其中， a_i 为常数.

在微分方程求解过程中，许多微分方程没有通用的求解方法. 谁也不会想到形式简单的 Riccati 方程 $y'=x^2+y^2$ 曾经也让 Leibniz 苦恼. 自从 1686 年，Leibniz 公开承认无法求解. 直到 1838 年，历经 148 年，该问题才由 Liouville 解决. 他证明了该方程无初等函数积分解. 由此可见，微分方程的求解并不容易. 在工程应用中，常常遇到无法具体求解的微分方程. 然而，方程解的动力特性，如解的稳定性、周期性、解对参数的连续依赖性、数值解等，对于系统而言非常重要. 于是，微分方程解的理论分析就变得非常重要了.

在微分方程解的理论分析中，适定性理论、定性理论、稳定性理论等理论与方法是整个微分方程的基础. 关于解的存在性、唯一性、解对参数的连续依赖性等的分析理论，常称为微分方程的适定性理论. 微分方程极限环与周期解的存在性常常是定性理论的研究对象. 微分方程的稳定性理论是微分方程应用的一个重要部分. 下面，给出一阶微分方程 $y'=g(x,\ y)$

的平凡解稳定性定义. 该定义最初由俄国数学力学家 Lyapunov 在 1892 年提出.

定义 10 设 $y=0$ 为方程 $y'=g(x, y)$ 的平凡解，若 $\forall\varepsilon>0,\ x_0\in I,\ \exists\delta(\varepsilon, x_0)>0,\ \forall y_0$，当 $\|y_0\|<\delta(\varepsilon, x_0)$ 时，对 $\forall x>x_0$，有 $\|y(x, x_0, y_0)\|<\varepsilon$，则称解 $y=0$ 稳定.

定义 11 设 $y=0$ 为方程 $y'=g(x, y)$ 的平凡解，若 $\exists\varepsilon_0>0,\ \exists x_0,\ \forall\delta>0,\ \exists y_0$，当 $\|y_0\|<\delta$ 时，$\exists x_1>x_0$，有 $\|y(x_1, x_0, y_0)\|<\varepsilon$，则称解 $y=0$ 不稳定.

Lyapunov 直接法是整个稳定性理论的核心方法，Lyapunov 提出的稳定性定理，渐近稳定性定理及两个不稳定性定理，奠定了运动稳定性的基础，被称为基本定理.

七、简单偏微分方程的求解

偏微分方程的求解在许多情况下需要借助于常微分方程的解法.

例 2 $u=u(x,y)$，求解偏微分方程 $u_{xy}=0$.

解：由 $u_{xy}=0$ 得 $(u_x)_y=0$，说明 u_x 是一个与自变量 y 无关的函数. 于是，

$$u_x=f_1(x)，\quad f_1(x)\text{ 为任意函数.}$$

即有

$$u=\int f_1(x)\mathrm{d}x+g(y)，\quad g(y)\text{ 为任意函数.}$$

由于 $f_1(x)$ 为任意函数，其积分也任意，可设 $f(x)=\int f_1(x)\mathrm{d}x$. 因此，方程 $u_{xy}=0$ 的解为

$$u(x,y)=f(x)+g(y)，\quad f(x),g(y)\text{ 为任意函数.}$$

根据例 2 的方法，大家可以试试方程 $u_{xx}=0,u_{yy}=0$ 的求解.

例 3 $u=u(x,y)$，求解偏微分方程 $u_x=x+y$.

解：由 $u_x=x+y$，得

$$u=\frac{1}{2}x^2+xy+f(y)，\quad f(y)\text{ 为任意函数.}$$

例 4 $u=u(x,y)$，求解偏微分方程 $u_x-u_y=0$.

解：作变换：

$$x=\frac{1}{2}(s+t), y=\frac{1}{2}(s-t),$$

得 $u_t=0$. 于是，$u=f(s)$，$f(s)$ 为任意函数，即

$$u=f(x+y).$$

1.2 积分方程基础

在数学物理应用中，常常遇到下面一类含有未知函数的方程：

$$f(x)=\int_a^b k(x, t)y(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a, b] \tag{1.2.1}$$

$$f(x)=y(x)-\int_a^b k(x, t)y(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a, b] \tag{1.2.2}$$

$$y(x)=\int_a^b k(x, t)f(t, y(t))\mathrm{d}t,\quad x\in[a, b] \tag{1.2.3}$$

$$f(x)=\int_a^b k(x,\ t,\ y(t))\mathrm{d}t,\quad x\in[a,\ b].\tag{1.2.4}$$

定义 1 积分号下含有未知函数的方程称为积分方程. 若方程关于未知函数是线性的，则称之为线性积分方程；否则该积分方程称为非线性积分方程.

定义 2 若未知函数只出现在积分号下，称为第一类线性积分方程；若未知函数不仅出现在积分号下，还出现在其他部分，则称为第二类线性积分方程.

方程（1.2.1）是第一类线性积分方程. 方程（1.2.2）是第二类线性积分方程. 若 $f(x)=0$，则称为齐次方程.

函数 $k(x,\ t)$ 称为积分核. 若 $k(x,\ t)$ 在 $[a,\ b]\times[a,\ b]$ 的定义域内连续，并且不恒为 0，$k(x,\ t)$ 称为连续核. 若 $\int_a^b\int_a^b|k(x,\ t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty$，$k(x,\ t)$ 称为 L^2 一核. 若 $k(x,\ t)=\bar{k}(t,\ x)$，$k(x,\ t)$ 称为 Hermite 核. 若 $k(x,\ t)=k(t,\ x)$，$k(x,\ t)$ 称为对称核. 若 $k(x,\ t)=-k(t,\ x)$，$k(x,\ t)$ 称为斜对称核. 根据积分核，可以对线性积分方程进一步分类.

（1）若积分核 $k(x,\ t)$ 满足 $\int_a^b\int_a^b|k(x,\ t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty$，第一类、第二类线性积分方程称为第一类、第二类 Fredholm 积分方程. 若积分核还满足 $k(x,\ t)\equiv 0$，$x<t$，第一类、第二类 Fredholm 积分方程分别称为第一类、第二类 Volterra 积分方程.

（2）若积分核满足

$$k(x,\ t)=\frac{H(x,\ t)}{|x-t|^{\alpha}}\quad \alpha\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right),\quad H(x,\ t)\text{ 为有界函数},$$

则第一类、第二类线性积分方程分别称为第一类、第二类弱奇异性积分方程.

（3）若积分核满足

$$k(x,\ t)=\frac{H(x,\ t)}{x-t},\quad H(x,\ t)\text{ 可偏导},\quad \int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t\text{ 可积},$$

则第一类、第二类线性积分方程分别称为奇异性积分方程.

定义 3 若含参数 λ 的齐次方程 $y(x)=\lambda\int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t$，在 $\lambda=\lambda_0$ 有非零解，则 λ_0 称为特征值，相应的解为特征函数. 特征函数构成的空间称为线性空间，其维数称为 λ_0 的重数.

对于积分方程 $y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t$ 的求解，可以采用迭代法. 设其初解为 $y_0(x)=f(x)$，代入方程后得

$$y_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y_0(t)\mathrm{d}t=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)f(x)\mathrm{d}t.$$

继续代入原方程得

$$\begin{aligned}y_2(x)&=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y_1(t)\mathrm{d}t\\&=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)f(t)\mathrm{d}t+\lambda^2\int_a^b k(x,\ t)\left(\int_a^b k(t,\ s)f(t)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$$y_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\lambda^m\varphi_m(x),\quad \varphi_0(x)=f(x),\quad \varphi_m(x)=\int_a^b k(x,\ t)\varphi_{m-1}(x)\mathrm{d}t.$$

令 $k_1(x,t)=k(x,\ t)$，$k_m(x,\ t)=\int_a^b k_{m-1}(x,\ \tau)k(\tau,\ t)\mathrm{d}\tau$，则 $\varphi_m(x)=\int_a^b k_m(x,\ t)\varphi_m(x)\mathrm{d}t$. 记