高等学校教材

数学分析简明教程

上册

华东师范大学数学系 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析简明教程

Shuxue Fenxi Jianming Jiaocheng

上 册

华东师范大学数学系 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《数学分析（第四版）》的简明教程。本书分上、下册，上册内容包括实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等，附录有微积分学简史、积分表、常用曲线，书末附有部分习题答案与提示。

简明教程保持了第四版“选材恰当、深入浅出、重点突出、易读易教”的特点，对第四版（上册）的一些内容作了调整和简化，降低了实数理论部分的要求，删去了可积性的第三充要条件。另外，本书有针对性地增加了一些例题，对习题也进行了适当的调整。

本书可作为高等学校数学类专业数学分析的教材和参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析简明教程．上册/华东师范大学数学系编．--北京：高等教育出版社，2014.9
ISBN 978-7-04-040786-0

Ⅰ．①数… Ⅱ．①华… Ⅲ．①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 172079 号

策划编辑	胡　颖	责任编辑	胡　颖	封面设计	张　楠	版式设计	杜微言
插图绘制	宗小梅	责任校对	陈　杨	责任印制	毛斯璐		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	20.75	版　　次	2014 年 9 月第 1 版
字　　数	390 千字	印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	30.40 元

物 料 号　40786-00

前　言

华东师范大学数学系编写的《数学分析》(上、下册)自1980年初版诞生以来,由于在取材、体系、难易程度和可读性等方面均比较切合我国高校数学教学的实际情况,而广受用户欢迎,先后被全国数百所高校选用作为“数学分析”课程的教材。为适应不同阶段的教学,提高教材的适用性,我们不断再版,相继于1990年、2001年和2010年出版了第二、第三和第四版。

不过随着高等教育大众化的到来,高等学校教学改革的深入,无论是在学生层面还是学校层面都发生了很大的变化,学校之间的差异也在不断地增加,对“数学分析”教学内容和体系都提出了新的要求。许多使用单位希望我们能在原有教材的基础上,编写一本适用面更广泛的数学分析教材,满足高等教育大众化背景下不同高校、不同专业的需求,适应当前高等教育的飞速发展。因此我们在高等教育出版社的配合下,走访听取了众多高等学校数学系主管领导和一线教师的意见,决定在原《数学分析》教材的基础上,坚持已有的在取材、体系、可读性诸方面的成熟风格,保持“选材恰当、深入浅出、重点突出、易读易教”的特点,本着重新整合理论体系、分散难点的原则,删去了一些对理论体系影响不大又比较难理解的内容,同时增加了适量的例子来降低理解的梯度;调整了部分习题,适量增加一些难易程度适当的习题,编写了这本《数学分析简明教程》。

相对于原教材,这本“简明教程”的主要特点有

(1) 实数理论方面作了比较大的调整。考虑到柯西收敛准则理论意义重大但理解较为困难,因此将其安排在了第七章;实数的小数表示直观上容易理解,因此在理论上作简化处理;确界定理作为公理引入,不再证明,其他相应的实数完备性定理也作了简化。

(2) 定积分方面,对第二积分中值定理在加强条件下给出了证明,这样不但简化证明,而且不失数学内涵,并删去了可积性的第三充要条件。

(3) 级数方面,删去了正项级数的拉贝判别法,级数重排的证明也不再给出;傅里叶级数的收敛性定理不作证明。

(4) 多元微分方面,隐函数定理适当简化;保留可微性与切平面等价关系的结论,但不再给出证明;删去了向量函数微积分。

(5) 重积分方面,删去了 n 重积分、反常重积分和一般条件下重积分变量变换公式的证明三节内容,同时对含参量反常积分的内容作了简化。

(6) 附录删去了实数理论,增加了常用曲线对照图。

与原教材相同,还是用记号“□”表示命题证明或例题求解的结束,对于小字排列的内容,在教学中教师可灵活选用,各节横线以下的习题为选做题。

本教材的编写由庞学诚主持,具体分工如下:

庞学诚 负责编写第一至第七章;

吴 畏 负责编写第八至第十一章,第十三章;

柴 俊 负责编写第十二章、第十四至第十八章;

戴浩晖 负责编写第十九至第二十二章。

最后由庞学诚和柴俊负责全书统稿和整理工作。

本书的编写得到了华东师范大学数学系的大力支持,高等教育出版社的编辑也付出了辛勤的劳动,对此我们表示衷心的感谢。同时还要感谢为本书的编写提出积极建议的所有朋友。

对于书中的不足之处,衷心希望读者在阅读和使用过程中不断提出宝贵意见。

编 者

2014 年 5 月

目　　录

第一章　实数集与函数

§1　实　　数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 为此,我们先简要叙述实数的有关概念.

一　实数及其性质

在中学数学课程中,我们知道实数由有理数与无理数两部分组成. **有理数**可用分数形式$\frac{p}{q}$(p,q 为整数,$q\neq 0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示;而无限十进不循环小数则称为**无理数**. 有理数和无理数统称为**实数**.

为了以下讨论的需要,我们把有限小数(包括整数)也表示为无限小数. 对此我们作如下规定:对于正有限小数(包括正整数)x,当 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时,其中 $0\leqslant a_i\leqslant 9, i=1,2,\cdots,n, a_n\neq 0, a_0$ 为非负整数,记

$$x=a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\,9\cdots,$$

而当 $x=a_0$ 为正整数时,则记

$$x=(a_0-1).999\,9\cdots,$$

例如 2.001 记为 2.000 999 9…;对于负有限小数(包括负整数)y,则先将$-y$ 表示为无限小数,再在所得无限小数之前加负号,例如-8 记为$-7.999\,9\cdots$;又规定数 0 表示为 0.000 0…. 于是,任何实数都可用一个确定的无限小数来表示.

我们已经熟知比较两个有理数大小的方法. 现定义两个实数的大小关系.

定义 1　给定两个非负实数

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$$

其中 a_0,b_0 为非负整数,$a_k,b_k(k=1,2,\cdots)$为整数,$0\leqslant a_k\leqslant 9, 0\leqslant b_k\leqslant 9$. 若有

$$a_k=b_k,\ k=0,1,2,\cdots,$$

则称 x 与 y **相等**,记为 $x=y$;若 $a_0>b_0$或存在非负整数 l,使得

$$a_k=b_k(k=0,1,2,\cdots,l)\ 而\ a_{l+1}>b_{l+1},$$

则称 x **大于** y 或 y **小于** x,分别记为 $x>y$ 或 $y<x$.

对于负实数 x,y,若按上述规定分别有$-x=-y$ 与$-x>-y$,则分别称 $x=y$ 与 $x<y$(或 $y>x$). 另外,自然规定任何非负实数大于任何负实数.

为方便起见，通常将全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$，即

$$\mathbf{R}=\{x \mid x\text{ 为实数}\}.$$

实数有如下一些主要性质：

1. 实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商（除数不为 0）仍然是实数.

2. 实数集是有序的，即任意两实数 a,b 必满足下述三个关系之一：$a<b$，$a=b$，$a>b$.

3. 实数的大小关系具有传递性，即若 $a>b$，$b>c$，则有 $a>c$.

4. 实数具有阿基米德（Archimedes）性，即对任何 $a,b\in\mathbf{R}$，若 $b>a>0$，则存在正整数 n，使得 $na>b$.

5. 实数集 $\mathbf{R}$ 具有稠密性，即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数.

6. 如果在一直线（通常画成水平直线）上确定一点 O 作为原点，指定一个方向为正向（通常把指向右方的方向规定为正向），并规定一个单位长度，则称此直线为**数轴**. 任一实数都对应数轴上唯一的一点；反之，数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数. 于是，实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系. 在本书以后的叙述中，常把“实数 a”与“数轴上的点 a”这两种说法看作具有相同的含义.

例 1　设 $a,b\in\mathbf{R}$. 证明：若对任何正数 ε 有 $a<b+\varepsilon$，则 $a\leqslant b$.

证　用反证法. 倘若结论不成立，则根据实数集的有序性，有 $a>b$. 令 $\varepsilon=a-b$，则 ε 为正数且 $a=b+\varepsilon$，但这与假设 $a<b+\varepsilon$ 相矛盾. 从而必有 $a\leqslant b$.　□

例 2　证明：$\sqrt{2}$ 是无理数.

证　用反证法. 若 $\sqrt{2}$ 是一个有理数，则

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

其中 p,q 为正整数，且 p,q 既约，那么

$$p^2=2q^2.$$

由此可得 p 是偶数，故可设 $p=2p_1$，从而得到

$$q^2=2p_1^2.$$

又可得到 q 是偶数，这就与 p,q 既约矛盾.　□

二　绝对值与不等式

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

从数轴上看，数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质:

1. $|a|=|-a|\geqslant 0$;当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$.

2. $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

3. $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$;$|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h$ $(h>0)$.

4. 对于任何 $a,b\in\mathbf{R}$,有如下的**三角形不等式**:
$$|a|-|b|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|.$$

5. $|ab|=|a||b|$.

6. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

下面只证明性质 4,其余性质由读者自行证明.

由性质 2 有
$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant |b|.$$
两式相加后得到
$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|.$$
根据性质 3,上式等价于
$$|a+b|\leqslant |a|+|b|. \tag{1}$$
将(1)式中 b 换成 $-b$,(1)式右边不变,即得 $|a-b|\leqslant |a|+|b|$,这就证明了性质 4 不等式的右半部分. 又由 $|a|=|a-b+b|$,据(1)式有
$$|a|\leqslant |a-b|+|b|.$$
从而得
$$|a|-|b|\leqslant |a-b|. \tag{2}$$
将(2)式中 b 换成 $-b$,即得 $|a|-|b|\leqslant |a+b|$. 性质 4 得证. □

习 题

1. 设 a 为有理数,x 为无理数. 证明:

(1) $a+x$ 是无理数; (2) 当 $a\neq 0$ 时,ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $x(x^2-1)>0$; (2) $|x-1|<|x-3|$; (3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$. 证明:若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.

4. 设 $x\neq 0$,证明 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$,并说明其中等号何时成立.

5. 证明:对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$; (2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

并说明等号何时成立.

6. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$($\mathbf{R}^{+}$表示全体正实数的集合). 证明

$$\left| \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2} \right| \leqslant |b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

---

7. 设 $x>0, b>0, a \neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

8. 设 p 为正整数. 证明:若 p 不是完全平方数,则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

9. 设 a,b 为给定实数. 试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解:

 (1) $|x-a|<|x-b|$; (2) $|x-a|<x-b$; (3) $|x^2-a|<b$.

§2 数集·确界原理

本节中我们先定义 $\mathbf{R}$ 中两类重要的数集——区间与邻域,然后讨论有界集并给出确界定义和确界原理.

一 区间与邻域

设 $a,b \in \mathbf{R}$,且 $a<b$. 我们称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为**开区间**,记作 (a,b);数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$;数集 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 都称为**半开半闭区间**,分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$. 以上这几类区间统称为**有限区间**. 从数轴上来看,开区间 (a,b) 表示 a,b 两点间所有点的集合,闭区间 $[a,b]$ 比开区间 (a,b) 多两个端点,半开半闭区间 $[a,b)$ 比开区间 (a,b) 多一个端点 a 等.

满足关系式 $x \geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a,+\infty)$,这里符号 ∞ 读作"无穷大",$+\infty$ 读作"正无穷大". 类似地,我们记

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}, \quad (a,+\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}, \quad (-\infty,+\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R},$$

其中 $-\infty$ 读作"负无穷大". 以上这几类数集都称为**无限区间**. 有限区间和无限区间统称为**区间**.

设 $a \in \mathbf{R}, \delta>0$. 满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 的集合称为**点 a 的 δ 邻域**,记作 $U(a;\delta)$,或简单地写作 $U(a)$,即有

$$U(a;\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta).$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^\circ(a;\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\},$$

它也可简单地记作 $U^\circ(a)$. 注意,$U^\circ(a;\delta)$ 与 $U(a;\delta)$ 的差别在于:$U^\circ(a;\delta)$ 不包含点 a.

此外,我们还常用到以下几种邻域:

点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a;\delta) = [a, a+\delta)$,简记为 $U_+(a)$;

点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a;\delta) = (a-\delta, a]$,简记为 $U_-(a)$;

($U_-(a)$ 与 $U_+(a)$ 去除点 a 后,分别为**点 a 的空心 δ 左、右邻域**,简记为$U^\circ_-(a)$与 $U^\circ_+(a)$.)

∞ **邻域** $U(\infty)=\{x\,|\,|x|>M\}$,其中 M 为充分大的正数(下同);

$+\infty$ **邻域** $U(+\infty)=\{x\,|\,x>M\}$;$-\infty$ **邻域** $U(-\infty)=\{x\,|\,x<-M\}$.

二 有界集·确界原理

定义 1 设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x\in S$,都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$,则称 S 为**有上界(下界)的数集**,数 $M(L)$ 称为 S 的一个**上界(下界)**.

若数集 S 既有上界又有下界,则称 S 为**有界集**. 若 S 不是有界集,则称 S 为**无界集**.

例 1 证明数集 $\mathbf{N}_+=\{n\,|\,n$ 为正整数$\}$ 有下界而无上界.

证 显然,任何一个不大于 1 的实数都是 $\mathbf{N}_+$ 的下界,故 $\mathbf{N}_+$ 为有下界的数集.

为证 $\mathbf{N}_+$无上界,按照定义只需证明:对于无论多么大的数 M,总存在某个正整数 $n_0(\in\mathbf{N}_+)$,使得 $n_0>M$. 事实上,对任何正数 M(无论多么大),取 $n_0=[M]+1$①,则$n_0\in\mathbf{N}_+$,且 $n_0>M$. 这就证明了 $\mathbf{N}_+$无上界. □

读者还可自行证明:任何有限区间都是有界集,无限区间都是无界集;由有限个数组成的数集是有界集.

若数集 S 有上界,则显然它有无穷多个上界,而其中最小的一个上界常常具有重要的作用,称它为数集 S 的上确界. 同样,有下界数集的最大下界,称为该数集的下确界. 下面给出数集的上确界和下确界的精确定义.

定义 2 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若数 η 满足:

(i) 对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha<\eta$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>\alpha$,即 η 又是 S 的最小上界,

则称数 η 为数集 S 的**上确界**,记作

$$\eta=\sup S②.$$

定义 3 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若数 ξ 满足:

(i) 对一切 $x\in S$,有 $x\geqslant\xi$,即 ξ 是 S 的下界;

(ii) 对任何 $\beta>\xi$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0<\beta$,即 ξ 又是 S 的最大下界,

则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**,记作

$$\xi=\inf S.$$

上确界与下确界统称为**确界**.

---

① $[x]$表示不超过数 x 的最大整数,例如$[2.9]=2$,$[-4.1]=-5$.

② sup 是拉丁文 supremum(上确界)一词的简写;下面的 inf 是拉丁文 infimum(下确界)一词的简写.

例 2 设 $S=\{x \mid x$ 为区间$(0,1)$内的有理数$\}$. 试按上、下确界的定义验证:$\sup S=1, \inf S=0$.

解 先验证 $\sup S=1$:

(i) 对一切 $x\in S$,显然有 $x\leqslant 1$,即 1 是 S 的上界.

(ii) 对任何 $\alpha<1$,若 $\alpha\leqslant 0$,则任取 $x_0\in S$ 都有 $x_0>\alpha$;若 $\alpha>0$,则由有理数集在实数集中的稠密性,在$(\alpha,1)$内必有有理数 x_0,即存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>\alpha$.

类似地可验证 $\inf S=0$. □

读者还可自行验证:闭区间$[0,1]$的上、下确界分别为 1 和 0;对于数集 $E=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\middle| n=1,2,\cdots\right\}$,有 $\sup E=\dfrac{1}{2}$, $\inf E=-1$;正整数集 $\mathbf{N}_+$ 有下确界 $\inf \mathbf{N}_+=1$,而没有上确界.

注 1 由上(下)确界的定义可见,若数集 S 存在上(下)确界,则一定是唯一的. 又若数集 S 存在上、下确界,则有 $\inf S\leqslant \sup S$.

注 2 从上面一些例子可见,数集 S 的确界可能属于 S,也可能不属于 S.

例 3 设数集 S 有上确界. 证明

$$\eta=\sup S\in S \Leftrightarrow \eta=\max S.$$

证 $(\Rightarrow)$设 $\eta=\sup S\in S$,则对一切 $x\in S$ 有 $x\leqslant\eta$,而 $\eta\in S$,故 η 是数集 S 中最大的数,即 $\eta=\max S$.

$(\Leftarrow)$设 $\eta=\max S$,则 $\eta\in S$;下面验证 $\eta=\sup S$:

(i) 对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha<\eta$,只需取 $x_0=\eta\in S$,则 $x_0>\alpha$. 从而满足 $\eta=\sup S$ 的定义. □

关于数集确界的存在性,我们给出如下确界原理.

定理 1.1(确界原理) 设 S 为非空数集. 若 S 有上界,则 S 必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界.

这个定理比较直观. 确界原理是极限理论的基础,读者应予以充分的重视.

例 4 设 A,B 为非空数集,满足:对一切 $x\in A$ 和 $y\in B$ 有 $x\leqslant y$. 证明:数集 A 有上确界,数集 B 有下确界,且

$$\sup A\leqslant \inf B. \tag{1}$$

证 由假设,数集 B 中任一数 y 都是数集 A 的上界,A 中任一数 x 都是 B 的下界,故由确界原理推知数集 A 有上确界,数集 B 有下确界.

现证不等式(1). 对任何 $y\in B$,y 是数集 A 的一个上界,而由上确界的定义知,$\sup A$ 是数集 A 的最小上界,故有 $\sup A\leqslant y$. 而此式又表明数 $\sup A$ 是数集 B 的一个下界,故由下确界定义证得 $\sup A\leqslant\inf B$. □

例 5 设 A,B 为非空有界数集,$S=A\cup B$. 证明:

(i) $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$;

(ii) $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

证 由于 $S=A\cup B$ 显然也是非空有界数集,因此 S 的上、下确界都存在.

(i) 对任何 $x\in S$,有 $x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\leqslant\sup A$ 或 $x\leqslant\sup B$,从而有 $x\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$,故得 $\sup S\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$.

另一方面,对任何 $x\in A$,有 $x\in S\Rightarrow x\leqslant\sup S\Rightarrow\sup A\leqslant\sup S$;同理又有 $\sup B\leqslant\sup S$. 所以 $\sup S\geqslant\max\{\sup A,\sup B\}$.

综上,即证得 $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$.

(ii) 可类似地证明. □

若把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中,并规定任一实数 a 与 $+\infty$, $-\infty$ 的大小关系为:$a<+\infty$, $a>-\infty$, $-\infty<+\infty$,则确界概念可扩充为:若数集 S 无上界,则定义 $+\infty$ 为 S 的**非正常上确界**,记作 $\sup S=+\infty$;若 S 无下界,则定义 $-\infty$ 为 S 的**非正常下确界**,记作 $\inf S=-\infty$. 相应地,前面定义 2 和定义 3 中所定义的确界分别称为**正常上、下确界**.

在上述扩充意义下,我们有

推广的确界原理 任一非空数集必有上、下确界(正常的或非正常的).

例如,对于正整数集 $\mathbf{N}_+$ 有 $\inf\mathbf{N}_+=1$, $\sup\mathbf{N}_+=+\infty$.

例 6 设数集

$$S=\{y\mid y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\}.$$

求证:$\inf S=-\infty$, $\sup S=2$.

证 显然 2 是 S 的最大值,所以

$$\sup S=2.$$

又因为对于任意的正数 M,取 $y_0=-1-M=2-(\sqrt{M+3})^2$,所以 $y_0\in S$,且

$$y_0=-M-1<-M,$$

因此 S 无下界,从而

$$\inf S=-\infty. \qquad □$$

习 题

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $|1-x|-x\geqslant 0$; (2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 6$;

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$(a,b,c 为常数,且 $a<b<c$);

(4) $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 设 S 为非空数集. 试对下列概念给出定义:

(1) S 无上界; (2) S 无界.