

高等学校教材

数学分析简明教程

上册

华东师范大学数学系 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析简明教程

Shuxue Fenxi Jianming Jiaocheng

上册

华东师范大学数学系 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《数学分析(第四版)》的简明教程。本书分上、下册,上册内容包括实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等,附录有微积分学简史、积分表、常用曲线,书末附有部分习题答案与提示。

简明教程保持了第四版“选材恰当、深入浅出、重点突出、易读易教”的特点,对第四版(上册)的一些内容作了调整和简化,降低了实数理论部分的要求,删去了可积性的第三充要条件。另外,本书有针对性地增加了一些例题,对习题也进行了适当的调整。

本书可作为高等学校数学类专业数学分析的教材和参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析简明教程.上册/华东师范大学数学系编
.--北京:高等教育出版社,2014.9
ISBN 978-7-04-040786-0

I. ①数… II. ①华… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 172079 号

策划编辑 胡颖 责任编辑 胡颖 封面设计 张楠 版式设计 杜微言
插图绘制 宗小梅 责任校对 陈杨 责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landaco.com.cn
印 张	20.75	版 次	2014 年 9 月第 1 版
字 数	390 千字	印 次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	30.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 40786-00

前 言

华东师范大学数学系编写的《数学分析》(上、下册)自1980年初版诞生以来,由于在取材、体系、难易程度和可读性等方面均比较切合我国高校数学教学的实际情况,而广受用户欢迎,先后被全国数百所高校选用作为“数学分析”课程的教材。为适应不同阶段的教学,提高教材的适用性,我们不断再版,相继于1990年、2001年和2010年出版了第二、第三和第四版。

不过随着高等教育大众化的到来,高等学校教学改革的深入,无论是在学生层面还是学校层面都发生了很大的变化,学校之间的差异也在不断地增加,对“数学分析”教学内容和体系都提出了新的要求。许多使用单位希望我们能在原有教材的基础上,编写一本适用面更广泛的数学分析教材,满足高等教育大众化背景下不同高校、不同专业的需求,适应当前高等教育的飞速发展。因此我们在高等教育出版社的配合下,走访听取了众多高等学校数学系主管领导和一线教师的意见,决定在原《数学分析》教材的基础上,坚持已有的在取材、体系、可读性诸方面的成熟风格,保持“选材恰当、深入浅出、重点突出、易读易教”的特点,本着重新整合理论体系、分散难点的原则,删去了一些对理论体系影响不大又比较难理解的内容,同时增加了适量的例子来降低理解的梯度;调整了部分习题,适量增加一些难易程度适当的习题,编写了这本《数学分析简明教程》。

相对于原教材,这本“简明教程”的主要特点有

(1) 实数理论方面作了比较大的调整。考虑到柯西收敛准则理论意义重大但理解较为困难,因此将其安排在了第七章;实数的小数表示直观上容易理解,因此在理论上作简化处理;确界定理作为公理引入,不再证明,其他相应的实数完备性定理也作了简化。

(2) 定积分方面,对第二积分中值定理在加强条件下给出了证明,这样不但简化证明,而且不失数学内涵,并删去了可积性的第三充要条件。

(3) 级数方面,删去了正项级数的拉贝判别法,级数重排的证明也不再给出;傅里叶级数的收敛性定理不作证明。

(4) 多元微分方面,隐函数定理适当简化;保留可微性与切平面等价关系的结论,但不再给出证明;删去了向量函数微积分。

(5) 重积分方面,删去了 n 重积分、反常重积分和一般条件下重积分变量变换公式的证明三节内容,同时对含参量反常积分的内容作了简化。

(6) 附录删去了实数理论,增加了常用曲线对照图。

与原教材相同,还是用记号“□”表示命题证明或例题求解的结束,对于小字排列的内容,在教学中教师可灵活选用,各节横线以下的习题为选做题。

本教材的编写由庞学诚主持,具体分工如下:

庞学诚 负责编写第一至第七章;

吴 畏 负责编写第八至第十一章,第十三章;

柴 俊 负责编写第十二章、第十四至第十八章;

戴浩晖 负责编写第十九至第二十二章。

最后由庞学诚和柴俊负责全书统稿和整理工作。

本书的编写得到了华东师范大学数学系的大力支持,高等教育出版社的编辑也付出了辛勤的劳动,对此我们表示衷心的感谢。同时还要感谢为本书的编写提出积极建议的所有朋友。

对于书中的不足之处,衷心希望读者在阅读和使用过程中不断提出宝贵意见。

编 者

2014年5月

目 录

第一章 实数集与函数	1
§ 1 实数	1
一 实数及其性质	1
二 绝对值与不等式	2
§ 2 数集·确界原理	4
一 区间与邻域	4
二 有界集·确界原理	5
§ 3 函数概念	8
一 函数的定义	8
二 函数的表示法	9
三 函数的四则运算	10
四 复合函数	11
五 反函数	11
六 初等函数	12
§ 4 具有某些特性的函数	14
一 有界函数	14
二 单调函数	15
三 奇函数和偶函数	17
四 周期函数	17
总练习题	19
第二章 数列极限	21
§ 1 数列极限概念	21
§ 2 收敛数列的性质	27
§ 3 数列极限存在的条件	34
总练习题	39
第三章 函数极限	41
§ 1 函数极限概念	41
一 x 趋于 ∞ 时函数的极限	41
二 x 趋于 x_0 时函数的极限	42
§ 2 函数极限的性质	47

§ 3 函数极限存在的条件	51
§ 4 两个重要的极限	53
一 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	53
二 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	54
§ 5 无穷小量与无穷大量	56
一 无穷小量	56
二 无穷小量阶的比较	57
三 无穷大量	60
四 曲线的渐近线	62
总练习题	65
第四章 函数的连续性	67
§ 1 连续性概念	67
一 函数在一点的连续性	67
二 间断点及其分类	69
三 区间上的连续函数	70
§ 2 连续函数的性质	72
一 连续函数的局部性质	72
二 闭区间上连续函数的基本性质	73
三 反函数的连续性	76
四 一致连续性	77
§ 3 初等函数的连续性	81
一 指数函数的连续性	81
二 初等函数的连续性	82
总练习题	83
第五章 导数和微分	86
§ 1 导数的概念	86
一 导数的定义	86
二 导函数	89
三 导数的几何意义	90
§ 2 求导法则	93
一 导数的四则运算	93
二 反函数的导数	96
三 复合函数的导数	97
四 基本求导法则与公式	99
§ 3 参变量函数的导数	102
§ 4 高阶导数	104

§ 5 微分	109
一 微分的概念	109
二 微分的运算法则	111
三 高阶微分	112
四 微分在近似计算中的应用	113
总练习题	115
第六章 微分中值定理及其应用	117
§ 1 拉格朗日定理和函数的单调性	117
一 罗尔定理与拉格朗日定理	117
二 单调函数	121
§ 2 柯西中值定理和不定式极限	123
一 柯西中值定理	123
二 不定式极限	124
§ 3 泰勒公式	132
一 带有佩亚诺型余项的泰勒公式	132
二 带有拉格朗日型余项的泰勒公式	136
三 在近似计算上的应用	138
§ 4 函数的极值与最大(小)值	140
一 极值判别	140
二 最大值与最小值	142
§ 5 函数的凸性与拐点	145
§ 6 函数图像的讨论	152
* § 7 方程的近似解	153
总练习题	156
第七章 实数的完备性	159
§ 1 区间套定理·聚点定理与有限覆盖定理	159
一 区间套定理	159
二 聚点定理与有限覆盖定理	161
§ 2 柯西收敛准则	164
一 数列极限的柯西收敛准则	164
二 函数极限的柯西收敛准则	165
* § 3 上极限和下极限	167
总练习题	169
第八章 不定积分	170
§ 1 不定积分概念与基本积分公式	170
一 原函数与不定积分	170

二 基本积分表	172
§ 2 换元积分法与分部积分法	176
一 换元积分法	176
二 分部积分法	181
§ 3 有理函数和可化为有理函数的不定积分	185
一 有理函数的不定积分	185
二 三角函数有理式的不定积分	189
三 某些无理根式的不定积分	190
总练习题	194
第九章 定积分	196
§ 1 定积分概念	196
一 问题提出	196
二 定积分的定义	197
§ 2 牛顿-莱布尼茨公式	200
§ 3 可积条件	203
一 可积的必要条件	203
二 可积的充要条件	204
三 可积函数类	205
§ 4 定积分的性质	208
一 定积分的基本性质	208
二 积分中值定理	212
§ 5 微积分学基本定理·定积分计算(续)	215
一 变限积分与原函数的存在性	215
二 换元积分法与分部积分法	217
三 泰勒公式的积分型余项	222
总练习题	225
第十章 定积分的应用	228
§ 1 平面图形的面积	228
§ 2 由平行截面面积求体积	231
§ 3 平面曲线的弧长与曲率	235
一 平面曲线的弧长	235
二 曲率	239
§ 4 旋转曲面的面积	242
一 微元法	242
二 旋转曲面的面积	244
§ 5 定积分在物理中的某些应用	246
一 液体静压力	246

二 引力	246
三 功与平均功率	248
*§6 定积分的近似计算	250
一 梯形法	250
二 抛物线法	251
总练习题	254
第十一章 反常积分	255
§1 反常积分概念	255
一 问题提出	255
二 两类反常积分的定义	256
§2 无穷积分的性质与收敛判别	261
一 无穷积分的性质	261
二 非负函数无穷积分的收敛判别法	262
三 一般无穷积分的收敛判别法	264
§3 瑕积分的性质与收敛判别	267
总练习题	271
附录 I 微积分学简史	272
附录 II 积分表	280
一 含有 x^n 的形式	280
二 含有 $a+bx$ 的形式	280
三 含有 $a^2 \pm x^2, a>0$ 的形式	281
四 含有 $a+bx+cx^2, b^2 \neq 4ac$ 的形式	281
五 含有 $\sqrt{a+bx}$ 的形式	281
六 含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}, a>0$ 的形式	282
七 含有 $\sqrt{a^2 - x^2}, a>0$ 的形式	283
八 含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的形式	283
九 含有 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的形式	284
十 含有反三角函数的形式	285
十一 含有 e^x 的形式	285
十二 含有 $\ln x$ 的形式	286
附录 III 常用曲线	287
部分习题答案与提示	290
索引	313
人名索引	317

第一章 实数集与函数

§1 实数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 为此, 我们先简要叙述实数的有关概念.

一 实数及其性质

在中学数学课程中, 我们知道实数由有理数与无理数两部分组成. 有理数可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数, $q \neq 0$) 表示, 也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示; 而无限十进不循环小数则称为无理数. 有理数和无理数统称为实数.

为了以下讨论的需要, 我们把有限小数(包括整数)也表示为无限小数. 对此我们作如下规定: 对于正有限小数(包括正整数) x , 当 $x = a_0. a_1 a_2 \cdots a_n$ 时, 其中 $0 \leq a_i \leq 9, i = 1, 2, \cdots, n, a_n \neq 0, a_0$ 为非负整数, 记

$$x = a_0. a_1 a_2 \cdots (a_n - 1) 999 9 \cdots,$$

而当 $x = a_0$ 为正整数时, 则记

$$x = (a_0 - 1). 999 9 \cdots,$$

例如 2.001 记为 2.000 999 9...; 对于负有限小数(包括负整数) y , 则先将 $-y$ 表示为无限小数, 再在所得无限小数之前加负号, 例如 -8 记为 $-7.999 9 \cdots$; 又规定数 0 表示为 0.000 0... . 于是, 任何实数都可用一个确定的无限小数来表示.

我们已经熟知比较两个有理数大小的方法. 现定义两个实数的大小关系.

定义 1 给定两个非负实数

$$x = a_0. a_1 a_2 \cdots a_n \cdots, \quad y = b_0. b_1 b_2 \cdots b_n \cdots,$$

其中 a_0, b_0 为非负整数, $a_k, b_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为整数, $0 \leq a_k \leq 9, 0 \leq b_k \leq 9$. 若有

$$a_k = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

则称 x 与 y 相等, 记为 $x = y$; 若 $a_0 > b_0$ 或存在非负整数 l , 使得

$$a_k = b_k (k = 0, 1, 2, \cdots, l) \text{ 而 } a_{l+1} > b_{l+1},$$

则称 x 大于 y 或 y 小于 x , 分别记为 $x > y$ 或 $y < x$.

对于负实数 x, y , 若按上述规定分别有 $-x = -y$ 与 $-x > -y$, 则分别称 $x = y$ 与 $x < y$ (或 $y > x$). 另外, 自然规定任何非负实数大于任何负实数.

为方便起见,通常将全体实数构成的集合记为 \mathbf{R} ,即

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

实数有如下一些主要性质:

1. 实数集 \mathbf{R} 对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封闭的,即任意两个实数的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是实数.

2. 实数集是有序的,即任意两实数 a, b 必满足下述三个关系之一: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

3. 实数的大小关系具有传递性,即若 $a > b, b > c$, 则有 $a > c$.

4. 实数具有阿基米德(Archimedes)性,即对任何 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $b > a > 0$, 则存在正整数 n , 使得 $na > b$.

5. 实数集 \mathbf{R} 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数,也有无理数.

6. 如果在一直线(通常画成水平直线)上确定一点 O 作为原点,指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向),并规定一个单位长度,则称此直线为**数轴**.任一实数都对应数轴上唯一的一点;反之,数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数.于是,实数集 \mathbf{R} 与数轴上的点有着一一对应关系.在本书以后的叙述中,常把“实数 a ”与“数轴上的点 a ”这两种说法看作具有相同的含义.

例 1 设 $a, b \in \mathbf{R}$. 证明:若对任何正数 ε 有 $a < b + \varepsilon$, 则 $a \leq b$.

证 用反证法.倘若结论不成立,则根据实数集的有序性,有 $a > b$. 令 $\varepsilon = a - b$, 则 ε 为正数且 $a = b + \varepsilon$, 但这与假设 $a < b + \varepsilon$ 相矛盾. 从而必有 $a \leq b$. \square

例 2 证明: $\sqrt{2}$ 是无理数.

证 用反证法.若 $\sqrt{2}$ 是一个有理数,则

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

其中 p, q 为正整数,且 p, q 既约,那么

$$p^2 = 2q^2.$$

由此可得 p 是偶数,故可设 $p = 2p_1$, 从而得到

$$q^2 = 2p_1^2.$$

又可得到 q 是偶数,这就与 p, q 既约矛盾. \square

二 绝对值与不等式

实数 a 的绝对值定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质:

1. $|a| = |-a| \geq 0$; 当且仅当 $a=0$ 时有 $|a| = 0$.

2. $-|a| \leq a \leq |a|$.

3. $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h$; $|a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h$ ($h > 0$).

4. 对于任何 $a, b \in \mathbf{R}$, 有如下的三角形不等式:

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

5. $|ab| = |a| |b|$.

6. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$).

下面只证明性质 4, 其余性质由读者自行证明.

由性质 2 有

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

两式相加后得到

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

根据性质 3, 上式等价于

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (1)$$

将(1)式中 b 换成 $-b$, (1)式右边不变, 即得 $|a - b| \leq |a| + |b|$, 这就证明了性质 4 不等式的右半部分. 又由 $|a| = |a - b + b|$, 据(1)式有

$$|a| \leq |a - b| + |b|.$$

从而得

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \quad (2)$$

将(2)式中 b 换成 $-b$, 即得 $|a| - |b| \leq |a + b|$. 性质 4 得证. \square

习 题

1. 设 a 为有理数, x 为无理数. 证明:

(1) $a+x$ 是无理数; (2) 当 $a \neq 0$ 时, ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $x(x^2-1) > 0$; (2) $|x-1| < |x-3|$; (3) $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{3x-2}$.

3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$. 证明: 若对任何正数 ε 有 $|a-b| < \varepsilon$, 则 $a=b$.

4. 设 $x \neq 0$, 证明 $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$, 并说明其中等号何时成立.

5. 证明: 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1| + |x-2| \geq 1$; (2) $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2$.

并说明等号何时成立.

6. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ (\mathbf{R}^+ 表示全体正实数的集合). 证明

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leq |b - c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

7. 设 $x > 0, b > 0, a \neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.
8. 设 p 为正整数. 证明: 若 p 不是完全平方数, 则 \sqrt{p} 是无理数.
9. 设 a, b 为给定实数. 试用不等式符号 (不用绝对值符号) 表示下列不等式的解:
- (1) $|x-a| < |x-b|$; (2) $|x-a| < x-b$; (3) $|x^2-a| < b$.

§2 数集·确界原理

本节中我们先定义 \mathbf{R} 中两类重要的数集——区间与邻域, 然后讨论有界集并给出确界定义和确界原理.

一 区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$. 我们称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记作 (a, b) ; 数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$; 数集 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 和 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 都称为半开半闭区间, 分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$. 以上这几类区间统称为有限区间. 从数轴上来看, 开区间 (a, b) 表示 a, b 两点间所有点的集合, 闭区间 $[a, b]$ 比开区间 (a, b) 多两个端点, 半开半闭区间 $[a, b)$ 比开区间 (a, b) 多一个端点 a 等.

满足关系式 $x \geq a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a, +\infty)$, 这里符号 ∞ 读作“无穷大”, $+\infty$ 读作“正无穷大”. 类似地, 我们记

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}, (a, +\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}, (-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R},$$

其中 $-\infty$ 读作“负无穷大”. 以上这几类数集都称为无限区间. 有限区间和无限区间统称为区间.

设 $a \in \mathbf{R}, \delta > 0$. 满足绝对值不等式 $|x-a| < \delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a; \delta)$, 或简单地写作 $U(a)$, 即有

$$U(a; \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^\circ(a; \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\},$$

它也可简单地记作 $U^\circ(a)$. 注意, $U^\circ(a; \delta)$ 与 $U(a; \delta)$ 的差别在于: $U^\circ(a; \delta)$ 不包含点 a .

此外, 我们还常用到以下几种邻域:

点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a; \delta) = [a, a + \delta)$, 简记为 $U_+(a)$;

点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a; \delta) = (a - \delta, a]$, 简记为 $U_-(a)$;

($U_-(a)$ 与 $U_+(a)$ 去除点 a 后, 分别为点 a 的空心 δ 左、右邻域, 简记为 $U^\circ_-(a)$ 与 $U^\circ_+(a)$.)

∞ 邻域 $U(\infty) = \{x \mid |x| > M\}$, 其中 M 为充分大的正数(下同);

$+\infty$ 邻域 $U(+\infty) = \{x \mid x > M\}$; $-\infty$ 邻域 $U(-\infty) = \{x \mid x < -M\}$.

二 有界集 · 确界原理

定义 1 设 S 为 \mathbf{R} 中的一个数集. 若存在数 $M(L)$, 使得对一切 $x \in S$, 都有 $x \leq M(x \geq L)$, 则称 S 为有上界(下界)的数集, 数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界(下界).

若数集 S 既有上界又有下界, 则称 S 为有界集. 若 S 不是有界集, 则称 S 为无界集.

例 1 证明数集 $\mathbf{N}_+ = \{n \mid n \text{ 为正整数}\}$ 有下界而无上界.

证 显然, 任何一个不大于 1 的实数都是 \mathbf{N}_+ 的下界, 故 \mathbf{N}_+ 为有下界的数集.

为证 \mathbf{N}_+ 无上界, 按照定义只需证明: 对于无论多么大的数 M , 总存在某个正整数 $n_0 (\in \mathbf{N}_+)$, 使得 $n_0 > M$. 事实上, 对任何正数 M (无论多么大), 取 $n_0 = [M] + 1$ ^①, 则 $n_0 \in \mathbf{N}_+$, 且 $n_0 > M$. 这就证明了 \mathbf{N}_+ 无上界. \square

读者还可自行证明: 任何有限区间都是有界集, 无限区间都是无界集; 由有限数组成的数集是有界集.

若数集 S 有上界, 则显然它有无穷多个上界, 而其中最小的一个上界常常具有重要的作用, 称它为数集 S 的上确界. 同样, 有下界数集的最大下界, 称为该数集的下确界. 下面给出数集的上确界和下确界的精确定义.

定义 2 设 S 是 \mathbf{R} 中的一个数集. 若数 η 满足:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leq \eta$, 即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$, 即 η 又是 S 的最小上界,

则称数 η 为数集 S 的上确界, 记作

$$\eta = \sup S^{\text{②}}.$$

定义 3 设 S 是 \mathbf{R} 中的一个数集. 若数 ξ 满足:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \geq \xi$, 即 ξ 是 S 的下界;

(ii) 对任何 $\beta > \xi$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 < \beta$, 即 ξ 又是 S 的最大下界,

则称数 ξ 为数集 S 的下确界, 记作

$$\xi = \inf S.$$

上确界与下确界统称为确界.

① $[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数, 例如 $[2.9] = 2$, $[-4.1] = -5$.

② \sup 是拉丁文 supremum(上确界)一词的简写; 下面的 \inf 是拉丁文 infimum(下确界)一词的简写.

例 2 设 $S = \{x \mid x \text{ 为区间 } (0, 1) \text{ 内的有理数}\}$. 试按上、下确界的定义验证:
 $\sup S = 1, \inf S = 0$.

解 先验证 $\sup S = 1$:

(i) 对一切 $x \in S$, 显然有 $x \leq 1$, 即 1 是 S 的上界.

(ii) 对任何 $\alpha < 1$, 若 $\alpha \leq 0$, 则任取 $x_0 \in S$ 都有 $x_0 > \alpha$; 若 $\alpha > 0$, 则由有理数集在实数集中的稠密性, 在 $(\alpha, 1)$ 内必有有理数 x_0 , 即存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$.

类似地可验证 $\inf S = 0$. □

读者还可自行验证: 闭区间 $[0, 1]$ 的上、下确界分别为 1 和 0; 对于数集 $E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$, 有 $\sup E = \frac{1}{2}, \inf E = -1$; 正整数集 \mathbf{N}_+ 有下确界 $\inf \mathbf{N}_+ = 1$, 而没有上确界.

注 1 由上(下)确界的定义可见, 若数集 S 存在上(下)确界, 则一定是唯一的. 又若数集 S 存在上、下确界, 则有 $\inf S \leq \sup S$.

注 2 从上面一些例子可见, 数集 S 的确界可能属于 S , 也可能不属于 S .

例 3 设数集 S 有上确界. 证明

$$\eta = \sup S \in S \Leftrightarrow \eta = \max S.$$

证 (\Rightarrow) 设 $\eta = \sup S \in S$, 则对一切 $x \in S$ 有 $x \leq \eta$, 而 $\eta \in S$, 故 η 是数集 S 中最大的数, 即 $\eta = \max S$.

(\Leftarrow) 设 $\eta = \max S$, 则 $\eta \in S$; 下面验证 $\eta = \sup S$:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leq \eta$, 即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$, 只需取 $x_0 = \eta \in S$, 则 $x_0 > \alpha$. 从而满足 $\eta = \sup S$ 的定义. □

关于数集确界的存在性, 我们给出如下确界原理.

定理 1.1 (确界原理) 设 S 为非空数集. 若 S 有上界, 则 S 必有上确界; 若 S 有下界, 则 S 必有下确界.

这个定理比较直观. 确界原理是极限理论的基础, 读者应予以充分的重视.

例 4 设 A, B 为非空数集, 满足: 对一切 $x \in A$ 和 $y \in B$ 有 $x \leq y$. 证明: 数集 A 有上确界, 数集 B 有下确界, 且

$$\sup A \leq \inf B. \quad (1)$$

证 由假设, 数集 B 中任一数 y 都是数集 A 的上界, A 中任一数 x 都是 B 的下界, 故由确界原理推知数集 A 有上确界, 数集 B 有下确界.

现证不等式(1). 对任何 $y \in B$, y 是数集 A 的一个上界, 而由上确界的定义知, $\sup A$ 是数集 A 的最小上界, 故有 $\sup A \leq y$. 而此式又表明数 $\sup A$ 是数集 B 的一个下界, 故由下确界定义证得 $\sup A \leq \inf B$. □

例 5 设 A, B 为非空有界数集, $S = A \cup B$. 证明:

(i) $\sup S = \max \{ \sup A, \sup B \}$;

(ii) $\inf S = \min \{ \inf A, \inf B \}$.

证 由于 $S = A \cup B$ 显然也是非空有界数集, 因此 S 的上、下确界都存在.

(i) 对任何 $x \in S$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B \Rightarrow x \leq \sup A$ 或 $x \leq \sup B$, 从而有 $x \leq \max \{ \sup A, \sup B \}$, 故得 $\sup S \leq \max \{ \sup A, \sup B \}$.

另一方面, 对任何 $x \in A$, 有 $x \in S \Rightarrow x \leq \sup S \Rightarrow \sup A \leq \sup S$; 同理又有 $\sup B \leq \sup S$. 所以 $\sup S \geq \max \{ \sup A, \sup B \}$.

综上, 即证得 $\sup S = \max \{ \sup A, \sup B \}$.

(ii) 可类似地证明. □

若把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中, 并规定任一实数 a 与 $+\infty, -\infty$ 的大小关系为: $a < +\infty, a > -\infty, -\infty < +\infty$, 则确界概念可扩充为: 若数集 S 无上界, 则定义 $+\infty$ 为 S 的非正常上确界, 记作 $\sup S = +\infty$; 若 S 无下界, 则定义 $-\infty$ 为 S 的非正常下确界, 记作 $\inf S = -\infty$. 相应地, 前面定义 2 和定义 3 中所定义的确界分别称为正常上、下确界.

在上述扩充意义下, 我们有

推广的确界原理 任一非空数集必有上、下确界(正常的或非正常的).

例如, 对于正整数集 \mathbf{N}_+ 有 $\inf \mathbf{N}_+ = 1, \sup \mathbf{N}_+ = +\infty$.

例 6 设数集

$$S = \{ y \mid y = 2 - x^2, x \in \mathbf{R} \}.$$

求证: $\inf S = -\infty, \sup S = 2$.

证 显然 2 是 S 的最大值, 所以

$$\sup S = 2.$$

又因为对于任意的正数 M , 取 $y_0 = -1 - M = 2 - (\sqrt{M+3})^2$, 所以 $y_0 \in S$, 且

$$y_0 = -M - 1 < -M,$$

因此 S 无下界, 从而

$$\inf S = -\infty. \quad \square$$

习 题

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $|1-x| - x \geq 0;$

(2) $\left| x + \frac{1}{x} \right| \leq 6;$

(3) $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$ (a, b, c 为常数, 且 $a < b < c$);

(4) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$

2. 设 S 为非空数集. 试对下列概念给出定义:

(1) S 无上界;

(2) S 无界.