智立方
中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

平面向量 矩阵 行列式 算法

上海科学普及出版社

智立方
中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

平面向量
矩阵 行列式 算法

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学专题精编. 平面向量、矩阵、行列式、算法/李正兴著. --上海：上海科学普及出版社，2014. 8

ISBN 978-7-5427-6171-2

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 147134 号

责任编辑　张建青

高中数学专题精编

平面向量

矩阵　行列式　算法

李正兴　著

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号　邮政编码 200070)

http://www.pspsh.com

各地新华书店经销　上海叶大印务发展有限公司印刷

开本 787×1092　1/16　印张 13　字数 318 000

2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5427-6171-2　定价：23.00 元

序

300余万字的《高中数学专题精编》丛书，由昂立智立方中学生教育研究院院长卢影精心策划，经历了我整整两年的笔耕，终于如愿完成并付梓在即. 这是我退休之后完成的第六套数学教育专著，也是我15年来出版的所有数学教育专著中篇幅最长、花费工夫最大、写作时间最长的一套.

《高中数学专题精编》分为8册，根据课程标准以及近年来高考数学命题的现状及改革方向，遵循考纲、注重思维、立足各版教材，目标是在专题上有所突破，在夯实基础的同时，全面提升学生的能力和素质. 它涵盖了高中数学的所有知识板块，并以知识板块为分册依据，每个分册针对一至两个板块，满足学生在这些知识点上的学习需求. 而在谋篇布局上，既考虑了高一、高二学生新授知识的需要，又考虑到高三学生迎考冲刺的需求，每个分册都由基础篇和拓展提高篇组成，力求层次清楚、坡度平稳，基础一般的学生和优秀学生都能使用.

一、基础篇中章与章之间、讲与讲之间环环相扣. 每讲从“知识储备”、“双基回眸”、“例题精讲”、“易错警示”、“链接高考”、“专项训练”等六个方面实施“推进式”辅导，每章最后给出若干份阶段检测卷来对整章知识进行全面考核.

1. “知识储备”：重要知识点一览无余，从而达到消除盲点、贯通知识、建构知识链的目标. 你想要完整地夯实数学基础，你想在数学高考中获得高分，对知识点的整理归纳是必不可少的重要步骤.

2. “双基回眸”：复习过程中的“热身”，通过3～5题紧扣本讲知识的基础小题，巩固“通识”，掌握“通法”，带给高中学生攻克数学堡垒的灵感.

3. “例题精讲”：针对每讲应掌握的知识点，给出若干紧扣考纲、能呈现基础知识和解题通法的典型例题，并给出“策略点击”与详细的解法步骤. 例题的涉及面广，题型多样，通过一题多解的方式，倡导多角度、多维度地分析问题、突破难点，引导学生拓展思维、循序渐进、由此及彼、逐步深入，进而能举一反三，掌握若干解题方法.

4. “易错警示”：帮助学生寻找易错点，进行查漏补缺. 对大多数学生而言，在数学学习过程中常有一个瓶颈存在，就是在每次测试中低级错误不断，问题出在对知识点以及解题通法不能做到“了然于胸”. 解决这一问题，是短时间内提高成绩的有效途径.

5. “链接高考”：高中阶段的数学学习完成后，大多数学生总是要参加数学高考的，所以在高一、高二阶段的数学学习过程中，渗透高考的要求是必需的. 这里所选的例题通常是经历时间洗礼或近年来在高考（或自主招生考试）中出现的具有创新精神的精彩好题，这些例题典型性强，能启迪思维，揭示规律性. 同时，对近年来高考命题的走向进行科学分析，展示解题过程中的逻辑之美、节奏之美、数学思想之美.

6. “专项训练”：每讲至少给出一份专项训练卷（重点专项给出A、B两份甚至A、B、C三份专项训练卷），题型新而全，基础题、中档题、难题合理布局，并大多给出详解. 通过专项

训练可以激发学生的潜能，进一步深入理解和掌握相关知识点，提高解题的能力和技巧.

二、拓展提高篇所讲的是体现能力要求的重点专题，充满了知识的交汇、方法与技巧的展示、数学思想的顿悟，是高考中常出压轴题之所在，也是名牌大学自主招生的“主打板块”.所选例题大多是近年来出现的一些极其典型的试题，浓缩了一种纯粹的高考精华，体现了一种全新的备考理念，既是基本方法的科学总结，又是决战千里的锦囊妙计.剑指难点，迎战不慌！

本人从事高中数学教育工作30余年，退休至今一直沉潜在这一领域也已有7年，我认为一名优秀的高中数学教师对教学过程应当有通盘考虑，对纵向基础知识的梳理和横向各板块知识的综合应当有清晰的认识与掌控.如对每一节课如何引入和展开，知识层面上如何发散，如何抓住学生的注意力，如何激发学生的兴趣，课后如何精选习题和巩固练习，如何进行检测反馈，都要作出独具匠心的安排.我崇尚戏剧式的数学教学，追求完美的有节奏感的深入推进，上每堂专题课都如同导演一场舞台剧，序幕、情节展开、高潮、升华、思考，一环紧扣一环，引领学生走向成功.

胡适有言：“成功不必在我，功力必不唐捐”.在丛书完稿之时，填词一首，是生命的感受，不吐不快.

金　缕　曲

数苑四十载，在教坛，华发染鬓，才情尽送.
叹高次方程无解，世事原来不公.
难将息，灵泉源涌，五色尚存生花笔，向人间，纸墨相吟弄.
夜深沉，海上风.
青春岁月消踪，想当年，意气勃发，今已成空.
一曲清歌浦江畔，汗牛也要充栋.
君不见，江湖澒洞.
得失无关文章事，勤耕耘.
莘莘学子有用，脚乃健，心犹雄.

每当我想起钱锺书先生的诗句：“睡乡分境隔山川，枕坼槐安各一天，那得五丁开路手，为余凿梦两通连”，更激励我无怨无悔地做学生们的“开路手”，为具有梦想的学生们写作，他们的受益是我的快乐.我不会在喧闹的人世间迷失方向，我找到了最适合我的天性的生活，对我而言是理想的生活.感谢我的妻子杨惠芬，没有她的支持，我的2 000余万字、35部专著是不可能写出来的，亲情使我获得生命的享受，我坚信，大自然提供的只是素材，唯有亲情才能把素材创造成完美的作品，我获得的任何细小的成功都有她的陪伴，这就是阳光下绵亘着人生简朴的幸福.我还要感谢昂立智立方中学生教育研究院高中数学教研组长李璐璐老师帮我校对了一部分书稿，责任编辑张建青先生8年来为出版我的书所付出的辛勤劳动.

限于本人水平，书中难免存在的疏漏之处，欢迎读者批评指正.

李正兴

2014年夏于海上述而斋

目　录

基 础 篇

（每讲配有专项训练）

拓 展 提 高 篇

基础篇

JICHUPIAN

第一章　平面向量

第一讲　向量的基本概念及表示

一、知识储备

1. 向量与平面向量：

(1) 向量：既有大小，又有方向的量，叫做向量，通常用 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}$表示.

(2) 平面向量：在平面上，通过有向线段$\overrightarrow{AB}$表示的向量，称为平面向量，记作$\overrightarrow{AB}$；从 A 到 B 的方向为$\overrightarrow{AB}$的方向，线段 AB 的长，称为向量$\overrightarrow{AB}$的模（长），记为$|\overrightarrow{AB}|$.

2. 特殊向量：

(1) 零向量：长度为 0 的向量，叫做零向量，记作$\mathbf{0}$，$\mathbf{0}$的方向是任意的.

(2) 单位向量：长度为 1 个单位的向量，叫做单位向量. 通常用 $\boldsymbol{e}$ 表示，$|\boldsymbol{e}|=1$. 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的单位向量是$\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

(3) 相反向量：与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等，方向相反的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量.

3. 两向量的关系：

(1) 相等：$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同且长度相等，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 称为相等向量.

(2) 平行或共线：非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行（或共线）. 规定：$\mathbf{0}$ 与任何向量平行（或共线）.

二、双基回眸

1. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(2,5)$ 和点 $B(-1,3)$，求$\overrightarrow{AB}$的模.

2. 给出下列六个命题：

① 两个向量相等，则它们的起点相同，终点相同；

② 若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

③ 若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形；

④ 在平行四边形 $ABCD$ 中，一定有$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$；

⑤ 若向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}$，则 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{p}$；

⑥ 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$.

其中不正确的命题个数是（　　）.

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

3. 如图 1－1 所示，E，F，G 依次是正$\triangle ABC$ 的边 AB，BC，AC 的中点.

(1) 在以 A,B,C,E,F,G 为起点或终点的向量中，找出与向量 $\overrightarrow{EF}$ 共线的向量；

(2) 在以 A,B,C 为起点，以 E,F,G 为终点的向量中，找出与向量 $\overrightarrow{GF}$ 模相等的向量；

(3) 在以 E,F,G 为起点，以 A,B,C 为终点的向量中，找出与向量 $\overrightarrow{EG}$ 相等的向量.

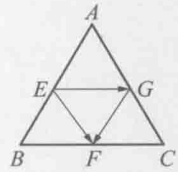


图 1－1

解法导析：1. $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{[2-(-1)]^2+(5-3)^2}=\sqrt{13}$.

2. 两向量起点相同，终点相同，则两向量相等；但两相等向量，不一定有相同的起点和终点，故①不正确. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，由于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向不确定，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不一定相等，故②不正确. 零向量与任一向量平行，故 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$ 时，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不一定平行，故⑥不正确. 正确的命题是③④⑤，故选 B.

3. 由已知，E,F,G 依次是正△ABC 的边 AB,BC,AC 的中点.

所以，$EF \underline{\parallel} \frac{1}{2}AC, GF \underline{\parallel} \frac{1}{2}AB, EG \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$.

(1) 在以 A,B,C,E,F,G 为起点或终点的向量中，与向量 $\overrightarrow{EF}$ 共线的向量有：$\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC}$；$\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC}$；$\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CA}$；$\overrightarrow{FE}$.

(2) 在以 A,B,C 为起点，以 E,F,G 为终点的向量中，与向量 $\overrightarrow{GF}$ 模相等的向量有：$\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG}$.

(3) 在以 E,F,G 为起点，以 A,B,C 为终点的向量中，与向量 $\overrightarrow{EG}$ 相等的向量是 $\overrightarrow{FC}$.

三、例题精讲

例 1　如图 1－2 所示，O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.

(1) 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等的向量有多少个？

(2) 与 $\boldsymbol{a}$ 的长度相等，方向相反的向量有哪些？

(3) 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量有哪些？

(4) 请一一列出与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相等的向量.

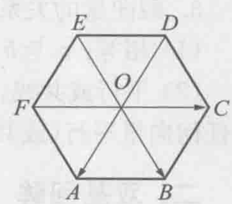


图 1－2

策略点击：① 向量的相关概念及性质与几何知识交汇，要注意联系几何图形的相关性质，使向量与几何图形有机地结合起来.

② 零向量是共线向量判定的一个盲点，要特别注意.

解：(1) 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等的向量有 23 个.

(2) 与 $\boldsymbol{a}$ 的长度相等且方向相反的向量有 $\overrightarrow{OD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AO},\overrightarrow{FE}$.

(3) 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{FE},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DO},\overrightarrow{AO},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AD}$.

(4) 与 $\boldsymbol{a}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CB}$；

与 $\boldsymbol{b}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{DC},\overrightarrow{EO},\overrightarrow{FA}$；

与 $\boldsymbol{c}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{AB}$.

例 2　判断下列命题的真假：

① 直角坐标系中坐标轴的非负轴都是向量；

② 两个向量平行是两个向量相等的必要条件；

③ 向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是共线向量，则 A,B,C,D 必在同一直线上；

④ 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反；

⑤ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充要条件是$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

解：① 直角坐标系中坐标轴的非负半轴，虽有方向之别，但无大小之分，故命题是错误的.

② 由于两个向量相等，必知这两个向量的方向与长度均一致，故这两个向量一定平行，所以，此命题正确；

③ 不正确. ∵ $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，可以有 AB 与 CD 平行；

④ 不正确. 如果其中有一个是零向量，则其方向就不确定；

⑤ 正确. 此命题相当于平面几何中的命题：四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充要条件是有一组对边平行且相等.

例 3　如图 1－3 所示，已知正比例函数 $y=x$ 的图像 l 与直线 g 平行，$A\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$B(x,y)$是直线 g 上的两点.

回答：(1) x,y 为何值时，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$？

(2) x,y 为何值时，$\overrightarrow{AB}$为单位向量？

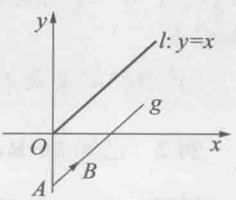


图 1－3

策略点击：$\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}|=0$，必要且只要 A 与 B 两点重合；$\overrightarrow{AB}$为单位向量，当且仅当$|\overrightarrow{AB}|=1$.

解：(1) 如图 1－4 所示. 点 $B(x,y)$是直线 g 上的动点，要使$\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$，必须且只需点 $B(x,y)$与点 $A\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$重合. 当 $x=0$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$.

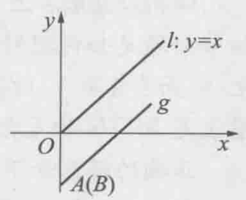


图 1－4

(2) 如图 1－5 所示，要使得$\overrightarrow{AB}$是单位向量，必须且只需$|\overrightarrow{AB}|=1$.

由已知，$l/\!/g$，所以直线 g 的斜率为 1. 设直线 g 的解析式为$y=x+a$，并将点 A 的坐标代入这个解析式，得 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 g：$y=x-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{x^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$y=0$；当 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$y=-\sqrt{2}$.

综上可知，当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=0$ 或 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=-\sqrt{2}$时，向量$\overrightarrow{AB}$是单位向量.

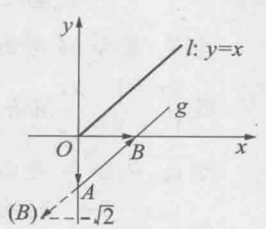


图 1－5

四、易错警示

例 1 判断下列说法是否正确：

(1) 向量就是有向线段；

(2) 零向量既没有长度也没有方向；

(3) 若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;若$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$;

(4) 平行向量所在直线平行,共线向量所在直线共线.

错解：以上说法全正确.

评析及正解：上述解答犯了知识性错误,对向量的有关概念没有理解.对于(1),向量是一个代数量.有向线段是一个几何量,分别属于两个不同范畴.通常是用有向线段来形象地表示向量而已,两者有质的不同,不能混淆.对于(2),零向量是长度为零的向量,且零向量的方向是指向任意方向的,不是没有方向.对于(3),两个不相等的向量不能比较大小.对于(4),平行向量就是共线向量,即方向相同或相反的向量;而其所在直线可以平行或重合.

正确的解法是：以上说法全部错误.

例 2 已知$\lambda\in\mathbf{R}$,$M=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(-1+3\lambda,-2+4\lambda)\}$,$N=\{\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}=(1-\lambda,3+\lambda)\}$,求$M\cap N$.

错解：令$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则有$\begin{cases}-1+3\lambda=1-\lambda, & ①\\-2+4\lambda=3+\lambda, & ②\end{cases}$

由①式可得$\lambda=\dfrac{1}{2}$,由②式可得$\lambda=\dfrac{5}{3}$.故不存在实数λ同时满足①式和②式,所以$M\cap N=\varnothing$.

评析及正解：上述解法中,把集合M与集合N中的λ误认为应取相同的值,这里的细节问题是如何理解集合M.正确的理解是：集合M是当λ取遍所有实数时,所得向量的全体.而当λ取λ_1时得到的M中的向量与当λ取λ_2时得到的N中的向量相同时,这个向量就是$M\cap N$的元素.

正确的解法如下：

解法一：令$\boldsymbol{a}=(-1+3\lambda_1,-2+4\lambda_1)$,$\boldsymbol{b}=(1-\lambda_2,3+\lambda_2)$.

若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则有$\begin{cases}-1+3\lambda_1=1-\lambda_2,\\-2+4\lambda_1=3+\lambda_2,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda_1=1,\\\lambda_2=-1.\end{cases}$所以,$M\cap N=\{(2,2)\}$.

解法二：设$\begin{cases}x=-1+3\lambda,\\y=-2+4\lambda,\end{cases}$消去$\lambda$,得$4x-3y-2=0$.

于是,集合M是由起点在原点,终点在直线$4x-3y-2=0$上的向量组成.

设$\begin{cases}x=1-\lambda,\\y=3+\lambda,\end{cases}$消去$\lambda$,得$x+y-4=0$,

于是,集合N是由起点在原点,终点在直线$x+y-4=0$上的向量组成.

解$\begin{cases}4x-3y-2=0,\\x+y-4=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$所以$M\cap N=\{(2,2)\}$.

五、链接高考

例 设 A_1,A_2,A_3,A_4 是平面直角坐标系中两两不同的四点，若 $\overrightarrow{A_1A_3}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}(\lambda\in\mathbf{R})$，$\overrightarrow{A_1A_4}=\mu\overrightarrow{A_1A_2}(\mu\in\mathbf{R})$. 且 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$. 则称 A_3,A_4 调和分割点 A_1,A_2，已知平面上的点 C,D 调和分割点 A,B，则下面说法正确的是(　　).

A. C 可能是线段 AB 的中点
B. D 可能是线段 AB 的中点
C. C,D 可能同时在线段 AB 上
D. C,D 不可能同时在线段 AB 的延长线上

方法探究：以向量为背景的新定义问题在高考中常常出现，本题有以下两个创新点：一是命题背景新颖，用新定义考查阅读能力与知识迁移能力；二是考查内容创新，以共线向量为背景，结合不等式，通过创新情境，考查化归与转化的数学思想方法和分析问题、解决问题的能力. 解新定义问题的策略是化生为熟、化新为旧，设法把新定义问题转化为熟悉的问题来解决.

解：由 $\overrightarrow{A_1A_3}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}(\lambda\in\mathbf{R})$，$\overrightarrow{A_1A_4}=\mu\overrightarrow{A_1A_2}(\mu\in\mathbf{R})$ 知：

四点 A_1,A_2,A_3,A_4 在同一条直线上，且不重合.

因为 C,D 调和分割点 A,B，所以 A,B,C,D 四点在同一直线上，

设 $\overrightarrow{AC}=c\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}=d\overrightarrow{AB}$，则 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=2$，

选项 A 中，$c=\frac{1}{2}$，此时 d 不存在，故选项 A 不正确；

同理选项 B 也不正确；

选项 C 中，$0<c<1$，$0<d<1$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}>2$，也不正确. 故选 D.

专项训练一：向量的基本概念及表示

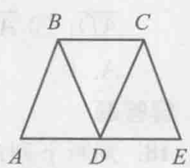
一、填空题

1. 若点 A,B,C,D 不在同一直线上，且 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则四边形 $ABCD$ 的形状是________.

2. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，则 $|\overrightarrow{BC}|=$________.

3. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，则这个四边形的形状是________.

4. 如图所以，四边形 $ABCD$ 和 $BCED$ 都是平行四边形. (1) 写出与 $\overrightarrow{BC}$ 相等的向量________，(2) 写出与 $\overrightarrow{BC}$ 共线的向量________.



第 4 题图

5. 已知梯形 $ABCD$ 中，向量$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$共线，E,F 分别是 AB,CD 的中点，则$|\overrightarrow{EF}|=$________.

6. 若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所成角的大小为________.

7. 在矩形 $ABCD$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，则向量$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$的长度等于________.

8. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的模分别为 3，4，5，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$的最大值为________，最小值为________.

10. 在扇形 OAB 中，$\overset{\frown}{AB}=\frac{4\pi}{5}$，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，若 C 是弦 AB 的中点，则$|\overrightarrow{AC}|=$________

11. 圆 O 的周长是 2π，AB 是圆 O 的直径，C 是圆周上的一点，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，若 $CD\perp AB$ 于 D，则$|\overrightarrow{CD}|=$________.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

二、选择题

13. 下列四个命题：① 若$|\boldsymbol{a}|=0$，则 $\boldsymbol{a}=0$；② 若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$；③ 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是平行向量，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$；④ 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，其中正确的命题的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

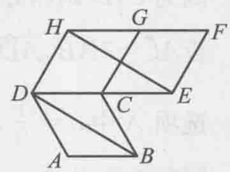
14. 如图，四边形 $ABCD$、四边形 $CEFG$、四边形 $CGHD$ 是全等的菱形，则下列关系不一定成立的是(　　).

A. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{EF}|$

B. $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{FH}$共线

C. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EH}$

D. $\overrightarrow{DC}$与$\overrightarrow{EC}$共线



第 14 题图

15. 给出四个命题：① 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互为负向量，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；② 若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；③ 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量必是$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$；④ 若两个非零向量互相平行，则这两个向量所在的直线互相平行. 其中真命题的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

16. 下列四式中不能化简为$\overrightarrow{PQ}$的是(　　).

A. $\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})$　　B. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{QC})$

C. $\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{CQ}$　　D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BQ}$

17. 若 A,B,C,D 是平面上任意四点，有① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$；② $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$；③ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}$，其中正确的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

三、解答题

18. 判断下列命题是否正确. 若不正确，请简述理由.

① 向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是共线向量. 则 A,B,C,D 四点必在一条直线上；

② 单位向量都相等；

③ 任一向量与它的相反向量不相等；

④ 当且仅当$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$时，四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

⑤ 当且仅当模为 0 时，向量方向不确定；

⑥ 共线的向量，若起点不同，则终点一定不同；

⑦ 若点 O 是正三角形 ABC 的中心，则向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$都相等；

⑧ 在四边形 $ABCD$ 中，若$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，且$|\overrightarrow{AD}|\neq|\overrightarrow{BC}|$，则四边形 $ABCD$ 是梯形；

⑨ 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，若$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$，则该四边形是平行四边形；

⑩ 在四边形 $ABCD$ 中，“$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$”是该四边形为矩形的充要条件.

19. 已知 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$Q(1+\sin\theta,1+\cos\theta)(0\leqslant\theta<\pi)$，求$|\overrightarrow{PQ}|$的取值范围，并指出 θ 取何值时，$|\overrightarrow{PQ}|$达到最大值.

20. 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角为 60°，求：

(1) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

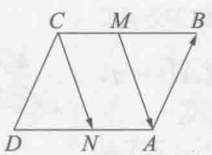
(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

21. 一艘军舰从基地 A 出发向东航行了 200 海里到达基地 B，然后改变航线向东偏北 60°航行了 400 海里到达 C 岛，最后又改变航线向西航行了 200 海里到达 D 岛.

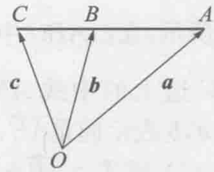
(1) 试作出向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$；

(2) 求$|\overrightarrow{AD}|$.

22. 如图，已知四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$N$，$M$ 分别是 AD，BC 上的点，且$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$，求证：$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$.



第 22 题图



第 23 题图

23. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 以点 O 为公共始点，终点分别为 A，B，C，且 A，B，C 在一直线上，求证：存在两个实数 p，q，满足 $p+q=1$ 且 $\boldsymbol{c}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}$.

第二讲　向量的加减法

一、知识储备

1. 向量加法的几何法则：

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面上任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{AC}$叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和；或作

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为边作平行四边形 $ABCD$，则向量$\overrightarrow{AC}$叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

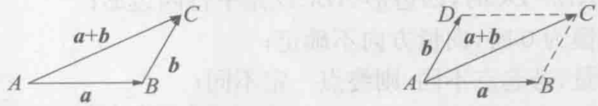


图 1－6

2．向量加法的运算律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；(4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

3．向量减法的几何法则：向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量之和，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

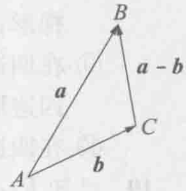


图 1－7

二、双基回眸

1．化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$；

(2) $-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{DO}$.

2．已知向量$\overrightarrow{OA}/\!/\overrightarrow{OB}$，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=1$. 求$|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|$，$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$.

3．已知$\triangle ABC$ 和点 M 满足$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$，若存在实数 m 使得$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\,\overrightarrow{AM}$ 成立，则 $m=$(　　).

A. 5　　　　B. 4　　　　C. 3　　　　D. 2

4．已知平面上有不共线的四点 O，A，B，C，若$\overrightarrow{OA}-3\,\overrightarrow{OB}+2\,\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$.

试求$\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}$的值.

5．如图 1－8 所示，在$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$DE/\!/BC$ 交 AC 于点 E，BC 边上的中线 AM 交 DE 于点 N. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DN}$，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$.

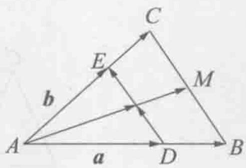


图 1－8

解法导析：1．(1) 原式$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$.

(2) 原式$=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}-(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DO})=(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF})-\boldsymbol{0}=\overrightarrow{EF}$.

2．$\overrightarrow{OA}/\!/\overrightarrow{OB}$，即$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$共线，所以，$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$可能同向共线，也可能反向共线.

若$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$同向共线，$\because$ $|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=1$. $\therefore |\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|=3-1=2$.

$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BA}|=2$.

若$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$反向共线，则$|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|=3-1=2$，$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=4$.

3．如图 1－9 所示，在$\triangle ABC$ 中，由$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$易知 M 是$\triangle ABC$ 的重心，D 是 BC 边的中点，

$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AD}$. 又$\because$ $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AM}$，

$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AB}=3\,\overrightarrow{AM}$，$\therefore$ $m=3$. 故选 C.

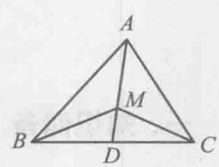


图 1－9

4. $\because \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OB}$，$\therefore \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$.

于是有$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{BC}$，因此$\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=2$.

5. $\because \overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

由$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，得$\overrightarrow{DE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

又AM是$\triangle ABC$的中线，$DE/\!/BC$.

$\therefore \overrightarrow{DN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

由$\triangle ADM\backsim\triangle ABM$，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

三、例题精讲

例 1　(1) 如图 1－10 所示，已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，试求作和向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

(2) 如图 1－11 所示，已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共线. 求作向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

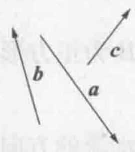


图 1－10

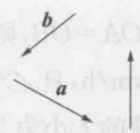


图 1－11

策略点击： 对于(1)，求作三个向量和的问题，首先作出其中任意两个向量的和，用这两个向量的和作为一个向量，然后求这个新向量与另一个向量的和. 即可先作出$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再作$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，可用三角形法则，也可用平行四边形法则. 类似地，对于(2)，通过作差来完成. 方法也不是唯一的.

解：(1) **解法一：** 如图 1－12 所示，首先在平面内任取一点O，作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则得向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，然后作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$. 则向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$即为所求.

解法二： 如图 1－13 所示，在平面内任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边作$\square OADB$. 则对角线$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

再作$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，以$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$为邻边作$\square OCED$，则$\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

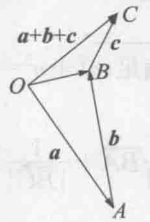


图 1－12

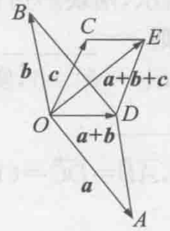


图 1－13