SHU XUE

数学

下册

ZHONG GUO SHANG YE CHU BAN SHE

中国商业出版社

数　学

（下册）

主　编　邓春光　建寅

副主编　谢沙金　雪

中国商业出版社

数　　学（下册）

邓春光　丰建寅　主编

•

中国商业出版社出版

中国商业出版社中南书社发行

湖南省长沙市华中印刷厂印刷

•

787×1092毫米　1／32　9.375印张　210千字

1989年1月第1版　　1989年6月湖南第1次印刷

印　数：1—10000册　　定　价：7.40元（全套价）

ISBN 7—5044—0193—5/F•120

编写后记

本书是根据财经类中等专业学校有关教学大纲精神，由部分省（区）财经类中等专业学校二十多位数学教师共同编写而成。参加本书编写的单位有：山西省财贸学校、安徽省财政学校、湖北省粮食学校、湖北省咸宁财贸学校、广东省商业学校、湖南省财会学校、湖南省物资学校、湖南省衡阳市财会学校、湖南省常德市供销学校、湖南省娄底地区供销学校、湖南省邵阳市供销学校、湖南省零陵地区供销学校、湖南省岳阳市供销学校、湖南省郴州地区粮食学校、湖南省郴州地区商业学校、湖南省常德市财会学校、湖南省供销学校。参编人员执笔分工，上册：张才，第一章；吴是娴，第二章；谢非芝，第三章；明艮仙，第四章；陈天蓉，第五章；苏芳民，第六章；邱湘华，第七章；曾凡林，第八章。鉴于吴是娴在上册总纂中所起的作用，增补吴是娴为上册副主编。中册：郭寄平，第一章；吴昌高，第二章；王勋昌，第三章；阮玮，第四章；陈斌，第五章；许艳明，第六章。下册：陈明，第一章；谢沙金，第二章；陈传环，第三章；李伟，第四章；邓正清，第五章；邓春光，第六章；邓凌霄，第七章；陈晓英，第八章；唐炜，第九章；段群祥，第十章；丰建寅，第十一章；丁从新，第十二章；胡桔州，第十三章。初稿完成后，上册由张才总纂；中册由王勋昌总纂；下册由丰建寅总纂，邓凌霄对下册数理统计部分作了初

步修改。邓春光对全书负责总纂定稿。最后经原中国科学院数学研究所副研究员、现湖南师范大学教学系主任方惠中教授审定，由中国商业出版社正式出版，作为财经类中等专业学校数学教材，也可作为财经系统广大职工自学用书。

在编写过程中，湖南省供销社科教处、山西省财贸学校、安徽省财政学校、湖南省供销学校等单位给予了大力支持和帮助；长沙市雅礼中学刘军凤为本书提供了宝贵资料并提出了宝贵意见，在此一并表示感谢！

限于编者水平，书中存在缺点错误悬请读者批评指正，以利本书进一步修改。

这套《数学》教材上、中、下三册迄今出版完毕。为备后查，在最后一册出版之时，特立此“编写后记”。

一九八九年五月

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中一项必不可少的基本内容，它不但是研究线性方程组和矩阵的有力工具，而且在许多理论和实际应用中发挥着重要的作用。本章先给出 n 阶 行 列式的定义，再讨论它的性质，然后介绍它的应用——克莱姆法则。

§1.1 二，三阶行列式

（一）二阶行列式

二元线性方程组的一般形式是

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

我们用加减消元法来解方程组（I）：

（1）$\times b_2-$（2）$\times b_1$消去y得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

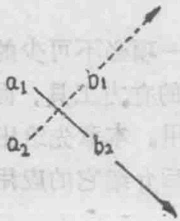
（2）$\times a_1-$（1）$\times a_2$消去x得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

设$a_1b_2-a_2b\neq 0$，则由（3）和(4)得方程组(I)的解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (5) \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$$

在公式（5）中，两个分母都是$a_1b_2-a_2b_1$，其中a_1，a_2，b_1，b_2是方程组（I）的未知数x，y的系数．为了便于记忆与讨论，把a_1，a_2，b_1，b_2按照方程组（I）中原来的位置排列成一个正方形，可以看出，$a_1b_2-a_2b_1$就是



这个正方形中用实线表示的对角线（叫做主对角线）上两个数的积，减去用虚线表示的对角线（叫做次对角线）上两个数的积所得的差．通常在这四个数的两旁各加一竖线，用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (1-1)$$

来表示$a_1b_2-a_2b_1$，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

记号（1—1）叫做二阶行列式．a_1．a_2，b_1，b_2叫做行列式的元素．横排叫行，纵排叫列．a_1，b_1是第一行，a_2，b_2是第二行．a_1，a_2，b_1，b_2依次是第一，第二列．$a_1b_2-a_2b_1$叫做行列式（1—1）的展开式．

如果公式（5）中的两个分子也用行列式来表示，就有

$$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ a_1c_2-a_2c_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

这样，公式（5）可写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0\right) \quad (1-2)$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

为了方便起见，通常用D，D_1，D_2分别表示（1—2）中分母和分子的各行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

那么，方程组（I）的解可写成：

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}, \\ y=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \quad (D\neq 0) \qquad (1-3)$$

行列式D是由方程组（I）中未知数x，y的系数按原来的位置次序组成的，叫做这个方程组的系数行列式；D中x的系数a_1，a_2，依次换成方程组（I）的常数项C_1，C_2，就得到行列式D_1；D中y的系数b_1，b_2依次换C_1，C_2就得到行列式D_2．

例1　展开下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \end{vmatrix}$．

解

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = (-3)(-5)-5(-2)=25;$

(2) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \end{vmatrix} = \sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha.$

例2　用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 3x-2y-3=0 \\ x+3y+1=0 \end{cases}$$

解　先把方程组变成一般形式：

$$\begin{cases} 3x-2y=3 \\ x+3y=-1 \end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9+2=11\neq 0$$

所以

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{7}{11}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=-\frac{6}{11}$$

（二）三阶行列式

我们仍用加减消元法来解三元线性方程组

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{cases}
a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & (1)\\
a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & (2)\\
a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & (3)
\end{cases}
$$

先消去z：

（1）$\times c_3-$（3）$\times c_1$，得

$$(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1 \quad (4)$$

（2）$\times c_1-$（1）$\times c_2$，得

$$(a_2c_1-a_1c_2)x+(b_2c_1-b_1c_2)y=d_2c_1-d_1c_2 \quad (5)$$

（3）$\times c_2-$（2）$\times c_3$，得

$$(a_3c_2-a_2c_3)x+(b_3c_2-b_2c_3)y=d_3c_2-d_2c_3 \quad (6)$$

由（4），（5）和（6）式三式消去y：

（4）$\times b_2+$（5）$\times b_3+$（6）$\times b_1$，得

$$(a_1b_2c_3-a_3b_2c_1+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3)x$$
$$=d_1b_2c_3-d_3b_2c_1+d_2b_3c_1-d_1b_3c_2+d_3b_1c_2-d_2b_1c_3$$

设

$$a_1b_2c_3-a_3b_2c_1+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3 \quad (7)$$

由（7）式得：

$$x=\frac{d_1b_2c_3-d_3b_2c_1+d_2b_3c_1-d_1b_3c_2+d_3b_1c_2+d_2b_1c_3}{a_1b_2c_3-a_3b_2c_1+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3} \quad (8)$$

用同样的方法可得y和z：

$$y=\frac{a_1d_2c_3-a_3d_2c_1+a_2d_3c_1-a_1d_3c_2+a_3d_1c_2-a_2d_1c_3}{a_1b_2c_3-a_3b_2c_1+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3} \tag{9}$$

$$z=\frac{a_1b_2d_3-a_3b_2d_1+a_2b_3d_1-a_1b_3d_2+a_3b_1d_2-a_2b_1d_3}{a_1b_2c_3-a_3b_2c_1+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3} \tag{10}$$

依照二阶行列式，用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1—4}$$

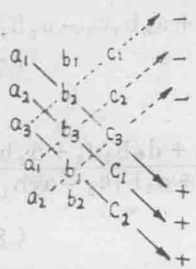
表示

$$a_1b_2c_3-a_3b_2c_1+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3 \tag{1—5}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_3b_2c_1+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2$$
$$+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3.$$

记号（1—4）叫做三阶行列式．（1—5）式叫做三阶行列式（1—4）的展开式．三阶行列式有三 行 三 列9个元素，其展开式共有六项，每次都是不同行不同列的三个元素的乘积，三个正项，三个负项，利用这一特点，可得三阶行列式的展开法如下：



$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2$$
$$-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.$$

这就是说，实线上三个元素的积取正号，虚线上三个元素的积取负号，然后相加便是行列式的展开式，这种展开法叫做对角线展开法。

有了三阶行列式，公式（8）（9）和（10）可简写为：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{D_3}{D}.$$

在公式（1—6）中，行列式 D，D_1，D_2和D_3构成的规律与公式（1--3）中的二阶行列式D，D_1，D_2类似：D是由方程组（Ⅱ）的未知数x，y和z的系数按原来的位置次序构成的；D_1，D_2和D_3是用常数项d_1，d_2，d_3分别代替D中x，y，z的系数的结果。

例 3　验证下列两式：

$$（1）\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=0;\quad （2）\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc.$$

解　用对角线展开法，验证如下：

$$（1）\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 + abc - abc - 0 - 0 - 0 = 0;$$

$$（2）\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = abc.$$

主对角线一侧的元素都为零的行列式叫做三角形行列式，由例3的（2）可知，三角行列式的值等于主对角线上元素之和。

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

解 用对角线展开法，可求出

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0,\quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47,\quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

于是，方程组的解为

$$x = \frac{13}{28},\quad y = \frac{47}{28},\quad z = \frac{3}{4}.$$

可见，只要方程组的系数行列式不为零，方程组就有唯一解。

（三）n阶行列式

由上面已知二阶与三阶行列式分别为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{12}$$

借用（11）式，（12）式还可以进一步写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

（13）式给出了用二阶行列式来定义三阶行列式的方法．类似，可用三阶行列式来定义四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

这样，以逐次递推方式，用n个n－1阶行列式（n≥2，n是正整数）可以给出n阶行列式的定义。

定义：n阶行列式为