

考研数学

常考题型 解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著
文都考研命题研究中心◎编

数学三 下册

正版图书配套视频讲解（网校买课送书）

- ☑ 名师32课时导学精讲
- ☑ 数学中的超级复习全书

超值赠送：《经典常考题型同步测试题》+ 网络答疑



考研数学

常考题型 解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著
文都考研命题研究中心◎编

数学三 下册

图书在版编目(CIP)数据

考研数学常考题型解题方法技巧归纳. 数学三/毛纲源编著. —武汉: 华中科技大学出版社, 2014. 10

(毛纲源考研数学辅导系列)

ISBN 978-7-5680-0407-7

I. ①考… II. ①毛… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 219410 号

考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学三)

毛纲源 编著

策划编辑: 王汉江(QQ:14458270)

责任编辑: 王汉江

特约编辑: 陈文峰 李 焕

封面设计: 杨 安

责任监印: 朱 霞

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编: 430074 电话: (027)81321915

录 排: 北京世纪文都教育科技有限公司

印 刷: 北京市通州运河印刷厂

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 33.5

字 数: 836 千字

版 次: 2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 62.00 元(上、下册)



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

本书在教育部制定的考研数学三“考试大纲”的指导下,经过多年的教学实践精心编写而成,完整的知识体系,更加符合当前考生复习备考的需求.全书共分为三篇:第1篇为微积分,第2篇为线性代数,第3篇为概率论与数理统计.

书中重点讲述与考纲中基本概念、基本理论、基本方法有关的经典试题,内容丰富,题型广泛、全面,任何一年的真题均可在本书中找到对应的题型;同时作者还对各类重点常考题型的解题思路、方法和技巧进行归纳、总结,对容易出错的地方以“注意”的形式作了详尽的注解加以强调.讲解的方法通俗易懂,由浅入深,富于启发,是一本广度、深度及难度均适合广大考生使用的考研辅导书.

本书有以下几个特点.

首先,本书根据考研数学大纲的要求,将历年考研数学试题按题型分类,对各类题型的解法进行了归纳总结,使考生能做到举一反三.数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好这些题型及其解题方法与技巧,会减少解题的盲目性,从而提高解题效率,考生的应试能力自然就得到了提高.同时也便于考生掌握考研数学一的大部分题型及其解题思路、方法与技巧,因而,本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解.为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析,便于考生理解、记忆,避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法,这些简便算法新颖、独特,它们是作者多年来教学经验的总结,会大大提高考生的解题速度和准确性,使考生大大节省时间,因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注重培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力,对综合型题型进行了较多的分析和解法,以期提高考生在这方面的能力.与此同时,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深,适于自学,并尽量使选用的例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识,也为了更好地阅读本书,特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书,这就是本人编写的经济类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《经济数学(微积分)解题方法技巧归纳》、《经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳》、《经济数学(概率论与数理统计)解题方法技巧归纳》.这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评,久销不衰.很多已考取

经济类硕士研究生都受益于这套丛书. 本人在撰写本书时, 多处引用了这套丛书的内容和方法, 如果能把这套丛书结合起来学习, 必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限, 加之时间仓促, 书中错误、疏漏之处在所难免, 恳请专家、读者指正.

毛纲源

2014 年 10 月于武汉理工大学

第2篇 线性代数

2.1 计算行列式	(238)
2.1.1 计算数字型行列式	(238)
题型 2.1.1.1 计算非零元素(主要)在一条或两条线上的行列式	(238)
题型 2.1.1.2 计算非零元素在三条线上的行列式	(240)
题型 2.1.1.3 计算行(列)和相等的行列式	(241)
题型 2.1.1.4 计算范德蒙行列式	(242)
题型 2.1.1.5 求代数余子式之和的值	(243)
题型 2.1.1.6 计算 n 阶可逆矩阵的所有代数余子式的和	(244)
题型 2.1.1.7 求行列式中含某因子的所有项	(244)
2.1.2 计算抽象矩阵的行列式	(245)
题型 2.1.2.1 计算由行(列)向量表示的矩阵的行列式的值	(245)
题型 2.1.2.2 计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式	(246)
题型 2.1.2.3 计算含零子块的四分块矩阵的行列式	(247)
题型 2.1.2.4 证明方阵的行列式等于零	(247)
2.1.3 克拉默法则的应用	(248)
2.2 矩 阵	(251)
2.2.1 证明矩阵的可逆性	(251)
题型 2.2.1.1 证明矩阵可逆	(251)
题型 2.2.1.2 证明和(差)矩阵可逆	(253)
题型 2.2.1.3 证明方阵为不可逆矩阵	(254)
2.2.2 矩阵元素给定,求其逆矩阵的方法	(254)
2.2.3 求解与伴随矩阵有关的问题	(256)
题型 2.2.3.1 计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式	(256)
题型 2.2.3.2 求与伴随矩阵有关的矩阵的逆矩阵	(257)
题型 2.2.3.3 求与伴随矩阵有关的矩阵的秩	(258)
题型 2.2.3.4 求伴随矩阵	(259)
题型 2.2.3.5 证明伴随矩阵的性质	(260)
2.2.4 计算方阵高次幂的方法	(260)
2.2.5 求矩阵的秩	(265)
题型 2.2.5.1 求元素具体给定的矩阵的秩	(265)
题型 2.2.5.2 求抽象矩阵的秩	(266)
题型 2.2.5.3 已知矩阵的秩,求其待定常数	(269)
2.2.6 分块矩阵乘法运算的应用	(270)
2.2.7 初等变换与初等矩阵的关系的应用	(271)
题型 2.2.7.1 用初等矩阵表示初等变换	(271)
题型 2.2.7.2 利用初等矩阵的性质计算矩阵	(272)
题型 2.2.7.3 利用矩阵的初等变换性质解题	(273)
2.2.8 求解矩阵方程	(273)

题型 2.2.8.1	求解含单位矩阵 E 加项的矩阵方程	(274)
题型 2.2.8.2	求解只含一个未知矩阵的矩阵方程	(275)
题型 2.2.8.3	求解含多个未知矩阵的矩阵方程	(275)
题型 2.2.8.4	已知一矩阵方程,求方程中某矩阵的行列式	(277)
2.2.9	求解与矩阵等价的有关问题	(278)
题型 2.2.9.1	判别两矩阵等价	(278)
题型 2.2.9.2	利用矩阵等价的性质求解有关问题	(279)
2.3	向 量	(280)
2.3.1	判别向量组线性相关、线性无关	(280)
题型 2.3.1.1	用线性相关性定义做选择题、填空题	(280)
题型 2.3.1.2	判别分量已知的向量组的线性相关性	(281)
题型 2.3.1.3	证明几类向量组的线性相关性	(283)
题型 2.3.1.4	已知向量组的线性相关性,求其待定常数	(288)
2.3.2	判定向量能否由向量组线性表示	(289)
题型 2.3.2.1	判定分量已知的向量能否由向量组线性表示	(289)
题型 2.3.2.2	判断一抽象向量能否由向量组线性表示	(290)
题型 2.3.2.3	判别一向量组可否由另一向量组线性表示	(291)
2.3.3	两向量组等价的判别方法及常用证法	(292)
2.3.4	向量组的秩与极大线性无关组的求(证)法	(295)
题型 2.3.4.1	求分量给出的向量组的秩及其极大无关组	(295)
题型 2.3.4.2	将向量用极大线性无关组线性表示	(296)
题型 2.3.4.3	求解(证明)与向量组的秩有关的问题	(297)
题型 2.3.4.4	证一向量组为一极大无关组	(298)
2.3.5	将线性无关向量组正交规范化	(299)
2.4	线性方程组	(301)
2.4.1	判定线性方程组解的情况	(301)
题型 2.4.1.1	判定齐次线性方程组解的情况	(301)
题型 2.4.1.2	判定非齐次线性方程组解的情况	(304)
2.4.2	由其解反求方程组或其参数	(305)
题型 2.4.2.1	已知 $AX=0$ 的解的情况,反求 A 中参数	(305)
题型 2.4.2.2	已知 $AX=b$ 的解的情况,反求方程组中参数	(306)
题型 2.4.2.3	已知其基础解系,求该方程组的系数矩阵	(307)
2.4.3	证明一组向量为基础解系	(308)
2.4.4	基础解系和特解的简便求法	(310)
2.4.5	求解含参数的线性方程组	(311)
题型 2.4.5.1	求解方程个数与未知数个数相等的含参数的线性方程组	(312)
题型 2.4.5.2	求解方程个数与未知数个数不等的含参数的线性方程组	(316)
题型 2.4.5.3	求解参数仅出现在常数项的线性方程组	(316)
题型 2.4.5.4	求解通解满足一定条件的含参数的方程组	(317)
题型 2.4.5.5	求解有无穷多解的矩阵方程	(318)

2.4.6 求抽象线性方程组的通解	(319)
题型 2.4.6.1 A 没有具体给出,求 $AX=0$ 的通解	(319)
题型 2.4.6.2 已知 $AX=b$ 的特解,求其通解	(320)
题型 2.4.6.3 利用线性方程组的向量形式求(证明)其解	(322)
2.4.7 求两线性方程组的非零公共解	(323)
题型 2.4.7.1 求两齐次线性方程组的非零公共解	(323)
题型 2.4.7.2 证明两齐次线性方程组有非零公共解	(324)
题型 2.4.7.3 讨论两方程组同解的有关问题	(324)
2.5 矩阵的特征值、特征向量	(327)
2.5.1 求矩阵的特征值、特征向量	(327)
题型 2.5.1.1 求元素已给出的矩阵的特征值、特征向量	(327)
题型 2.5.1.2 求(证明)抽象矩阵的特征值、特征向量	(329)
2.5.2 由特征值和(或)特征向量反求其矩阵	(331)
题型 2.5.2.1 由特征值和(或)特征向量反求其矩阵的待定常数	(331)
题型 2.5.2.2 已知特征值、特征向量,反求其矩阵	(332)
2.5.3 已知一矩阵的特征值、特征向量,求相关联矩阵的特征值、特征向量	(334)
2.5.4 判别或证明方阵是否可对角化	(336)
题型 2.5.4.1 判别元素给定的矩阵是否可对角化	(336)
题型 2.5.4.2 判别或证明含重特征值的矩阵是否可对角化	(337)
题型 2.5.4.3 判别或证明满足抽象矩阵等式的矩阵是否可对角化	(337)
2.5.5 相似矩阵的判别及其性质的简单应用	(338)
题型 2.5.5.1 判定两方阵是否相似	(339)
题型 2.5.5.2 相似矩阵性质的简单应用	(340)
2.5.6 与两矩阵相似有关的计算	(341)
题型 2.5.6.1 n 阶矩阵 A 可相似对角化,求 A 中待定常数及可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (λ_i 为 A 的特征值)	(341)
题型 2.5.6.2 求 n 阶实对称矩阵 A 中待定常数及正交矩阵 Q ,使 $Q^{-1}AQ=Q^T AQ=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (λ_i 为 A 的特征值)	(343)
题型 2.5.6.3 A 为实对称矩阵,求与其相似的对角矩阵 Λ	(344)
题型 2.5.6.4 已知矩阵 A 和可逆阵 P ,使 $P^{-1}AP=B$,求方阵 B	(345)
题型 2.5.6.5 计算相似矩阵的高次幂(详见 2.2.4 节)	(345)
2.6 二次型	(346)
2.6.1 求二次型的矩阵及其秩	(346)
题型 2.6.1.1 用矩阵形式表示二次型	(346)
题型 2.6.1.2 求二次型的秩	(347)
2.6.2 化标准形及由标准形确定二次型	(348)
题型 2.6.2.1 化二次型为标准形、规范形	(348)
题型 2.6.2.2 将实对称矩阵合同对角化	(354)
题型 2.6.2.3 由二次型的标准形确定该二次型	(356)
2.6.3 判别(证明)实二次型(实对称矩阵)的正定性	(356)

题型 2.6.3.1	判别或证明具体给定的二次型或其矩阵的正定性	(357)
题型 2.6.3.2	判别或证明抽象的二次型(实对称矩阵)的正定性	(357)
题型 2.6.3.3	确定参数值或其取值范围使二次型或其矩阵正定	(360)
2.6.4	判别两矩阵是否合同	(361)
题型 2.6.4.1	判别(证明)两实对称矩阵合同	(361)
题型 2.6.4.2	判别(证明)两矩阵不合同	(363)
2.6.5	讨论矩阵等价、相似及合同的关系	(363)

第 3 篇 概率论与数理统计

3.1	随机事件和概率	(366)
3.1.1	随机事件间的关系及其运算	(366)
题型 3.1.1.1	描绘随机试验的样本空间	(366)
题型 3.1.1.2	用式子表示事件关系	(366)
题型 3.1.1.3	利用事件运算的性质或图示法简化事件算式	(367)
题型 3.1.1.4	求满足一定条件的事件关系	(367)
3.1.2	直接计算随机事件的概率	(368)
题型 3.1.2.1	计算古典型概率	(368)
题型 3.1.2.2	计算几何型概率	(370)
题型 3.1.2.3	计算伯努利概型中事件的概率	(371)
3.1.3	间接计算随机事件的概率	(372)
题型 3.1.3.1	计算和、差、积事件的概率	(372)
题型 3.1.3.2	求与包含关系有关的事件的概率	(375)
题型 3.1.3.3	计算与互斥事件有关的事件的概率	(375)
题型 3.1.3.4	求与条件概率有关的事件的概率	(376)
题型 3.1.3.5	求与他事件有关的单个事件的概率	(376)
题型 3.1.3.6	判别或证明事件概率不等式	(377)
3.1.4	几个计算概率公式的实际应用	(377)
题型 3.1.4.1	用加法公式求解实际应用题	(377)
题型 3.1.4.2	用条件概率与概率的乘法公式求解实际应用题	(378)
题型 3.1.4.3	用全概率公式和逆概率(贝叶斯)公式求解实际应用题	(379)
题型 3.1.4.4	利用抽签原理计算事件概率	(382)
3.1.5	判别事件的独立性	(382)
题型 3.1.5.1	判别(证明)两事件相互独立	(382)
题型 3.1.5.2	判别(证明) $n(n>2)$ 个事件相互独立	(384)
3.2	一维随机变量及其分布	(386)
3.2.1	分布列、概率密度及分布函数性质的应用	(386)
题型 3.2.1.1	判别分布列、概率密度及分布函数	(387)
题型 3.2.1.2	利用分布的性质,确定待定常数或所满足的条件	(389)
题型 3.2.1.3	求随机变量落在某点或某区间上的概率	(390)
3.2.2	求分布列(概率分布)、概率密度及分布函数	(391)

题型 3.2.2.1	求概率分布(分布律)及分布函数	(391)
题型 3.2.2.2	求连续型或混合型随机变量的分布函数或其取值	(393)
题型 3.2.2.3	求概率密度	(396)
3.2.3	利用常用分布计算事件的概率	(396)
题型 3.2.3.1	利用二项分布计算伯努利概型中事件的概率	(397)
题型 3.2.3.2	利用超几何分布计算事件的概率	(399)
题型 3.2.3.3	利用几何分布计算事件的概率	(399)
题型 3.2.3.4	利用泊松分布计算事件的概率	(400)
题型 3.2.3.5	利用均匀分布计算事件的概率	(401)
题型 3.2.3.6	利用指数分布计算事件的概率	(401)
题型 3.2.3.7	利用正态分布计算事件的概率	(403)
题型 3.2.3.8	利用相关分布与二项分布相结合计算事件的概率	(406)
3.2.4	求随机变量函数的分布	(407)
题型 3.2.4.1	求离散型随机变量函数的概率分布	(407)
题型 3.2.4.2	求连续型随机变量函数的分布	(408)
题型 3.2.4.3	讨论随机变量函数分布的性质	(412)
3.3	二维随机变量的联合概率分布	(413)
3.3.1	求二维随机变量的分布	(413)
题型 3.1.1.1	求二维离散型随机变量的联合分布律	(413)
题型 3.3.1.2	求二维随机变量的边缘分布	(417)
题型 3.3.1.3	由联合分布、边缘分布求条件分布	(420)
题型 3.3.1.4	由条件分布反求联合分布、边缘分布	(423)
题型 3.3.1.5	已知分区域定义的联合密度,求其分布函数	(424)
3.3.2	随机变量的独立性	(425)
题型 3.3.2.1	判别两随机变量的独立性	(425)
题型 3.3.2.2	利用独立性确定联合分布中的待定常数	(430)
3.3.3	计算二维随机变量取值的概率	(431)
题型 3.3.3.1	计算两离散型随机变量运算后取值的概率	(431)
题型 3.3.3.2	求二维连续型随机变量落入平面区域内的概率	(432)
题型 3.3.3.3	求与 $\max(X,Y)$ 或 (和) $\min(X,Y)$ 有关的概率	(433)
题型 3.3.3.4	求系数为随机变量的二次方程有根、无根的概率	(434)
题型 3.3.3.5	已知系数为随机变量的二次方程有根、无根的概率,反求该随机变量的分布	(434)
3.3.4	求二维随机变量函数的分布	(434)
题型 3.3.4.1	已知 (X,Y) 的联合分布律,求 $Z=g(X,Y)$ 的分布律	(434)
题型 3.3.4.2	求两连续型随机变量的简单函数的分布	(436)
题型 3.3.4.3	求分布连续型和离散型的两随机变量的简单函数的分布	(440)
题型 3.3.4.4	已知 X,Y 的分布,求 $\max(X,Y)$ 与 $\min(X,Y)$ 的分布	(441)
3.4	随机变量的数字特征	(443)
3.4.1	求一维随机变量的数字特征	(443)
题型 3.4.1.1	求随机变量的数学期望与方差	(443)

题型 3.4.1.2	求随机变量函数的数学期望与方差	(448)
题型 3.4.1.3	计算随机变量的矩	(451)
3.4.2	求二维随机变量的数字特征	(451)
题型 3.4.2.1	求 (X,Y) 的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望和方差	(451)
题型 3.4.2.2	计算协方差和相关系数	(456)
3.4.3	计算两类分布的数字特征	(464)
题型 3.4.3.1	计算二维正态分布的数字特征	(464)
题型 3.4.3.2	计算 $Z=\max(X,Y)$ 或 (和) $W=\min(X,Y)$ 的数字特征	(465)
3.4.4	讨论随机变量相关性与独立性的关系	(468)
题型 3.4.4.1	确定两随机变量相关与不相关	(468)
题型 3.4.4.2	讨论相关性与独立性的关系	(469)
3.4.5	已知数字特征,求分布中的待定常数	(470)
3.4.6	求解两类综合应用题型	(471)
题型 3.4.6.1	求解与数字特征有关的实际应用题	(471)
题型 3.4.6.2	求解概率论与其他数学分支的综合应用题	(473)
3.5	大数定律和中心极限定理	(476)
3.5.1	用切比雪夫不等式估计事件的概率	(476)
3.5.2	大数定律成立的条件和结论	(478)
题型 3.5.2.1	利用三个大数定律成立的条件解题	(480)
题型 3.5.2.2	求随机变量序列依概率的收敛值	(482)
3.5.3	两个中心极限定理的简单应用	(483)
题型 3.5.3.1	利用棣莫弗-拉普拉斯定理近似计算事件的概率	(483)
题型 3.5.3.2	已知随机变量取值的概率,估计取值范围	(484)
题型 3.5.3.3	应用列维-林德伯格中心极限定理的条件和结论解题	(485)
题型 3.5.3.4	近似计算 n 个随机变量之和取值的概率	(486)
题型 3.5.3.5	已知 n 个随机变量之和取值的概率,求个数 n	(487)
3.6	数理统计初步	(488)
3.6.1	求解统计量分布有关的问题	(488)
题型 3.6.1.1	求解与统计量分布有关的基本概念问题	(488)
题型 3.6.1.2	求统计量的分布及其分布参数	(490)
题型 3.6.1.3	求统计量取值的概率	(495)
题型 3.6.1.4	已知统计量取值的概率,反求取值范围	(497)
题型 3.6.1.5	求统计量的数字特征	(498)
题型 3.6.1.6	求经验分布函数	(500)
3.6.2	参数估计	(501)
题型 3.6.2.1	求总体分布中未知参数的矩估计量(值)	(501)
题型 3.6.2.2	求未知参数的极(最)大似然估计量(值)	(505)

第2篇 线性代数

线性代数的试题量和分值在考研真题中所占比重分别约为 22% 和 23%，虽然比重不大，但也应该引起足够的重视。现将 2012—2014 年的考查题型及知识点进行了整理，希望能对广大考生的备考有所帮助。

2012—2014 年考研数学三线性代数题型及知识点分布表

题型/知识点 分布		2012 年试题		2013 年试题		2014 年试题	
		试题量	分值	试题量	分值	试题量	分值
题 量 分 值	选择题	2 道	8 分	2 道	8 分	2 道	8 分
	填空题	1 道	4 分	1 道	4 分	1 道	4 分
	解答题	2 道	22 分	2 道	22 分	2 道	22 分
考 查 知 识 点	选择题	① 向量组的相关性 ② 初等变换		① 等价向量 ② 相似矩阵		① 数值型行列式的计算 ② 向量组的线性无关	
	填空题	伴随矩阵、行列式的计算		行列式的计算		惯性指数	
	解答题	① 行列式的计算, 求非齐次线性方程组的通解 ② 二次型的标准形		① 矩阵的计算 ② 二次型的表示、标准形		① 齐次线性方程组的基础解系、非齐次线性方程组的通解 ② 矩阵可相似对角化的充要条件	

2.1 计算行列式

2.1.1 计算数字型行列式

为方便起见,用 r_i 表示行列式(或矩阵)的第 i 行, c_i 表示第 i 列, k 为不等于 0 的常数.

(1) 交换行列式(或矩阵)的第 i, j 两行(列)记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$);

(2) 行列式(或矩阵)的第 i 行(列)乘以 k , 记为 $r_j(k)$ ($c_i(k)$);

(3) 行列式(或矩阵)的第 j 行(列)乘以 k 加到第 i 行(列)上, 记为 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$).

题型 2.1.1.1 计算非零元素(主要)在一条或两条线上的行列式

这类行列式常考的类型有



法一 降阶法. 利用行列式按行(列)展开定理计算行列式.

法二 利用行列式定义计算. 根据 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \quad (2.1.1.1)$$

可知,非零项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 中元素的列下标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 有多少个,相应地该行行列式就含有多少个非零项;如果一个也没有,则不含非零项,该行行列式等于零. 这里

$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对数码 $1, 2, \cdots, n$ 的所有 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和,其中 $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

例 1 计算下列 n 阶行列式,其中 a_i, b_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 不全为零:

$$D_n^{(1)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}, \quad D_n^{(2)} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

解 下面只计算 $D_n^{(1)}$. $D_n^{(2)}$ 计算类似. 用降阶法求之,按第 1 列展开,得到

$$D_n^{(1)} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{1+n} b_n \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\text{即} \quad D_n^{(1)} = a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n+1} b_1 b_2 \cdots b_n. \quad (2.1.1.2)$$

$$\text{同法可求得} \quad D_n^{(2)} = a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n-1} b_1 b_2 \cdots b_n. \quad (2.1.1.3)$$

注意 上述两行列式的计算结果常用到, 应记住.

例 2 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于().

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

解一 仅(D)入选. 令所给四阶行列式为 Δ_4 , 按第 1 行展开得到

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1 a_4 (a_2 a_3 - b_2 b_3) - b_1 b_4 (a_2 a_3 - b_2 b_3) \\ &= (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4). \end{aligned}$$

解二 仅(D)入选. 将行、列交换, 易将上行列式化为含零子块的四分块行列式. 第 4 列依次与第 3, 2 列交换, 第 4 行依次和第 3, 2 行变换, 得到

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3).$$

解三 特殊值法. 令 $b_1 = 0$, 易求得 $\Delta_4 = a_1 a_4 (a_2 a_3 - b_2 b_3)$. 经比较易知, 仅(D)入选.

注意 可用上法求出下述 n 阶行列式的值, 其中 $|A|$ 为 $n-2$ 阶行列式, $\mathbf{0}$ 为 $n-2$ 维列向量.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & A & \vdots & \vdots \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix} = (ad - bc) |A|. \quad (2.1.1.4)$$

法三 化为下列三角形行列式计算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}; \quad (2.1.1.5)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \cdots a_{n,1}. \quad (2.1.1.6)$$

例 3 下列 n 阶行列式中取值必为 -1 的是().

$$\begin{array}{ll}
 \text{(A)} \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} & \text{(B)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix} \\
 \text{(C)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} & \text{(D)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

解 由式(2.1.1.6)知, (A)中行列式的值为 $(-1)^{n(n-1)/2}$; 由式(2.1.1.2)知, (B)中行列式的值为 $1 + (-1)^{n+1}$; 由式(2.1.1.3)知, (C)中行列式的值为 $0 + (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$; 由式(2.1.1.4)知, (D)中行列式的值为 $(ad-bc)|A| = (0 \times 0 - 1 \times 1) \times 1 = -1$. 仅(D)入选.

题型 2.1.1.2 计算非零元素在三条线上的行列式

类型(一) 计算箭形(爪形)行列式 $\begin{vmatrix} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{vmatrix}$, 常将其化为三角行列式计算.

为此对箭形行列式 $\begin{vmatrix} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \end{vmatrix}$ 或 $\begin{vmatrix} \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{vmatrix}$ 常从第2列起, 把每列的若干倍都加到第1列, 使第1列元素除第1个元素或第 n 个元素外, 其余元素全部化成零, 从而将上述箭形行列式化为三角形行列式.

同样对箭形行列式 $\begin{vmatrix} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \end{vmatrix}$ 或 $\begin{vmatrix} \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{vmatrix}$ 可从第1列起, 把每列的若干倍加到第 n 列, 使第 n 列元素除第1个元素或第 n 个元素外, 其余元素全部化成零, 从而将上述箭形行列式化为三角形行列式.

$$\text{例 4 计算行列式 } D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, a_i \neq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

解 先提取公因式, 再将第1列元素(除第1个元素外)全部化成零:

$$D_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1/a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2/a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_n/a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \frac{c_1 - (d_i/a_i)c_{i+1}}{(c_i \text{ 表示行列式中的第 } i \text{ 列})} \\
 \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{j=1}^n \frac{b_j d_j}{a_j} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \prod_{i=1}^n a_i
 \end{array}$$

$$= \prod_{i=1}^n a_i \left(a_0 - \sum_{j=1}^n \frac{b_j d_j}{a_j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

注意 上述结果中的和式各项是将爪形行列式 D_{n+1} 关于主对角线对称的两元素 b_j, d_j 相乘, 然后除以主对角线上的对应元素 a_j 而得到.

类型(二) 计算三对角行列式 $\begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$.

直接按某行或某列展开得到含三个阶数不同的行列式的递推关系式, 再拆分为四个行列式, 以两个行列式为基础递推.

对较低阶的三对角行列式展开后可得到含两个阶数不同的行列式, 可直接递推.

例 5 计算五阶行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

解 将 D_5 按第 1 行展开得到 $D_5 = (1-a)D_4 + aD_3$, 其中 D_3, D_4 分别是与 D_5 结构相同的三、四阶行列式. 由此得到递推公式 $D_n = (1-a)D_{n-1} + aD_{n-2}, 3 \leq n \leq 5$. 于是逐次递推得到

$$\begin{aligned} D_5 &= (1-a)D_4 + aD_3 = (1-a)[(1-a)D_3 + aD_2] + aD_3 = [(1-a)^2 + a]D_3 + a(1-a)D_2 \\ &= [(1-a)^2 + a]\{(1-a)D_2 + a(1-a)\} + a(1-a)\} = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5. \end{aligned}$$

题型 2.1.1.3 计算行(列)和相等的行列式

常将其化为三角形行列式计算(简称三角形法).

将各列(或各行)加到第 1 列(或第 1 行), 提出第 1 列(或第 1 行)的公因子, 然后再用第 1 列(或第 1 行)的倍元加到其他各列(或各行), 将所得行列式化为三角形行列式.

例 6 行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 行列式 D_4 是各行的行和相等, 将各列都加到第 1 列, 提取公因式, 得

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{c_2+c_1}{c_3+(-1)c_1} \frac{c_4+c_1}{c_4+c_1} x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(-1)^{4(4-1)/2} x^3 = x^4 \quad (\text{利用式(2.1.1.6)}). \end{aligned}$$

例 7 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } D_4 &= \frac{c_1 + \sum_{i=2}^4 c_i}{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_i - r_{i-1}]{i=4,3,2} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1 + \sum_{i=2}^3 c_i]{10} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[c_3 + c_1]{c_2 + c_1} 10 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 160 \quad (\text{利用式(2.1.1.6)}).
 \end{aligned}$$

题型 2.1.1.4 计算范德蒙行列式

以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为行元素的 n 阶范德蒙行列式的算式为

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j), \quad (2.1.1.7)$$

其结构特点是每列元素 $1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{n-1}$ 按 x_i 的升幂(升幂次数从上到下由 0 递增至 $n-1$) 排列($i=1, 2, \dots, n$), 其值等于 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 这 n 个元素中列下标大的减去列下标小的所有可能的差 $x_i - x_j$ 的连乘积, 其中 $n \geq i > j \geq 1$.

因 $D_n = D_n^T$, 如果一个行列式的第 i 行($i=1, 2, \dots, n$) 的元素具有上述结构特征, 也是范德蒙行列式, 其值可按式(2.1.1.7)计算.

计算范德蒙行列式的考题常在解线性方程组及求矩阵的特征值等问题中出现.

$$\text{例 8 计算 } D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & 9 & 1 & 16 \\ 8 & 27 & 1 & -64 \end{vmatrix}.$$

$$\text{解一 } D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 & (-4)^2 \\ 2^3 & 3^3 & 1^3 & (-4)^3 \end{vmatrix}, \text{ 此为四阶范德蒙行列式, 其中 } x_1=2, x_2=3, x_3=1,$$

$$x_4 = -4.$$

此行列式的值为

$$\begin{aligned}
 D_4 &= (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) && (\text{列下标比 1 大的所有差 } x_i - x_1 \text{ 的乘积}) \\
 &\cdot (x_4 - x_2)(x_3 - x_2) && (\text{列下标比 2 大的所有差 } x_i - x_2 \text{ 的乘积}) \\
 &\cdot (x_4 - x_3) && (\text{列下标比 3 大的所有差 } x_i - x_3 \text{ 的乘积}) \\
 &= (-4-2)(1-2)(3-2)(-4-3)(1-3)(-4-1) = -420.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解二 } D_4 &= (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) && (\text{列下标比 4 小的所有差 } x_4 - x_j \text{ 的乘积}) \\
 &\cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) && (\text{列下标比 3 小的所有差 } x_3 - x_j \text{ 的乘积}) \\
 &\cdot (x_2 - x_1) && (\text{列下标比 2 小的所有差 } x_2 - x_j \text{ 的乘积})
 \end{aligned}$$