文都教育®

2016

考研数学

常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著
文都考研命题研究中心◎编

数学三 下册

正版图书配套视频讲解（网校买课送书）

- 名师32课时导学精讲
- 数学中的超级复习全书

超值赠送：《经典常考题型同步测试题》+网络答疑

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

文都教育®

2016

考研数学

常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著

文都考研命题研究中心◎编

数学三 下册

华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

考研数学常考题型解题方法技巧归纳. 数学三/毛纲源编著. —武汉：华中科技大学出版社，2014.10

（毛纲源考研数学辅导系列）

ISBN 978-7-5680-0407-7

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①毛…　Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解　Ⅳ.①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 219410 号

考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学三)　　毛纲源　编著

策划编辑：王汉江(QQ:14458270)

责任编辑：王汉江

特约编辑：陈文峰　李　焕

封面设计：杨　安

责任监印：朱　霞

出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915

录　　排：北京世纪文都教育科技发展有限公司

印　　刷：北京市通州运河印刷厂

开　　本：787mm×1092mm　1/16

印　　张：33.5

字　　数：836 千字

版　　次：2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

定　　价：62.00 元(上、下册)

前　言

本书在教育部制定的考研数学三“考试大纲”的指导下，经过多年的教学实践精心编写而成，完整的知识体系，更加符合当前考生复习备考的需求. 全书共分为三篇：第1篇为微积分，第2篇为线性代数，第3篇为概率论与数理统计.

书中重点讲述与考纲中基本概念、基本理论、基本方法有关的经典试题，内容丰富，题型广泛、全面，任何一年的的真题均可在本书中找到对应的题型；同时作者还对各类重点常考题型的解题思路、方法和技巧进行归纳、总结，对容易出错的地方以“注意”的形式作了详尽的注解加以强调. 讲解的方法通俗易懂，由浅入深，富于启发，是一本广度、深度及难度均适合广大考生使用的考研辅导书.

本书有以下几个特点.

首先，本书根据考研数学大纲的要求，将历年考研数学试题按题型分类，对各类题型的解法进行了归纳总结，使考生能做到举一反三. 数学试题是无限的，而题型是有限的，掌握好这些题型及其解题方法与技巧，会减少解题的盲目性，从而提高解题效率，考生的应试能力自然就得到了提高. 同时也便于考生掌握考研数学一的大部分题型及其解题思路、方法与技巧，因而，本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解. 为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析，便于考生理解、记忆，避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法，这些简便算法新颖、独特，它们是作者多年来教学经验的总结，会大大提高考生的解题速度和准确性，使考生大大节省时间，因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注重培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力，对综合型题型进行了较多的分析和解法，以期提高考生在这方面的能力. 与此同时，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深，适于自学，并尽量使选用的例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识，也为了更好地阅读本书，特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书，这就是本人编写的经济类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书：《经济数学（微积分）解题方法技巧归纳》、《经济数学（线性代数）解题方法技巧归纳》、《经济数学（概率论与数理统计）解题方法技巧归纳》. 这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评，久销不衰. 很多已考取

经济类硕士研究生都受益于这套丛书. 本人在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把这套丛书结合起来学习,必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误、疏漏之处在所难免,恳请专家、读者指正.

毛纲源

2014 年 10 月于武汉理工大学

第2篇　线性代数

第3篇　概率论与数理统计

第2篇 线性代数

线性代数的试题量和分值在考研真题中所占比重分别约为22%和23%，虽然比重不大，但也应该引起足够的重视。现将2012—2014年的考查题型及知识点进行了整理，希望能对广大考生的备考有所帮助。

2012—2014年考研数学三线性代数题型及知识点分布表

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">题型/知识点分布</td><td colspan="2">2012年试题</td><td colspan="2">2013年试题</td><td colspan="2">2014年试题</td></tr>
<tr><td>试题量</td><td>分值</td><td>试题量</td><td>分值</td><td>试题量</td><td>分值</td></tr>
<tr><td rowspan="3">题量分值</td><td>选择题</td><td>2道</td><td>8分</td><td>2道</td><td>8分</td><td>2道</td><td>8分</td></tr>
<tr><td>填空题</td><td>1道</td><td>4分</td><td>1道</td><td>4分</td><td>1道</td><td>4分</td></tr>
<tr><td>解答题</td><td>2道</td><td>22分</td><td>2道</td><td>22分</td><td>2道</td><td>22分</td></tr>
<tr><td rowspan="3">考查知识点</td><td>选择题</td><td colspan="2">① 向量组的相关性
② 初等变换</td><td colspan="2">① 等价向量
② 相似矩阵</td><td colspan="2">①数值型行列式的计算
②向量组的线性无关</td></tr>
<tr><td>填空题</td><td colspan="2">伴随矩阵、行列式的计算</td><td colspan="2">行列式的计算</td><td colspan="2">惯性指数</td></tr>
<tr><td>解答题</td><td colspan="2">① 行列式的计算，求非齐次线性方程组的通解
② 二次型的标准形</td><td colspan="2">① 矩阵的计算
② 二次型的表示、标准形</td><td colspan="2">①齐次线性方程组的基础解系、非齐次线性方程组的通解
②矩阵可相似对角化的充要条件</td></tr>
</table>

2.1 计算行列式

2.1.1 计算数字型行列式

为方便起见,用 r_i 表示行列式(或矩阵)的第 i 行,c_i 表示第 i 列,k 为不等于 0 的常数.

(1) 交换行列式(或矩阵)的第 i,j 两行(列)记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$;

(2) 行列式(或矩阵)的第 i 行(列)乘以 k,记为 $r_j(k)(c_i(k))$;

(3) 行列式(或矩阵)的第 j 行(列)乘以 k 加到第 i 行(列)上,记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

题型 2.1.1.1 计算非零元素(主要)在一条或两条线上的行列式

这类行列式常考的类型有

法一 降阶法.利用行列式按行(列)展开定理计算行列式.

法二 利用行列式定义计算.根据 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} \tag{2.1.1.1}$$

可知,非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有多少个,相应地该行列式就含有多少个非零项;如果一个也没有,则不含非零项,该行列式等于零.这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对数码 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和,其中 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

例 1 计算下列 n 阶行列式,其中 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零:

$$D_n^{(1)}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix},\quad D_n^{(2)}=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

解 下面只计算 $D_n^{(1)}$. $D_n^{(2)}$ 计算类似.用降阶法求之,按第 1 列展开,得到

$$D_n^{(1)}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}b_n\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix},$$

即
$$D_n^{(1)}=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n. \tag{2.1.1.2}$$
同法可求得
$$D_n^{(2)}=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_n. \tag{2.1.1.3}$$

注意 上述两行列式的计算结果常用到,应记住.

例 2 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于( ).

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$ (B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$ (D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

解一 仅(D)入选. 令所给四阶行列式为 Δ_4,按第 1 行展开得到

$$\Delta_4=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3)-b_1b_4(a_2a_3-b_2b_3)$$
$$=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

解二 仅(D)入选. 将行、列交换,易将上行列式化为含零子块的四分块行列式. 第 4 列依次与第 3,2 列交换,第 4 行依次和第 3,2 行变换,得到

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

解三 特殊值法. 令 $b_1=0$,易求得 $\Delta_4=a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3)$. 经比较易知,仅(D)入选.

注意 可用上法求出下述 n 阶行列式的值,其中 $|\mathbf{A}|$ 为 $n-2$ 阶行列式,$\mathbf{0}$ 为 $n-2$ 维列向量.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \mathbf{A} & \vdots & \vdots \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}=(ad-bc)|\mathbf{A}|. \tag{2.1.1.4}$$

法三 化为下列三角形行列式计算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}; \tag{2.1.1.5}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}. \tag{2.1.1.6}$$

例 3 下列 n 阶行列式中取值必为 -1 的是( ).

(A) $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解 由式(2.1.1.6)知,(A)中行列式的值为$(-1)^{n(n-1)/2}$;由式(2.1.1.2)知,(B)中行列式的值为$1+(-1)^{n+1}$;由式(2.1.1.3)知,(C)中行列式的值为$0+(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$;由式(2.1.1.4)知,(D)中行列式的值为$(ad-bc)|\mathbf{A}|=(0\times0-1\times1)\times1=-1$. 仅(D)入选.

题型 2.1.1.2 计算非零元素在三条线上的行列式

类型(一) 计算箭形(爪形)行列式$|\nwarrow|$、$|\nearrow|$、$|\searrow|$、$|\swarrow|$,常将其化为三角行列式计算.

为此对箭形行列式$|\nwarrow|$或$|\swarrow|$常从第 2 列起,把每列的若干倍都加到第 1 列,使第 1 列元素除第 1 个元素或第 n 个元素外,其余元素全部化成零,从而将上述箭形行列式化为三角形行列式.

同样对箭形行列式$|\nearrow|$或$|\searrow|$可从第 1 列起,把每列的若干倍加到第 n 列,使第 n 列元素除第 1 个元素或第 n 个元素外,其余元素全部化成零,从而将上述箭形行列式化为三角行列式.

例 4 计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, $a_i\neq0\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

解 先提取公因式,再将第 1 列元素(除第 1 个元素外)全部化成零:

$$D_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1/a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2/a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_n/a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{(c_i 表示行列式中的第 i 列)}]{c_1-(d_i/a_i)c_{i+1}}\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{b_jd_j}{a_j} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\cdot\prod_{i=1}^{n}a_i$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_i \left(a_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j d_j}{a_j} \right), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

注意 上述结果中的和式各项是将爪形行列式 D_{n+1} 关于主对角线对称的两元素 b_j, d_j 相乘，然后除以主对角线上的对应元素 a_j 而得到.

类型(二) 计算三对角线行列式$\left|\diagdown\!\diagdown\!\diagdown\right|$.

直接按某行或某列展开得到含三个阶数不同的行列式的递推关系式，再拆分为四个行列式，以两个行列式为基础递推.

对较低阶的三对角行列式展开后可得到含两个阶数不同的行列式，可直接递推.

例 5 计算五阶行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

解 将 D_5 按第 1 行展开得到 $D_5 = (1-a)D_4 + aD_3$，其中 D_3, D_4 分别是与 D_5 结构相同的三、四阶行列式. 由此得到递推公式 $D_n = (1-a)D_{n-1} + aD_{n-2}$，$3 \leqslant n \leqslant 5$. 于是逐次递推得到

$$\begin{aligned} D_5 &= (1-a)D_4 + aD_3 = (1-a)[(1-a)D_3 + aD_2] + aD_3 = [(1-a)^2 + a]D_3 + a(1-a)D_2 \\ &= [(1-a)^2 + a]\{[(1-a)D_2 + a(1-a)] + a(1-a)\} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5. \end{aligned}$$

题型 2.1.1.3 计算行(列)和相等的行列式

常将其化为三角形行列式计算(简称三角形法).

将各列(或各行)加到第 1 列(或第 1 行)，提出第 1 列(或第 1 行)的公因子，然后再用第 1 列(或第 1 行)的倍元加到其他各列(或各行)，将所得到行列式化为三角形行列式.

例 6 行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ________.

解 行列式 D_4 是各行的行和相等，将各列都加到第 1 列，提取公因式，得

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_3+(-1)c_1 \\ c_4+c_1}]{c_2+c_1} x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(-1)^{4(4-1)/2} x^3 = x^4 \quad \text{(利用式(2.1.1.6))}.$$

例 7 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $D_4 \xlongequal{c_1+\sum_{i=2}^{4}c_i} 10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix} \xlongequal[i=4,3,2]{r_i-r_{i-1}} 10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&1&-3&1\\0&-3&1&1\end{vmatrix}$

$$=10\begin{vmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{vmatrix} \xlongequal{c_1+\sum_{i=2}^{3}c_i} 10\begin{vmatrix}-1&1&-3\\-1&-3&1\\-1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+c_1]{c_2+c_1} 10\begin{vmatrix}-1&1&-4\\-1&-4&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=160$$ (利用式(2.1.1.6)).

题型 2.1.1.4 计算范德蒙行列式

以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为行元素的 n 阶范德蒙行列式的算式为

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),\tag{2.1.1.7}$$

其结构特点是每列元素 $1,x_i,x_i^2,\cdots,x_i^{n-1}$ 按 x_i 的升幂(升幂次数从上到下由 0 递增至 $n-1$)排列($i=1,2,\cdots,n$),其值等于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 这 n 个元素中列下标大的减去列下标小的所有可能的差 x_i-x_j 的连乘积,其中$n\geqslant i>j\geqslant 1$.

因 $D_n=D_n^{\mathrm T}$,如果一个行列式的第 i 行($i=1,2,\cdots,n$)的元素具有上述结构特征,也是范德蒙行列式,其值可按式(2.1.1.7)计算.

计算范德蒙行列式的考题常在解线性方程组及求矩阵的特征值等问题中出现.

例 8 计算 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&1&-4\\4&9&1&16\\8&27&1&-64\end{vmatrix}$.

解一 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&1&-4\\2^2&3^2&1^2&(-4)^2\\2^3&3^3&1^3&(-4)^3\end{vmatrix}$,此为四阶范德蒙行列式,其中 $x_1=2,x_2=3,x_3=1,x_4=-4$.

此行列式的值为

$D_4=(x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$ (列下标比 1 大的所有差 x_i-x_1 的乘积)

$\cdot(x_4-x_2)(x_3-x_2)$ (列下标比 2 大的所有差 x_i-x_2 的乘积)

$\cdot(x_4-x_3)$ (列下标比 3 大的所有差 x_i-x_3 的乘积)

$=(-4-2)(1-2)(3-2)(-4-3)(1-3)(-4-1)=-420.$

解二 $D_4=(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$ (列下标比 4 小的所有差 x_4-x_j 的乘积)

$\cdot(x_3-x_1)(x_3-x_2)$ (列下标比 3 小的所有差 x_3-x_j 的乘积)

$\cdot(x_2-x_1)$ (列下标比 2 小的所有差 x_2-x_j 的乘积)