

普通高等教育“十二五”规划教材
大学数学规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

陈万勇 主编 黄素珍 副主编

★ 知识体系完整

★ 练习巩固提高

★ 面向工程应用

★ 强调数学实验



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十二五”规划教材
大学数学规划教材

线性代数

陈万勇 主编 黄素珍 副主编
韦俊 杨善兵 陈丽娟 卞小霞 参编

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是为满足工程类本科院校“线性代数”课程教学的需要,便于学生自学而编写的教材。全书将传统的主教材和学习指导书合二为一,充分考虑了教师讲授和学生学习的必要性与便利性。主要内容有行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的相似与二次型等。

本书适合作为工程类本科院校“线性代数”课程教材,也适合作为其他数学爱好者的参考用书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈万勇主编. —北京:电子工业出版社,2013.11

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-121-21587-2

I. ①线… II. ①陈… III. ①线性代数—高等学校—教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第233097号



策划编辑:王赫男

责任编辑:谭海平 特约编辑:王崧

印 刷:北京中新伟业印刷有限公司

装 订:北京中新伟业印刷有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本:787×980 1/16 印张:11.75 字数:262千字

印 次:2013年11月第1次印刷

定 价:33.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

为适应我国高等教育飞速发展的需要,根据高等教育面向 21 世纪发展与应用型工程本科的要求,结合卓越工程师教育培养计划对工科学生提出的新要求,我们组织编写了这本教材。

本书针对使用对象的特点,结合作者多年的教学实践和教学改革的实际经验,强化了数学在各学科中更广泛的应用。在这本教材的编写过程中,将数学实验、数学软件编进教材,并关注了以下几方面的问题:一是面向工程实际,构建线性代数的知识体系;二是结合应用型本科学生的特点,完善线性代数的知识结构;三是针对学生考研的需要,讲解线性代数的解题方法。

在人们的传统观念里,学习数学只要书、纸、笔就够了,怎么能像学物理、化学一样要做实验呢?我们说,计算机技术的引入使代数的计算更快捷,这是线性代数教学体系、内容和方法改革的一项尝试。本书引入 MATLAB 软件进行了相应内容实验。

本书主要内容有行列式、矩阵向量、线性方程组、矩阵的相似与二次型等。参加本书编写的有黄素珍(第 1、6 章)、陈万勇(第 2 章)、杨善兵(第 3 章)、韦俊(第 4 章)、陈丽娟(第 5 章),卞小霞审核了附录部分,陈万勇审阅了全书。在本教材编写过程中,得到了学校的重视和基金的支持,并得到了电子工业出版社的鼎力相助,在此一并致谢。

限于学识与水平,本书的缺点与错误在所难免。恳请专家和读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 行列式	1
1.1 二阶与三阶行列式	1
1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式	1
1.1.2 三阶行列式	3
1.2 排列及其性质	4
1.2.1 n 级排列的定义	4
1.2.2 n 级排列的性质	5
1.3 n 阶行列式的定义	5
1.3.1 n 阶行列式的定义	6
1.3.2 特殊行列式	7
1.4 行列式的性质	9
1.4.1 行列式的性质	9
1.4.2 利用行列式的性质计算行列式	10
1.5 行列式按行(列)展开	13
1.5.1 余子式和代数余子式	13
1.5.2 行列式展开定理	13
1.6 克拉默法则	19
1.6.1 线性方程组的基本概念	19
1.6.2 克拉默法则	20
习题 1	23
第 2 章 矩阵及其运算	26
2.1 矩阵的概念	26
2.2 矩阵的运算	27
2.2.1 矩阵的加(减)法	27
2.2.2 数与矩阵的乘法	28
2.2.3 矩阵的乘法	28
2.2.4 矩阵的转置	30
2.2.5 几种特殊的矩阵	31
2.2.6 方阵乘积的行列式	31
2.3 逆矩阵	33

2.3.1	逆矩阵的定义	33
2.3.2	逆矩阵的求法	33
2.4	矩阵的分块法	36
2.5	矩阵的初等变换与初等矩阵	37
2.5.1	矩阵的初等变换与等价	37
2.5.2	初等矩阵	38
2.5.3	在初等行变换下的行阶梯形矩阵与行简化阶梯形矩阵	40
2.5.4	利用初等变换求逆矩阵与解矩阵方程	40
2.6	矩阵的秩	43
	习题 2	44
第 3 章	线性方程组与向量组的线性相关性	47
3.1	线性方程组的解	47
3.2	向量组及其线性组合	52
3.3	向量组的线性相关性	56
3.4	向量组的秩	60
3.5	向量空间	63
3.6	线性方程组解的结构	65
3.6.1	齐次线性方程组解的结构	65
3.6.2	非齐次线性方程组解的结构	68
	习题 3	70
第 4 章	矩阵的特征值与特征向量	74
4.1	向量的内积与正交向量组	74
4.1.1	向量的内积	74
4.1.2	向量的长度	74
4.1.3	正交向量组	75
4.1.4	正交矩阵	77
4.2	方阵的特征值与特征向量	77
4.2.1	矩阵的特征值	77
4.2.2	矩阵特征值与特征向量的性质	81
4.3	相似矩阵与矩阵的对角化	81
4.3.1	相似矩阵	81
4.3.2	相似矩阵性质	82
4.3.3	矩阵的对角化	82
4.3.4	相似矩阵的应用	85

4.4	实对称矩阵的对角化	86
4.4.1	实对称矩阵的性质	86
4.4.2	实对称矩阵的对角化	86
	习题 4	88
第 5 章	二次型	90
5.1	二次型及其矩阵表示	90
5.1.1	二次型	90
5.1.2	矩阵表示	90
5.2	二次型的标准形与规范形	92
5.2.1	标准形	92
5.2.2	规范形	97
5.3	正定二次型	98
5.3.1	惯性定理	98
5.3.2	正定二次型与正定矩阵	99
	习题 5	101
第 6 章	MATLAB 在线性代数中的应用	103
6.1	矩阵与行列式的运算	103
6.1.1	实验目的	103
6.1.2	实验内容	103
6.2	线性方程组求解	108
6.2.1	实验目的	108
6.2.2	实验内容	108
6.3	求矩阵的特征值、特征向量及矩阵的对角化问题	113
6.3.1	实验目的	113
6.3.2	实验内容	113
	习题 6	116
附录 A	各章教学基本要求	119
附录 B	各章内容提要	121
附录 C	各章典型题例与分析	136
附录 D	各章练习与测试	163
附录 E	各章练习与测试答案与提示	171
	参考文献	179

第1章 行列式

线性代数是中学代数的继续和提高，而行列式是研究线性代数的基础工具，也是线性代数的一个重要概念，它广泛应用于数学、工程技术及经济等众多领域。

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法。此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默 (Cramer) 法则。

1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

为消去未知数 x_2 ，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘以上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1 ，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组 (1.1.1) 的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.1.2)$$

式 (1.1.2) 中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得。其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组 (1.1.1) 中的 4 个数确定的，把这 4 个数按它们在方程组 (1.1.1) 中的位置，排成两行两列（横排称为**行**、竖排称为**列**）的数表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}, \quad (1.1.3)$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表 (1.1.3) 所确定的**二阶行列式**，并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (1.1.4)$$

数 a_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) 称为行列式 (1.1.4) 的**元素**或**元**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为**列标**, 表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式 (1.1.4) 的 (i, j) **元**.

上述二阶行列式的定义, 可用对角线法则来记忆. 参看图 1.1.1, 把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**, a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**, 于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

例 1.1.1 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解: $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - (-1) \times 1 = 7$.

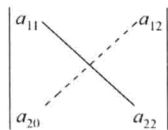


图 1.1.1

例 1.1.2 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$, 问 λ 为何值时 $D \neq 0$?

解: $D = \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2\lambda^2 = \lambda(1 - 2\lambda)$, 令 $D \neq 0$, 则 $\lambda \neq 0$ 或 $\lambda \neq \frac{1}{2}$, 故当 $\lambda \neq 0$ 或 $\lambda \neq \frac{1}{2}$

时, $D \neq 0$.

利用二阶行列式的概念, 式 (1.1.2) 中 x_1, x_2 的分子也可写成二阶行列式, 即

$$b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11} b_2 - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么式 (1.1.2) 可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意, 这里的分母 D 是由方程组 (1.1.1) 的系数所确定的二阶行列式 (称为系数行列式), x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1.1.3 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解: 由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \times 1 - (-2) \times 1 = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 12 \times 2 = -21,$$

因此
$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

1.1.2 三阶行列式

类似地, 可以定义三阶行列式.

设有 9 个数排成三行三列的数表

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad (1.1.5)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \quad (1.1.6)$$

式(1.1.6)称为数表(1.1.5)所确定的**三阶行列式**.

上述定义表明三阶行列式含 6 项, 每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号, 其规律遵循如图 1.1.2 所示的对角线法则: 图中三条实线可视为平行于主对角线的连线, 三条虚线可视为平行于副对角线的连线, 实线上三元素的乘积冠正号, 虚线上三元素的乘积冠负号.

例 1.1.4 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解: 按对角线法则, 有

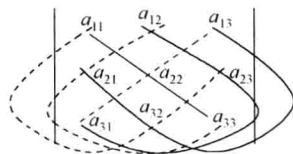


图 1.1.2

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 0 \times 5 + 3 \times 3 \times 2 + 2 \times (-1) \times 1 - 2 \times 0 \times 2 - 3 \times (-1) \times 5 - 1 \times 3 \times 1 \\ &= 0 + 18 - 2 - 0 + 15 - 3 = 28. \end{aligned}$$

例 1.1.5 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解: 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 \\ &= x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$.

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式, 四阶及更高阶行列式可用其他方法来计算.

1.2 排列及其性质

在 n 阶行列式的定义中, 要用到 n 级排列的一些性质.

1.2.1 n 级排列的定义

由自然数 $1, 2, \dots, n (n > 1)$ 组成的一个无重复有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

例 1.2.1 由自然数 $1, 2, 3$ 可组成几级排列? 分别是什么?

解: 可组成一个三级排列, 它们是 $123, 132, 213, 231, 312, 321$.

显然, 三级排列共有 $3! = 6$ 个, 所以 n 级排列的总数为 $n!$ 个.

在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 如果较大数 i_s 排在较小数 i_t 之前, 即 $i_s > i_t$, 则称这一对数 $i_s i_t$ 构成一个**逆序**, 一个排列中逆序的总数, 称为它的**逆序数**, 可表示为 $t(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例 1.2.2 求 $t(21534)$.

解: 在五级排列 21534 中, 构成逆序数对的有 $21, 53, 54$, 因此 $t(21534) = 3$.

如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为偶数, 则称它为**偶排列**; 如果排列的逆序数为奇数, 则称它为**奇排列**.

例 1.2.3 讨论排列 $123 \cdots (n-1)n$ 和 $n(n-1) \cdots 321$ 的奇偶性.

解: 易见 n 级排列 $123 \cdots (n-1)n$ 中没有逆序, 所以 $t(123 \cdots (n-1)n) = 0$, 这是一个偶排列, 故又称为**自然序排列**.

在 n 级排列 $n(n-1) \cdots 321$ 中, 只有逆序, 没有顺序, 故有

$$t(n(n-1) \cdots 321) = 0 + 1 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

可以看出, 排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的奇偶性与 n 的取值有关, 从而当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时这个排列为偶排列, 否则为奇排列.

1.2.2 n 级排列的性质

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 交换任意两数 i_s 与 i_t 的位置, 称为**对换**, 记为 (i_s, i_t) . 将相邻两个元素对换, 称为**相邻对换**.

如 $(21534) \xrightarrow{(1,3)} (23514)$.

一般地, 我们有以下结论.

定理 1 任意一个排列经过一次对换后, 改变其奇偶性.

证: 先证相邻对换的情形.

设排列 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m$, 对换 a 与 b , 变为 $a_1 \cdots a_i b a b_1 \cdots b_m$. 显然, $a_1, \cdots, a_i; b_1, \cdots, b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变, 而 a 与 b 两元素的逆序数改变为: 当 $a < b$ 时, 经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变; 当 $a > b$ 时, 经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m$ 与 $a_1 \cdots a_i b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列 $a_1 \cdots a_i a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$, 把它做 m 次相邻对换, 变成 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$, 再做 $m+1$ 次相邻对换, 变成 $a_1 \cdots a_i b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$. 总之, 经过 $2m+1$ 次相邻对换, 排列 $a_1 \cdots a_i a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 变成排列 $a_1 \cdots a_i b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$, 所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列变成自然序排列的对换次数为奇数, 偶排列变成自然序排列的对换次数为偶数.

证: 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数, 而自然序排列是偶排列 (逆序数为 0), 因此知推论成立.

定理 2 在全部 n 级排列 ($n \geq 2$) 中, 奇偶排列各占一半.

证: n 级排列的总数为 $n!$ 个, 设奇排列数为 t , 偶排列数为 s , 则有 $t+s=n!$.

若将 t 个奇排列中数和相邻数对调一下, 即变成了偶排列, 那么就有 $s \geq t$, 同样的做法就有 $t \geq s$, 所以 $t=s$, 即奇偶排列各占一半.

1.3 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义, 先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1.3.1)$$

容易看出:

(i) 式(1.3.1)等号右端的每一项恰是三个元素的乘积, 这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此式(1.3.1)等号右端任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(行标)排成标准次序 123, 而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$, 它是 1、2、3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种, 对应式(1.3.1)等号右端共含 6 项.

(ii) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是: 123, 231, 312;

带负号的三项列标排列是: 132, 213, 321.

经计算可知前三个排列都是偶排列, 而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$, 其中 t 为列标排列的逆序数.

总之, 三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

式中, t 为 $p_1 p_2 p_3$ 的逆序数, Σ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 $p_1 p_2 p_3$ 取和.

仿此, 可以把行列式推广到一般情形.

1.3.1 n 阶行列式的定义

定义 1 设有 n^2 个数, 排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积, 并冠以符号 $(-1)^t$, 得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (1.3.2)$$

的项, 其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个, 因而形如式(1.3.2)的项共有 $n!$ 项. 所以这 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式, 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记为 $\det(a_{ij})$ ，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i, j) 元.

按此定义的二阶、三阶行列式，与 1.1 节中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$ ，注意不要与绝对值记号相混淆.

从上面的分析及定义，可得到 n 阶行列式的另一种定义形式.

定义 2 $D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^t a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$ ，即把列标排列写成标准排列， $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为行标的一个 n 级排列.

一个 n 级排列.

由此，得到行列式更加一般的定义形式.

定义 3 $D = \sum (-1)^{t(j_1 j_2 \cdots j_n) + t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{j_1 p_1} a_{j_2 p_2} \cdots a_{j_n p_n}$ ，其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为行标的一个 n 级排列， $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为列标的一个 n 级排列.

例 1.3.1 四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 共有多少项？乘积 $a_{12} a_{24} a_{32} a_{41}$ 是 D 中的

项吗？

解：共有 $4! = 24$ 项. 乘积 $a_{12} a_{24} a_{32} a_{41}$ 不是 D 中的项，因为其中两个元素 a_{12} ， a_{32} 均取自第二列.

例 1.3.2 已知 $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$ ，求 x^3 的系数.

解：由行列式的定义，展开式的一般项为 $(-1)^{t(p_1 p_2 p_3 p_4)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} a_{3 p_3} a_{4 p_4}$ ，要出现 x^3 的项， $a_{i p_i}$ 需三项取到 x . 显然行列式中含 x^3 的项仅有两项，它们是 $(-1)^{t(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ 及 $(-1)^{t(1243)} a_{11} a_{22} a_{34} a_{43}$. 即 $x \cdot x \cdot x \cdot 1 = x^3$ 及 $(-1) \cdot x \cdot x \cdot 1 \cdot 2x = -2x^3$ ，故 x^3 的系数为 $1 + (-2) = -1$.

1.3.2 特殊行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式.

1. 对角行列式

称 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为**对角行列式**. 根据行列式的定义得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 上三角形行列式

称 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为上三角形行列式. 根据行列式的定义得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 下三角形行列式

称 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为下三角形行列式. 根据行列式的定义得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4. 副对角形行列式

称 $D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 为副对角形行列式. 根据行列式的定义得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

1.4 行列式的性质

当行列式的阶数较高时, 利用定义计算行列式相当麻烦, 为了简化行列式的计算, 需要研究行列式的一些性质.

1.4.1 行列式的性质

性质 1 将行列式的行、列互换, 行列式的值不变. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D^T = D$. 行列式 D^T 称为 D 的**转置行列式**.

由此性质可知, 行列式中行与列的地位是对称的, 也就是说, 凡是行列式对行成立的性质, 对列也是成立的.

性质 2 互换行列式的两行(列), 行列式的值仅改变符号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行, 以 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i, j 两行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交换 i, j 两列记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同, 则此行列式等于零.

性质 3 以数 k 乘以行列式的某一行(列)中的所有元素, 就等于用 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 i 行(列)乘以 k , 记为 $r_i \times k$ ($c_i \times k$).

由性质 3 可得下面的推论.

推论 2 行列式一行(列)的所有元素的公因子可以提取到行列式的外面.

推论 3 如果行列式中有一行(列)的元素全为零, 则此行列式值为零.

性质 4 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例, 则此行列式值为零.

性质 5 如果行列式的某一行(列)的所有元素都是两个数的和, 则此行列式等于两行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一常数后加到另一行(列)对应的元素上去, 行列式的值不变.

例如, 以数 k 乘第 i 行加到第 j 行上, 当 $i \neq j$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{r_j + k r_i}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列)上记为 $r_j + kr_i$ ($c_j + kc_i$).

以上诸性质请读者证明之.

1.4.2 利用行列式的性质计算行列式

性质 2、3、6 介绍了行列式关于行和关于列的三种运算, 即 $r_i \leftrightarrow r_j$ 、 $r_i \times k$ 、 $r_j + kr_i$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 、 $c_i \times k$ 、 $c_j + kc_i$, 利用这些运算可简化行列式的计算, 特别是利用运算 $r_j + kr_i$ (或 $c_j + kc_i$) 可以把行列式中许多元素化为零. 计算行列式常用的一种方法就是利用 $r_j + kr_i$ (或 $c_j + kc_i$) 把行列式化为上三角形行列式, 从而算得行列式的值.

例 1.4.1 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.